SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

FRANCISCA SACRAMENTO GONCALVES

A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NO ENSINO DE ANÁLISE REAL: uma proposta para a aprendizagem de sequências numéricas

ABAETETUBA – PA

2022

FRANCISCA SACRAMENTO GONCALVES

A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NO ENSINO DE ANÁLISE REAL: uma proposta para a aprendizagem de sequências numéricas

Trabalho de Conclusão de Curso, em formato de artigo, apresentado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, do Campus Universitário de Abaetetuba, da Universidade Federal do Pará, como requisito obrigatório para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Suellen Cristina Queiroz Arruda

ABAETETUBA – PA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G635u Goncalves, Francisca Sacramento.
A utilização do geogebra no ensino de análise real: uma proposta para a aprendizagem de sequências numéricas / Francisca Sacramento Goncalves. — 2022.
XXII,19 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Suellen Cristina Queiroz Arruda
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de Matemática, Abaetetuba, 2022.

1. Sequências Numéricas. 2. Tecnologias Digitais. 3. GeoGebra. 4. Ensino. I. Título.

CDD 515.24

FRANCISCA SACRAMENTO GONCALVES

A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NO ENSINO DE ANÁLISE REAL: uma proposta para a aprendizagem de sequências numéricas

Trabalho de Conclusão de Curso, em formato de artigo, apresentado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, do Campus Universitário de Abaetetuba, da Universidade Federal do Pará, como requisito obrigatório para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Suellen Cristina Queiroz Arruda

Data da aprovação: 23/12/2022

Conceito:

BANCA EXAMINADORA

Suellen Cristina Q. Arruda

Prof.ª Dr.ª Suellen Cristina Queiroz Arruda

Orientadora - FACET/CUBT/UFPA

Laila Conceição Fontinele

Prof.ª Dr.ª Laila Conceição Fontinele

Membro Interno - FACET/CUBT/UFPA

Genivaldo dos Passos Corrêa

Prof. Dr. Genivaldo dos Passos Corrêa

Membro Interno - FACET/CUBT/UFPA

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradecer a Deus por sempre estar comigo, me abençoando, dando sabedoria para escrever esse trabalho, protegendo de todo mal e me guiando sempre pelo caminho certo.

Aos meus pais, Angela Maria e Guilherme Antônio, por sempre apoiarem meus estudos e me incentivarem a seguir a vida acadêmica.

Às minhas irmãs, Alice, Aurilene, Arlete, Arienilce e Adriane, por me motivarem nas dificuldades e por todo amor e companheirismo.

À minha querida Islanny Cristina, pela amizade, amor, companheirismo, paciência e por me apoiar e por me estimular a escrever este trabalho.

Aos meus amigos de turma, Vanessa Tenório, Bruno Tenório e Mayra Pimentel, pela amizade e momentos felizes no decorrer do curso de Licenciatura em Matemática.

À minha orientadora, Prof.ª Dr.ª Suellen Arruda, que se dedicou e tirou um tempo para me orientar a fazer esse trabalho de conclusão de curso, meus sinceros agradecimentos e reconhecimento do seu trabalho, você é um exemplo para mim.

Ao Prof. Dr. Osvaldo dos Santos Barros pelos conselhos, brincadeiras e puxões de orelha, tenho um carinho enorme por você. Enfim, a todos os professores que contribuíram para a minha formação pessoal e acadêmica.

Obrigada aos demais, os quais não foram citados aqui, que contribuíram de alguma forma para a minha conclusão neste curso.

“A matemática é o alfabeto no qual Deus escreveu o Universo”.

(GALILEU GALILEI).

A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NO ENSINO DE ANÁLISE REAL: uma proposta para a aprendizagem de sequências numéricas.

Francisca Sacramento Goncalves[1]
Suellen Cristina Queiroz Arruda[2]

RESUMO

O presente trabalho tem como finalidade apresentar uma proposta diferenciada ao ensino tradicional de sequências numéricas, assunto abordado na disciplina Análise Real, baseada na utilização de tecnologias digitais. Buscou-se utilizar o *software* GeoGebra para mostrar o dinamismo e a visualização que o *software* possibilita a compreensão de algumas noções básicas sobre sequências numéricas. A pesquisa pretende demonstrar que é possível promover a adoção de recursos tecnológicos em aulas de Análise Real, dinamizando e facilitando o processo de ensino de sequências numéricas.

Palavras chave: Sequências Numéricas; Tecnologias Digitais; GeoGebra; Ensino.

ABSTRACT

The objective of this work is to present a different way from traditional teaching of numerical sequences, subject of the course Real Analysis, based on the use of digital technologies. GeoGebra software was used the GeoGebra to show the dynamism and visualization, this software makes it possible to understand some basic notions about numerical sequences. The research aims to demonstrate that it's possible to promote the adoption of technological resources in Real Analysis classes, speeding up and facilitating the teaching process of numerical sequences.

Keywords: Numerical sequences; Digital Technologies; GeoGebra; Teaching.

[1] Discente do Curso de Licenciatura em Matemática/CUBT/UFPA: francisca.goncalves@abaetetuba.ufpa.br
[2] Docente orientadora. Doutora em Matemática: scqarruda@ufpa.br

INTRODUÇÃO

A matemática, assim como em outra ciência exata, é considerada por muitos uma ciência dura devido ao rigor dos cálculos envolvidos em seus mais diversos ramos de estudo. No contexto escolar, é comum relatos de que a matemática é uma disciplina temida e pouco estimada por grande parte dos alunos desde as séries iniciais, o que acaba gerando dificuldades na aprendizagem de conceitos matemáticos essenciais tanto para o progresso da vida acadêmica quanto para compreender situações cotidianas no mundo em que vivemos. Kremer (2010) afirma que:

> Um grande número de estudantes apresenta dificuldade na aprendizagem da matemática e, uma porcentagem significativa considera que essa área de aprendizagem é um tormento. As dificuldades envolvidas no seu ensino e aprendizagem e os maus resultados escolares transformam a matemática numa área de preocupação (KREMER, 2010, p. 18).

Nos cursos de graduação em Matemática, é comum um alto índice de reprovação em certos componentes curriculares como, por exemplo, Álgebra Linear, Cálculo e Análise Real, cujas teorias envolvem conceitos e resultados abstratos, os quais dificultam e complexificam o entendimento por parte dos alunos, implicando em um menor rendimento acadêmico.

No que diz respeito à Análise Real, Lima, Marinho e Netto (2021, p. 91) destacam que “disciplinas que antecedem a Análise Real deveriam fornecer pré-requisitos satisfatórios para facilitar a sua aprendizagem, citando o Cálculo Diferencial e Integral como a porta de entrada para o estudo da disciplina”. Diante de possíveis lacunas em disciplinas anteriores, o discente acaba não compreendendo conceitos iniciais necessários para um bom desenvolvimento na disciplina Análise Real, normalmente ministrada no último semestre do curso, tornando-a assim conhecida como a disciplina “rasga beca”.

Com a proposta de um ensino diferente do tradicional que contribua para uma aprendizagem mais significativa na disciplina Análise Real, o presente trabalho buscou promover o ensino de sequências numéricas a partir do uso do *software* GeoGebra. Para Mazzi (2015):

> Estudantes que já concluíram o curso de Análise passaram a compreender – com a participação ativa do software e do desenho pedagógico formulado – a noção de convergência com base no processo de visualização e experimentação, sendo então, uma possibilidade uso no trabalho em sala de aula (MAZZI, 2015, p. 16).

A partir deste delineamento, esta pesquisa está estruturada em duas partes. Na primeira seção, abordamos a relevância do uso das tecnologias digitais, em especial o *software* GeoGebra, no ensino de matemática. Na seção seguinte, utilizamos construções feitas no GeoGebra para apresentar as noções básicas de sequências numéricas.

1. AS TECNOLOGIAS DIGITAIS NA PERSPECTIVA DO ENSINO DE MATEMÁTICA

Não há dúvidas de que vivemos uma Era em que as tecnologias estão presentes em todos os aspectos e vertentes de nossas vidas. Entre o final do século XX e início do século XXI, a internet, em específico as redes sociais, passaram a fazer parte do cotidiano das pessoas, atualmente, com um celular na mão uma pessoa pode fazer videoconferência com alguém em qualquer lugar do mundo ou até fazer supermercado sem sair de casa.

Historicamente, desde a Revolução Técnico-Científica-Informacional, mais conhecida como Terceira Revolução Industrial, ocorrida em meados do século XX, após a Segunda Guerra Mundial, as gerações vêm se modificando com os avanços tecnológicos, constantemente novas possibilidades são criadas nos diversos campos do conhecimento.

No que concerne à educação, o modelo educacional vem sofrendo transformações, o processo de ensino e de aprendizagem precisa acompanhar as mudanças que ocorrem na sociedade a fim de minimizar os impactos da revolução tecnológica nos alunos. Recentemente, devido a pandemia da COVID 19, vimos que os espaços escolares se tornaram virtuais, a comunicação entre alunos e professores em espaço diferentes passou a ser instantânea, esses fatos foram vistos como “o novo”, mas com o avanço das tecnologias, a partir da década de 1950, isso já era de ser esperado. De acordo com Farias (2004), o professor precisa estar preparado e atualizado para utilizar da melhor forma essas tecnologias.

> Na aurora do século XXI, necessitam os professores estar preparados para interagir com uma geração mais atualizada e mais informada, porque os modernos meios de comunicação, liderados pela Internet, permitem o acesso instantâneo à informação e os alunos têm mais facilidade para buscar conhecimento por meio da tecnologia colocada à sua disposição (FARIAS, 2004, p. 1).

No entanto, juntamente com os benefícios trazidos pelo uso das tecnologias digitais, é preciso apontar que os professores passaram a concorrer pela atenção com os celulares em sala de aula, portanto, perceber que a atual geração gosta e atenta-se para aprender por meio da tecnologia, se faz necessário ter o domínio dos recursos tecnológicos e utilizá-los de forma eficiente. Logo, é de extrema importância que os professores estejam capacitados e sempre em constante formação para que ocorra um ensino de qualidade para esta geração conectada.

Visando que o ensino deve priorizar as necessidades dos alunos, os planejamentos das aulas precisaram incluir instrumentos dessa Era para que a aprendizagem dos alunos aconteça com mais modernidade e eficiência. Nesse sentido, os congressos, simpósios e planejamentos escolares há algum tempo passaram a debater sobre o uso das tecnologias digitais na Educação, e muitas pesquisas apontam que a adoção de meios tecnológicos em sala de aula possibilita um processo de ensino mais dinâmico e atrativo.

Em particular, o ensino de matemática ganhou como aliado inúmeras ferramentas, dentre elas podemos citar os *softwares* matemáticos que proporcionam um ensino dinamizado e estimulador, fazendo com que o ensino e aprendizagem aconteça de forma mais interessante. Assim, o professor ao fazer uso de *softwares* em suas aulas traz metodologias diferenciadas para facilitar o aprendizado da matemática, a importância desta prática é evidenciada por Schoenfeld (1997) ao afirmar que

> O professor deve fazer uso de práticas metodológicas para a resolução de problemas, as quais tornam as aulas mais dinâmicas e não restringem o ensino de matemática a modelos clássicos, como exposição oral e resolução de exercícios (SCHOENFELD, 1997, p. 66).

Diante de diversos recursos tecnológicos, o GeoGebra surge como uma possibilidade de ferramenta no ensino da matemática desde o fundamental ao ensino superior, permitindo o estudo de Análise, Álgebra, Geometria, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculo em um único ambiente. É um aplicativo de manuseio simples e muito intuitivo, sua interface conta com um tutorial para os usuários. Por existir uma versão do aplicativo para celular, o seu uso como ferramenta auxiliadora torna-se ainda mais viável, pois o aluno pode explorar em sala de aula juntamente com o professor.

Segundo Pereira (2012, p. 32), “as características do GeoGebra potencializam a constituição de cenários para investigação, nos quais o aluno é capaz de experimentar situações em um processo dinâmico”. Portanto, o *software* GeoGebra dentro da sala de aula permite interação com conceitos matemáticos, além da construção e realização de cálculos e outras funções matemáticas mais precisas, rápidas e dinâmicas, favorecendo assim para a construção de um ambiente mais propício para a aprendizagem e se tornar um importante recurso no processo de ensino.

2. ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS COM O SOFTWARE GEOGEBRA PARA A COMPREENSÃO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Nesta seção serão apresentadas a definição de sequência numérica e algumas notações úteis para o entendimento do assunto. Além disso, usaremos o GeoGebra para mostrar o dinamismo e a visualização que o *software* possibilita a compreensão de algumas noções sobre sequências numéricas.

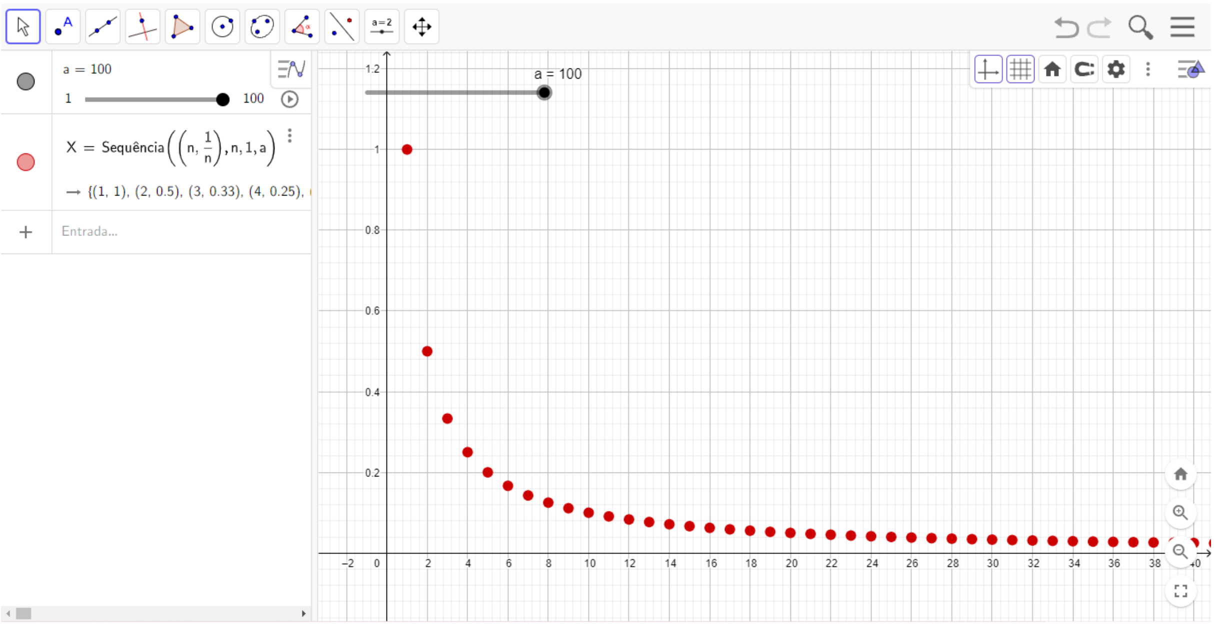
No livro "Curso de análise vol. 1", Lima (2019) conceitua sequência numérica da seguinte forma:

> Uma *sequência de números reais* é uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representado por x_n e chamado o *termo de ordem* n, ou n-*ésimo termo* da sequência (LIMA, 2019, p. 70).

A notação (x_n) é a mais usada para designar uma sequência, mas também se escreve $(x_n)_{n \in N}$ ou $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$. O conjunto formado pelos termos da sequência será representando por $\{x_n\}$ ou $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

A Figura 1 ilustra o comportamento da sequência numérica (x_n) dada por $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$, a qual possui como termo geral $x_n = \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Figura 1: Comportamento da sequência dada por $x_n = \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.



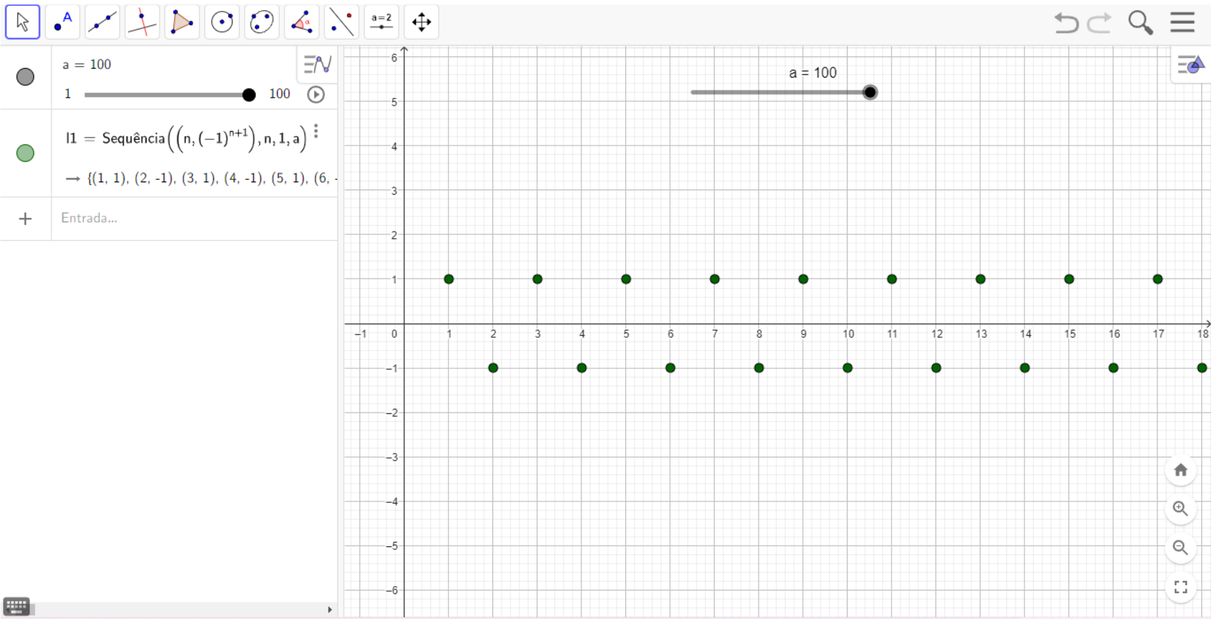
Fonte: Elaboração Própria, 2022.

Como podemos observar na imagem acima, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomado no eixo das abscissas, temos um valor real correspondente no eixo das ordenadas, o qual é calculado através do termo geral $x_n = \frac{1}{n}$. Por exemplo, se $n = 1$, logo $x_1 = \frac{1}{1} = 1$, para $n = 2$, tem-se $x_2 = \frac{1}{2}$ e assim sucessivamente, formando o conjunto de termos $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$, os quais estão sendo representados pelos pontos vermelhos da Figura 1.

É importante informar que no *software* GeoGebra é possível definir a quantidade de termos que queremos visualizar na janela gráfica, basta utilizar um controle deslizante e determinar o valor desejado. Em todo o trabalho, utilizamos o valor 100 (cem) para visualizar os cem primeiros termos de cada sequência numérica estudada.

Outro exemplo de sequência numérica é $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$, cujo termo geral é dado por $x_n = (-1)^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, para todo valor de $n \in \mathbb{N}$ atribuído no termo geral $x_n = (-1)^{n+1}$, o resultado sempre vai ser 1 ou -1, por exemplo, para $n = 1$ temos $x_1 = (-1)^2 = 1$, se $n = 2$, tem-se $x_2 = (-1)^3 = -1$ e assim sucessivamente. Resumidamente, caso n seja um natural par, o resultado é -1, mas, caso seja um natural ímpar, o resultado é 1. Logo, o conjunto formado pelos termos desta sequência é $\{1, -1\}$, veja a Figura 2.

Figura 2: Comportamento da sequência dada por $x_n = (-1)^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.



Fonte: Elaboração Própria, 2022.

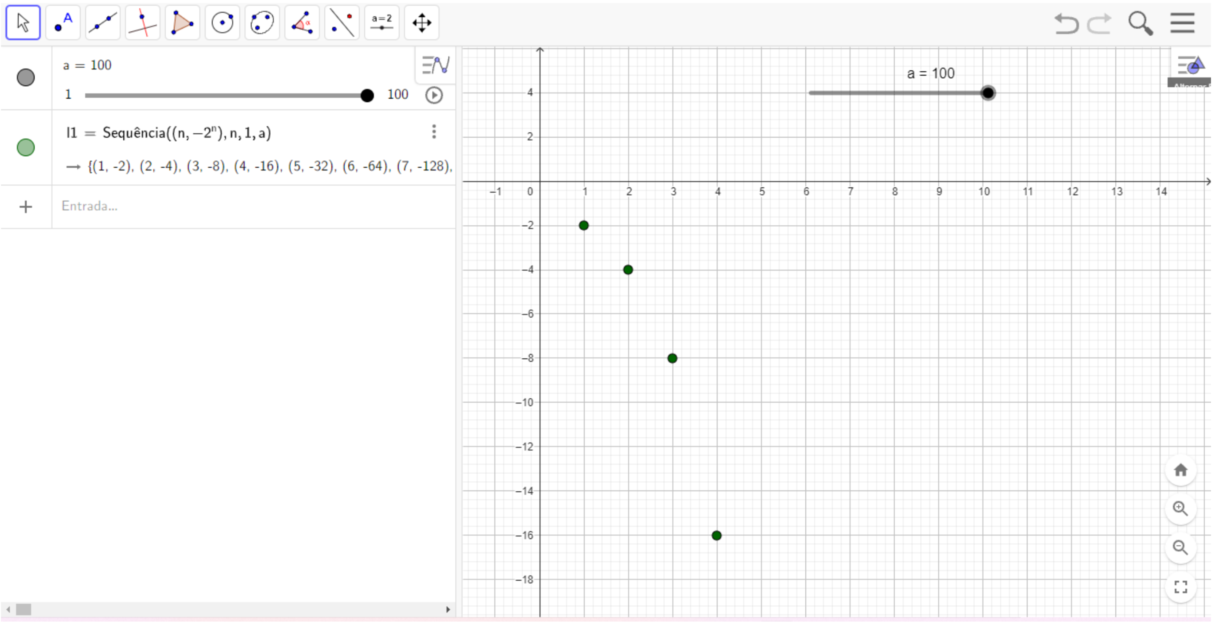
Lima (2019) diz que uma sequência (x_n) é limitada superiormente (respectivamente inferiormente) quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$), para todo $n \in \mathbb{N}$. E ainda que, uma sequência é dita limitada quando ela é limitada superiormente e inferiormente, o que equivale a dizer que existe $k \in \mathbb{R}$, tal que $|x_n| \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Considere a sequência numérica (x_n), onde $x_n = -2^n$. O conjunto de termos desta sequência é $\{\dots, -16, -8, -4, -2\}$, sendo assim, tem-se que

$$x_n \leq -2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

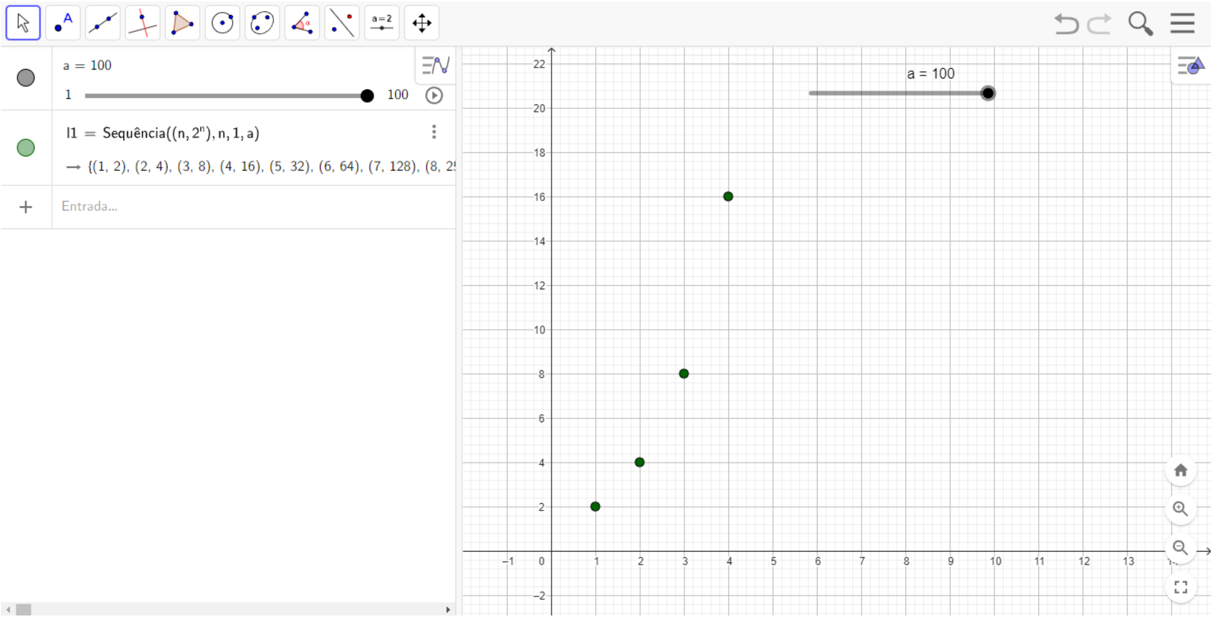
ou seja, qualquer outro elemento da sequência será menor que -2, veja a Figura 3, portanto, (x_n) é uma sequência limitada superiormente.

Figura 3: Comportamento da sequência dada por $x_n = -2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.



Fonte: Elaboração Própria, 2022.

Figura 4: Comportamento da sequência dada por $x_n = 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.



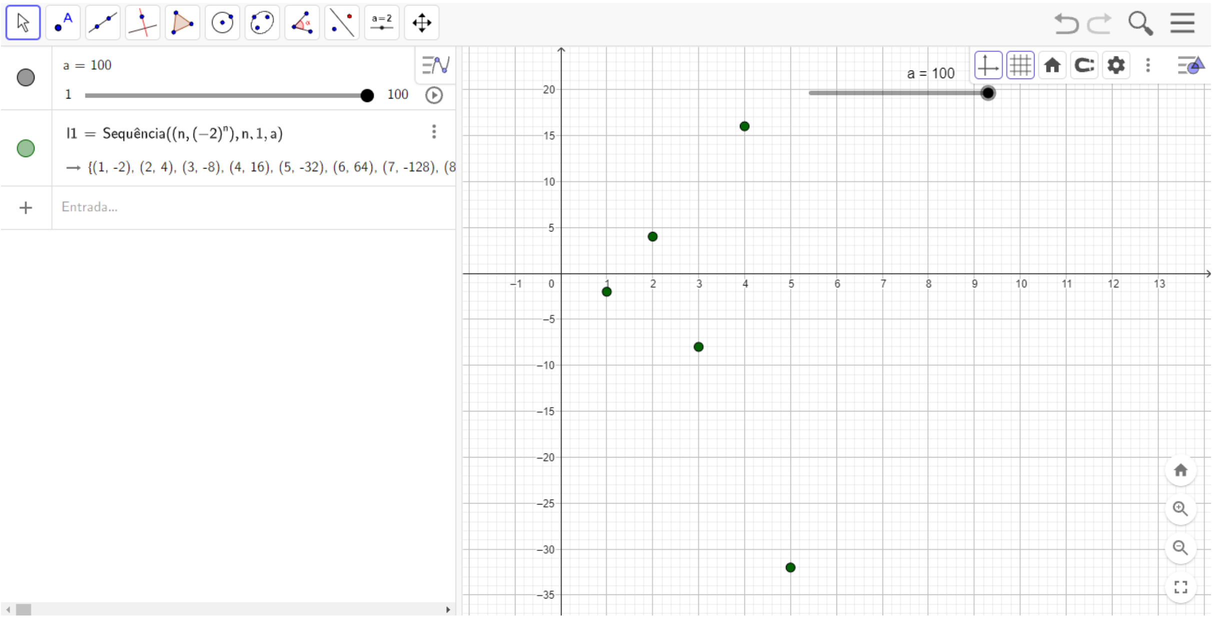
Fonte: Elaboração Própria, 2022.

Na figura 4, o conjunto de termos da sequência (x_n) é $\{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$, com isso obtém que $x_n \geq 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que nos resulta que qualquer outro elemento da sequência é maior que 2, logo, (x_n) é uma sequência limitada inferiormente, conforme mencionado anteriormente.

A sequência (x_n), onde $x_n = \frac{1}{n}$, ilustrada na Figura 1, é limitada, pois, $0 < x_n \leq 1$, assim, esta sequência (x_n) é limitada superiormente por 1 $(x_n \leq 1)$ e inferiormente por 0 $(x_n > 0)$. Do mesmo modo, a sequência da Figura 2 é limitada superiormente por 1 e inferiormente por -1. Nestes dois casos, podemos dizer somente que a sequência é limitada, que já fica subentendido que é limitada inferiormente e superiormente.

Por outro lado, "quando uma sequência (x_n) não é limitada, diz-se que ela é ilimitada" (LIMA, 2019, p. 70). Um exemplo de sequência ilimitada é ilustrado na figura abaixo.

Figura 5: Comportamento da sequência dada por $x_n = (-2)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.



Fonte: Elaboração Própria,2022.

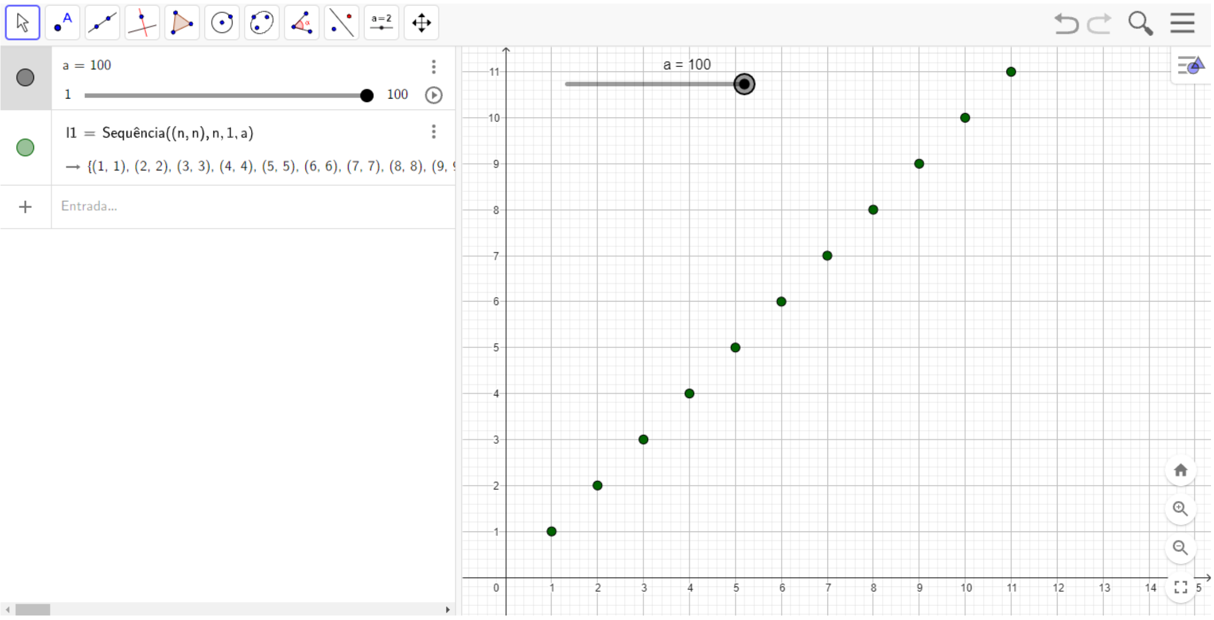
Na Figura 5, o conjunto de termos da sequência numérica dada por $x_n = (-2)^n$ é $\{\ldots, -130, -32, -8 - 2, 4, 16, 64, \ldots\}$. Ao observar o eixo das ordenadas, vemos que (x_n) não é limitada inferiormente e nem superiormente, logo, é ilimitada.

Lima (2019, p. 71) conceitua que "uma sequência (x_n) chama-se *crescente* quando $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$, isto é, quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se vale $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência diz-se *não-decrescente*".

Na Figura 6, tem-se $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$, e assim sucessivamente, logo, a sequência é $(1,2,3,4,5,6,\ldots)$, com isso, observa-se que $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$, conforme mostrado na figura acima. Portanto, a sequência em questão é crescente.

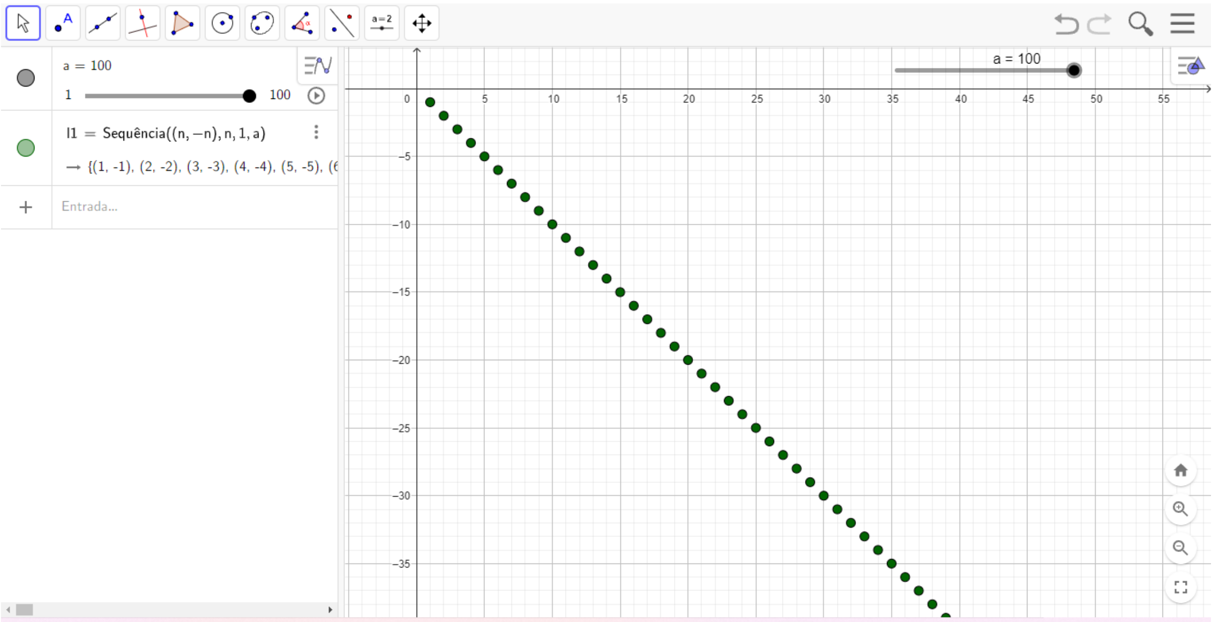
"Analogamente, quando $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$, ou seja, $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência (x_n) diz-se *decrescente*. Ela é chamada *não-crescente* quando $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$" (LIMA, 2019, p. 71). Um exemplo de sequência decrescente é a sequência cujo termo geral é dado por $x_n = -n$. Na Figura 7, à medida que n aumenta (eixo das abcissas), percebe-se que x_n diminui (eixo das ordenadas), ou seja, obtemos $x_1 = -1 > x_2 = -2 > x_3 = -3 > \cdots$.

Figura 6: Comportamento da sequência dada por $x_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.



Fonte: Elaboração Própria,2022.

Figura 7: Comportamento da sequência dada por $x_n = -n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.



Fonte: Elaboração Própria,2022.

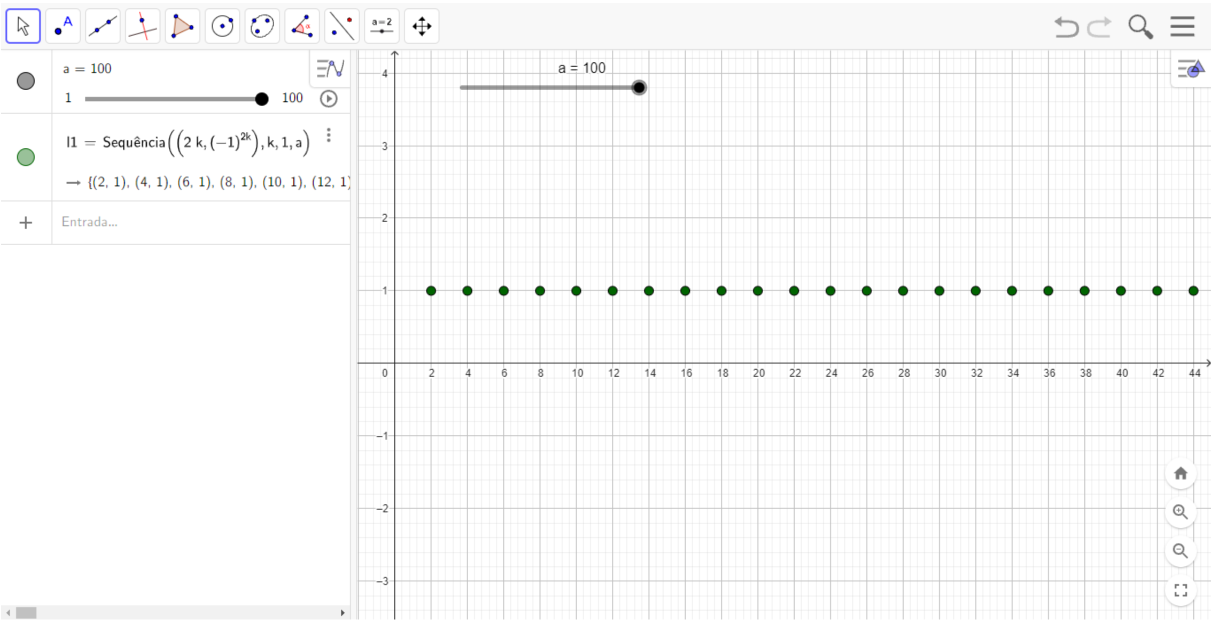
Quando temos sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes e não-crescentes, podemos também chamá-las de sequências monótonas.

Ao falarmos de sequência numérica, não poderíamos deixar de falar de subsequências. Segundo Lima (2019, p. 71),

> "Dada uma sequência $(x_n)_{n \in N}$ de números reais, uma subsequência de x é a restrição da função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_i < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. Escreve-se $x' = (x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, ou $(x_{n1,} x_{n2}, \dots, x_{ni}, \dots)$ ou $\left(x_{n_i}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ para indicar a subsequência $x' = x|_{\mathbb{N}'}$." (Lima, 2019, p. 71)

Considerando a sequência (x_n) tal que $x_n = (-1)^n$, vamos analisar dois subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ como índice desta sequência. Primeiramente, levando em conta os índices pares $n = 2k$, temos a subsequência dada por $x_{2k} = (-1)^{2k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, podemos observar na figura abaixo, que para todos os índices pares, os termos da subsequência são sempre iguais a 1.

Figura 8: Comportamento da subsequência dada por $x_{2k} = (-1)^{2k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

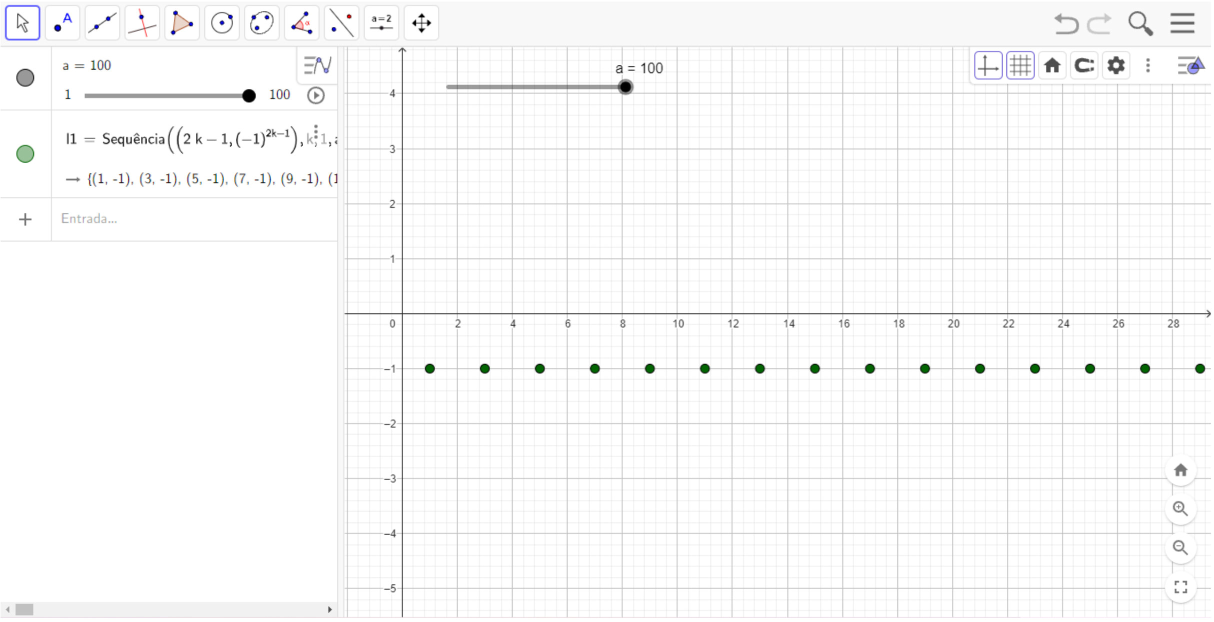


Fonte: Elaboração Própria,2022.

Do mesmo modo, considerando apenas os índices ímpares, isto é, fazendo $n = 2k - 1$, tem-se que $x_{2k-1} = (-1)^{2k-1}$ com $k \in \mathbb{N}$, assim, o conjunto de termos é $\{-1\}$, como podemos visualizar na Figura 9.

Foram escolhidas as subsequências com índices pares e ímpares, no entanto, poderia ser escolhida qualquer outra das infinitas subsequências de $x_n = (-1)^n$ como, por exemplo, a subsequência com $n = 3k$ (índices múltiplos de 3), ou $n = 5k$ (índices múltiplos de 5), ou $n = 10k$ (índices múltiplos de 10) e assim por diante.

Figura 9: Comportamento da subsequência dada por $x_{2k-1} = (-1)^{2k-1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.



Fonte: Elaboração Própria,2022.

Para finalizar, vamos falar de convergência e divergência de uma sequência. De acordo com Lima (2019), dizemos que uma sequência (x_n) converge para um número real L, quando $\lim_{x\to\infty} x_n = L$, ou seja, para cada número real arbitrário $\varepsilon > 0$, for possível obter um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - L| < \varepsilon, \text{ sempre que } n > n_0.$$

Podemos reescrever da seguinte maneira, uma sequência (x_n) converge para L, escreve-se $x_n \longrightarrow L$, se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ n > n_0 \Rightarrow\ L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon\ .$$

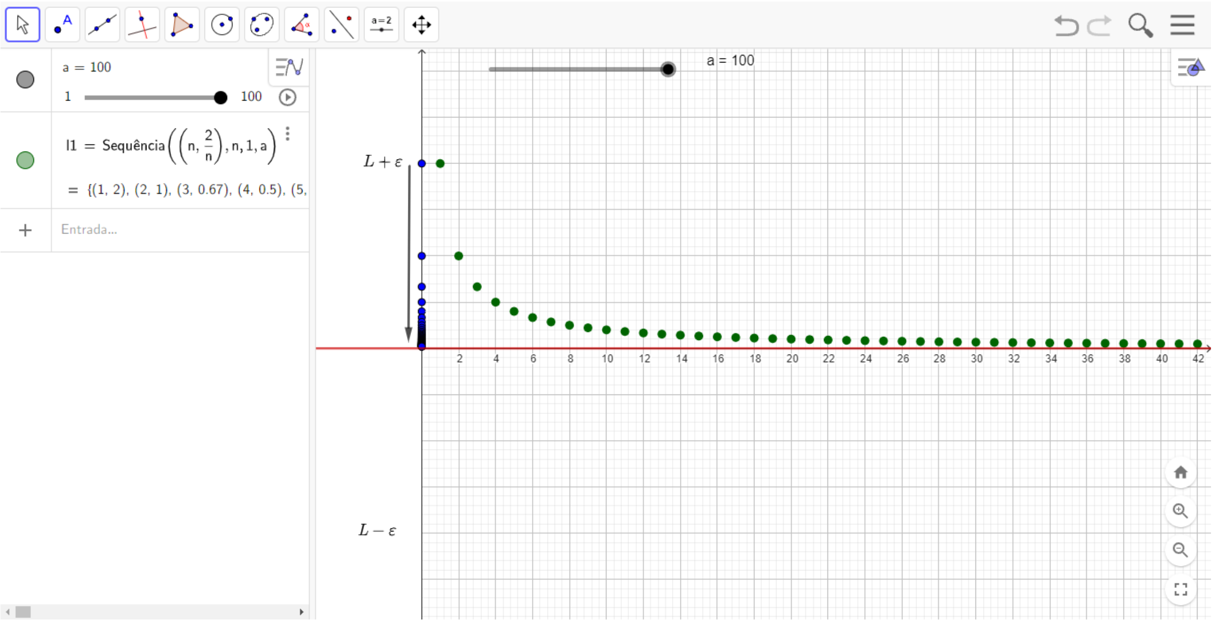
Explicando geometricamente a definição de sequência convergente, veja a Figura 10, observe que dada uma distância qualquer ε de L existe um índice n_0 determinado, tal que a partir desse n_0 todos os termos da sequência terão uma distância, em relação ao L, menor que o valor de ε. Agora, se (x_n) não é convergente, então dizemos que ela é divergente.

A sequência cujo termo geral é dado por $x_n = \frac{4n-3}{n}$ é um exemplo de sequência convergente. Para verificar para qual número essa sequência converge, basta calcular o limite de x_n quando n quando n tende ao infinito. Ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n-3}{n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n\left(4-\frac{3}{n}\right)}{n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(4-\frac{3}{n}\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} 4 - \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{3}{n} = 4.$$

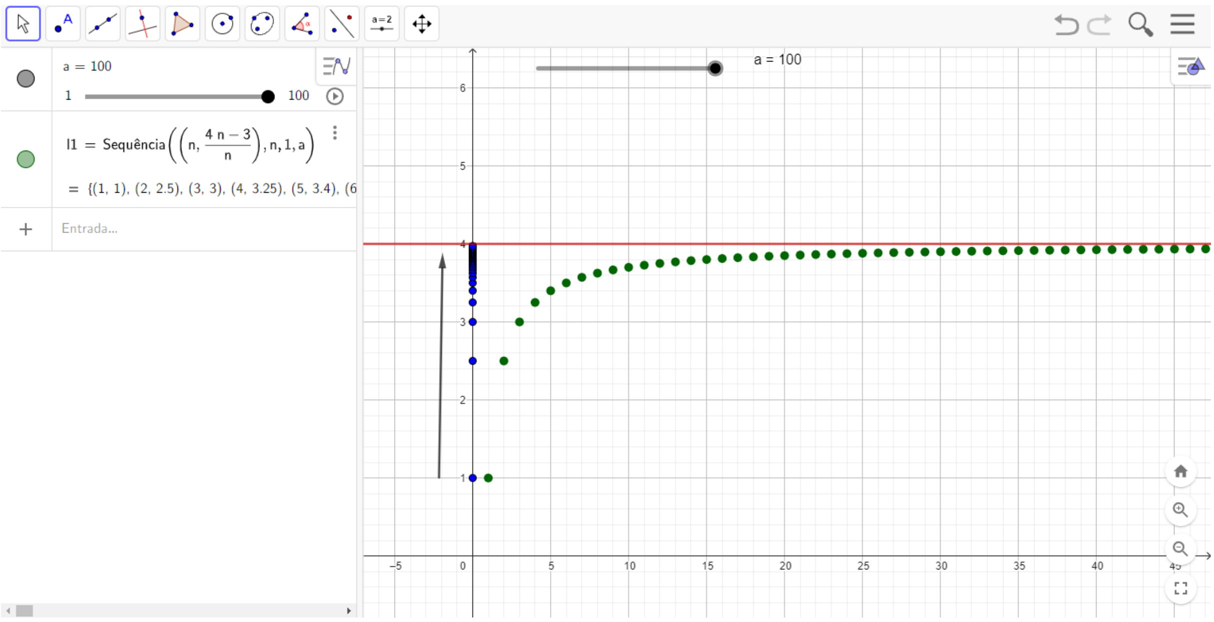
A partir deste resultado acima, podemos concluir que, para cada $\varepsilon > 0$, existe um inteiro correspondente $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\left|\frac{4n-3}{n} - 4\right| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$.

Figura 10: Definição de Sequência Convergente.



Fonte: Elaboração Própria,2022.

Figura 11: Sequência dada por $x_n = \frac{4n-3}{n}$ converge para 4.



Fonte: Elaboração Própria,2022.

Com a Figura 11 podemos visualizar que a sequência dada por $x_n = \frac{4n-3}{n}$ converge para 4, pois à medida que n aumenta no eixo das abscissas, o valor de x_n também aumenta no eixo das ordenadas, tornando-se cada vez mais próxima de 4.

Podemos visualizar também na figura 11 que a distância entre a sequência e 4 diminui, quando o índice aumenta, a definição $|x_n - L| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$, com real arbitrário $\varepsilon >$

0 e o número obtido $n_0 \in \mathbb{N}$, apartir daí vamos analisar a sequência $x_n = \frac{4n-3}{n}$, dado um $\varepsilon > 0$, tem-se:

$$|x_n - L| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{4n-3}{n} - 4\right| < \varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{4n-3-4n}{n}\right| < \varepsilon \Longrightarrow \left|-\frac{3}{n}\right| < \varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{3}{n}\right| < \varepsilon \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{n} < \varepsilon \Longrightarrow \frac{3}{\varepsilon} < n$$

Assim, para o $\varepsilon > 0$, em questão tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{3}{\varepsilon}$, logo:

$$n > n_0 \Longrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} \Longrightarrow \varepsilon > \frac{3}{n} \Longrightarrow \varepsilon > \left|\frac{3}{n}\right| \Longrightarrow \varepsilon > \left|-\frac{3}{n}\right| \Longrightarrow \varepsilon > \left|\frac{4n-3-4n}{n}\right| \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \varepsilon > \left|\frac{4n-3}{n} - 4\right| \Longrightarrow \varepsilon > |x_n - 4| \Longrightarrow x_n \longrightarrow 4$$

Portanto dado um $\varepsilon > 0$, se pegamos um $n_0 > \frac{3}{\varepsilon}$, com $n_0 \in \mathbb{N}$ então temos que, de fato, a sequência $x_n = \frac{4n-3}{n}$ converge para 4.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A disciplina de Análise Real, em particular o conteúdo de sequência numérica, é apresentada aos alunos, na maioria das vezes, de forma abstrata, o que pode acarretar dificuldades na absorção do conhecimento. Assim, diante da perspectiva em proporcionar uma alternativa de ensino que contribua para uma aprendizagem mais significativa de sequências numéricas, podemos inferir que a utilização do GeoGebra se constitui como uma possibilidade de recurso tecnológico para auxiliar no ensino de alguns conceitos de sequências numéricas.

É importante ressaltar que a proposta da utilização do *software* GeoGebra consiste em aplicá-lo de maneira complementar nas aulas de Análise Real, de modo que o aluno se sinta instigado a estudar a partir de outras estratégias de ensino, as quais despertem novos interesses pelos conteúdos matemáticos e pela aula ministrada.

Sabemos que a utilização de ferramentas tecnológicas nas aulas de matemática ainda não é muito bem aceita por alguns professores, no entanto, entende-se que é uma questão de estudo e tempo para o planejamento, bem como perceber que é uma maneira de atrair a atenção dos alunos durante as aulas, o que tornaria o momento mais interessante e dinâmico, visto que a tecnologia faz parte da realidade da geração atual.

REFERÊNCIAS

ADLER, I. **Matemática e desenvolvimento mental.** Tradução: Anita Rondon Berardinelli.São Paulo: Editora Cultrix, 1970.

ALVES, F. R. V. **Reconhecimento de padrões gráficos com o apoio do *software* geogebra: os casos da convergência pontual e uniforme.** Revista de educação, ciência e tecnologia, canoas, v.2, 2013.

ALVES, F. R. V.; NETO, H. B. **Interpretação geométrica de definições e teoremas: o caso da análise real.** Conferência Latinoamericana de Geogebra, Uruguay, 2012.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. **História da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino**. 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ea/a/6KryLd3HngCnBwJtWFHxSHj/?lang=pt>. Acesso em: 05 dez. 2022.

FARIAS, E. T. O professor e as novas tecnologias. In: ENRICONE, D. (Org.). **Ser Professor**. 4 ed. Porto Alegre: Edipucrs, 2004, p. 57-72. Disponível em: <https://aprendentes.pbworks.com/f/prof_e_a_tecnol_5%5B1%5D.pdf>. Acesso em: 19 dez. 2022.

GEOGEBRA. **Sobre o geogebra**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT> Acesso em: 05 dez. 2022.
KREMER, K. A. **Dificuldades na aprendizagem da matemática**. Monografia do Curso de Psicologia da Universidade Cândido Mendes. Rio de Janeiro, 2011.

LIMA, E. J; MARINHO, R. R.; NETTO, S. D. **Estudo da importância da disciplina de análise na prática do professor de matemática;** Revista práxis pedagógica, v.7, n.1. Porto velho, 2021.

LIMA, E. L. **Curso de análise**; v.1. 15 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

MAZZI, L. C. **Convergência de Sequências: uma abordagem com o software GeoGebra.** Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, v. 4, n. 1, p. 5–17, 2015. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/23049>. Acesso em: 18 dez. 2022.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática: propostas e desafios.** Belo Horizonte: Autêntica,2004.

SCHOENFELD, A. H. Heurísticas na sala de aula. In:KRULIK.S.;REYS,R.E.**A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: atual,1997.

NOLASCO, J. M. F.; MELO, J. R. **O GeoGebra e as suas contribuições para o ensino de geometria espacial na perspectiva dos professores de matemática**, Conjecturas, ISSN: 1657-5830, v.22, n.3, 2022.

PEREIRA, T. L. M. **O uso do software GeoGebra em uma escola pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio**. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAE TETUBA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ATA DA DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos 23 dias do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte e dois, em sala virtual do Google Meet, reuniram-se os membros da banca examinadora, abaixo-assinados, sob a presidência da Professora Dra. Suellen Cristina Queiroz Arruda, com a finalidade de examinar o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) da aluna **FRANCISCA SACRAMENTO GONÇALVES** do Curso de Licenciatura em Matemática do supramencionado Campus, sob o título **A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NO ENSINO DE ANÁLISE REAL: uma proposta para a aprendizagem de sequências numéricas.**

A sessão teve início às 10:40h horas e foi encerrada às 12: 05h. Após a exposição da aluna, houve arguição dos membros da banca examinadora seguido de resposta da aluna. Em seguida, a banca reuniu-se para deliberar sobre o conceito atribuído ao TCC. Por consenso, a banca examinadora decidiu:

( ) Não aprovar

(X) Aprovar com o conceito EXCELENTE.

Aprovar com o conceito EXCELENTE e recomendações para a revisão dos seguintes pontos: **Corrigir alguns erros ortográficos, figuras e conceitos; Inserir um parágrafo para descrever o comportamento de sequência convergente.**

Obs.: Caso o trabalho seja aprovado com recomendações de revisão, o(a) aluno (a) dispõe de **10 (dez)** dias para dar forma final ao trabalho e entregar em CD no formato digital em PDF na Biblioteca do Campus Universitário de Abaetetuba, após anuência da banca examinadora.

Abaetetuba (PA), 23 de dezembro de 2022.

Suellen Cristina Q. Arruda

Profa. Dra. Suellen Cristina Queiroz Arruda
Presidente/Orientadora - FACET/CUBT/UFPA

Laila Conceição Fontinele

Profa. Dra. Laila Conceição Fontinele
Membro Interno – FACET/CUBT/UFPA

Genivaldo dos Passos Corrêa

Prof. Dr. Genivaldo dos Passos Corrêa
Membro Interno – FACET/CUBT/UFPA