UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

LEANDRO FURTADO DE SANTANA

MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL DA DINÂMICA POPULACIONAL: uma abordagem por Equações Diferenciais no software scilab

ABAETETUBA-PA
2025

LEANDRO FURTADO DE SANTANA

MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL DA DINÂMICA POPULACIONAL: uma abordagem por Equações Diferenciais no software scilab

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus Universitário de Abaetetuba, Universidade Federal do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Rômulo Correa Lima.

ABAETETUBA-PA
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S231m Santana, Leandro Furtado de.
MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL DA DINÂMICA POPULACIONAL : uma abordagem por Equações Diferenciais no software scilab / Leandro Furtado de Santana. — 2025.
25 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Rômulo Correa Lima
Trabalho de Conclusão (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de Matemática, Abaetetuba, 2025.

1. Equações diferenciais. 2. Dinâmica populacional. 3. Modelagem matemática. 4. Previsão demográfica. I. Título.

CDD 511.8

LEANDRO FURTADO DE SANTANA

MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL DA DINÂMICA POPULACIONAL: uma abordagem por Equações Diferenciais no software scilab

Trabalho de Conclusão de Curso orientado pelo Prof. Dr. Rômulo Correa Lima, apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção de grau de licenciado em Matemática.

Aprovado em: 28/02/2025.

BANCA EXAMINADORA

Rômulo Correa Lima

Prof. Dr. Rômulo Correa Lima
Orientador – FACET/CABAE/UFPA

Manuel de Jesus dos S. Costa

Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa
Membro – FACET/CABAE/UFPA

Genivaldo dos Passos Corrêa

Prof. Dr. Genivaldo dos Passos Correa
Membro – FACET/CABAE/UFPA

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por me sustentar em cada etapa dessa jornada, iluminando meu caminho e fortalecendo minha fé para alcançar este objetivo.

À minha família, o meu mais sincero e profundo agradecimento, especialmente aos meus avós, que foram meus pais, minha base e minha inspiração em cada momento. O amor, os ensinamentos e o apoio incondicional que recebi de vocês foram fundamentais para a realização deste sonho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rômulo Correa Lima, expresso minha eterna gratidão por toda a orientação, paciência e companheirismo ao longo deste trabalho e dos projetos de iniciação científica e dos trabalhos apresentados que juntos construímos. Suas valiosas contribuições acadêmicas e sua dedicação foram essenciais para o meu crescimento pessoal e profissional.

Ao Prof. Dr. Reinaldo Feio Lima, registro meu agradecimento pela orientação, parceria e colaboração nos projetos, pesquisas e publicações realizadas na área de Educação Matemática, especialmente no âmbito da Educação Especial. Suas contribuições foram fundamentais para ampliar minha visão e fortalecer minha atuação acadêmica e profissional.

Ao Programa Institucional de Bolsa de Iniciação Científica (PIBIC), à Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisas (FAPESPA) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), manifesto minha gratidão pelo financiamento dos projetos de pesquisa que desenvolvi ao longo do curso. Sem esse suporte, muitos dos resultados alcançados não seriam possíveis.

Aos meus amigos de turma, por cada momento compartilhado, pelos aprendizados mútuos e pela amizade que tornou esta caminhada mais leve e significativa.

A todos que, de alguma forma, fizeram parte dessa trajetória, o meu muito obrigado.

“A matemática pura, em sua forma mais bela, encontra sua glória quando aplicada ao mundo real”

(Nikolal Lobochevsky)

“A matemática não é apenas um conjunto de números, mas a linguagem com qual o universo escreve sua história”

(Galileu Galilei)

Lista de Figuras

Figura 1 – Diagrama de dispersão: crescimento populacional Brasileiro. 18
Figura 2 – Projeção malthusiana da população brasileira. 19
Figura 3 – Projeção logística da população brasileira. 20
Figura 4 – Comparação entre a população real e os modelos matemáticos. 22

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Censos demográficos do Brasil de 1940 a 2023. 17
Tabela 2 – População real brasileira em comparação com os modelos matemáticos. 21
Tabela 3 – Estimativa futura da população brasileira até 2100. 22

Sumário

1 INTRODUÇÃO **10**

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS **11**

2.1 Classificação pelo tipo 12

2.1.1 Equação diferencial ordinária (EDO) 12

2.1.2 Equações diferencias parciais (EDP) 12

2.2 Classificação pela ordem e grau 12

2.3 Classificação quanto à linearidade 13

2.3.1 Equação diferencial linear 13

2.3.2 Equação Diferencial Não-Linear 13

2.4 Solução de equações diferenciais 14

2.4.1 Problema de valor inicial (PVI) 14

3 MODELAGEM MATEMÁTICA POPULACIONAL **15**

3.1 Modelo de Malthus 15

3.2 Modelo logístico 16

4 RESULTADOS **17**

4.1 Aplicação do modelo de Malthus 18

4.2 Aplicação do ajuste logístico 19

4.3 Análise dos modelos 20

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS **23**

REFERÊNCIAS **24**

IX EPAMM
18 a 19 OUTUBRO 2024
UFPA - BELÉM
IX EPAMM
ENCONTRO PARAENSE DE MODELAGEM MATEMÁTICA
MODELAGEM MATEMÁTICA: INTERLOCUÇÕES DE MÚLTIPLOS SABERES NO MUNDO CONTEMPORÂNEO

MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL DA DINÂMICA POPULACIONAL: uma abordagem por Equações Diferenciais no software scilab

Leandro de Santana
UFPA - Campus Universitário de Abaetetuba
leafursan@gmail.com

Sérgio Silva Santos
UFPA - Campus Universitário de Abaetetuba
sergiosilvasantos2612@gmail.com

Prof. Dr. Rômulo Corrêa Lima
UFPA - Campus Universitário de Abaetetuba
rcl@ufpa.br

Resumo:
O estudo das dinâmicas populacionais é fundamental para o planejamento e desenvolvimento político-econômico, permitindo previsões e análises que otimizam processos ao longo do tempo. Nesse contexto, as Equações Diferenciais desempenham um papel crucial na construção e aprimoramento de modelos matemáticos que representam essas dinâmicas. Este trabalho teve como objetivo prever a variação da população brasileira, analisando o comportamento passado e identificando variáveis que influenciam o futuro, utilizando os modelos de Malthus, Verhulst. A pesquisa adotou uma abordagem qualitativa e quantitativa, com base em análises documentais e bibliográficas dos modelos matemáticos, incluindo simulações de cenários populacionais futuros para o Brasil

Palavras-chaves: Equações diferenciais. Dinâmica populacional. Modelagem matemática. Previsão demográfica.

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho, desenvolvido no âmbito do Programa Institucional do Bolsa de Iniciação Científica (PIBIC), surge da necessidade de compreender e analisar os processos que regem o crescimento e a evolução das populações em diferentes contextos. Por meio da aplicação de ferramentas matemáticas e computacionais, buscou-se investigar e modelar a dinâmica populacional, considerando fatores como taxas de natalidade, mortalidade, migração e interações ambientais.

Este estudo se insere no campo da demografia matemática, que utiliza modelos quantitativos para descrever e prever o comportamento das populações ao longo do tempo.

A combinação da modelagem matemática com a computação permite não apenas a análise teórica, mas também a simulação e visualização dos resultados, proporcionando compreensões valiosas para a formulação de políticas públicas e estratégias de desenvolvimento sustentável.

Ao longo deste trabalho, explorara-se os modelos matemáticos de equações diferencias proposto por Malthus e o modelo logístico, para descrever o crescimento populacional e suas limitações. Além disso, utilizou-se códigos desenvolvidos ao longo da pesquisa no software *Scilab* como uma ferramenta computacional para realizar cálculos, gerar gráficos e validar os modelos propostos, permitindo uma abordagem interdisciplinar e abrangente da dinâmica populacional.

Por meio da integração entre a modelagem matemática e a computação, este estudo visa contribuir para o avanço do conhecimento científico na área da dinâmica populacional, fornecendo compreensões relevantes para a tomada de decisões informadas e a implementação de políticas eficazes no campo da demografia e do desenvolvimento socioeconômico.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações diferenciais são uma ferramenta matemática essencial para descrever o comportamento de sistemas dinâmicos em diversas áreas da ciência e engenharia, essas equações contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes. Elas fornecem uma linguagem precisa para modelar fenômenos que mudam com relação à uma variável independente, como o crescimento populacional, o movimento de corpos em física, a difusão de substâncias químicas e muito mais. A capacidade de resolver equações diferenciais permite prever o comportamento futuro desses sistemas e entender melhor os mecanismos subjacentes aos processos naturais e artificiais (Nóbrega, 2016; Santos, [s/d]).

Definição 1

Chama-se ***equação diferencial*** *a uma equação em que a incógnita é uma função (variável dependente) de uma ou mais variáveis (independentes), envolvendo derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes (Zill,* *2016).*

As equações diferenciais são comumente classificadas de acordo com três aspectos fundamentais: tipo, ordem e linearidade (Vilhena, 2014; Zill, 2016).

2.1 Classificação pelo tipo

O tipo de equação diferenciais pode ser ordinária (EDO) ou parcial (EDP), dependendo se envolve derivadas em relação a uma única variável independente ou mais de uma variáveis independentes, respectivamente.

2.1.1 Equação diferencial ordinária (EDO)

Definição 2

*Diz-se **equação diferencial ordinária (EDO)**, uma equação que envolve apenas derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a **uma única** variável independente (Vilhena, 2014; Zill, 2016).*

2.1.2 Equações diferencias parciais (EDP)

Definição 3

*Diz-se **equação diferencial parcial (EDP)**, uma equação que envolve derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a **mais de uma** variável independente (Nóbrega, 2016; Vilhena, 2014; Zill, 2016).*

2.2 Classificação pela ordem e grau

Definição 4

*A **ordem** de uma equação diferencial é determinada pela derivada de maior ordem presente nela (Nóbrega, 2016; Vilhena, 2014; Zill, 2016).*

Definição 5

*O **grau** de uma equação diferencial é determinado pelo maior expoente ao qual a derivada de maior ordem está elevada (Vilhena, 2014).*

Neste sentido, a forma geral de uma equação diferencial ordinária de n-ésima, pode ser apresentada como

$$F\left(x, y\frac{dy}{dx}, \frac{d^2x}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \tag{1}$$

E de uma equação diferencial parcial de n-ésima ordem é

$$F\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^4 y}{\partial y^4}, \cdots, \frac{\partial^n y}{\partial z^n}\right) = 0 \tag{2}$$

2.3 Classificação quanto à linearidade

As equações diferenciais, classifica-se em linear e não-linear.

2.3.1 Equação diferencial linear

Definição 6

*Diz-se **equação diferencial linear** é uma equação que envolve uma função desconhecida e suas derivadas aparecem apenas de forma linear, ou seja, elevadas à primeira potência e sem multiplicação entre elas (Nóbrega, 2016; Vilhena, 2014; Zill, 2016).*

Essas equações podem ser escritas na forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{d^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{3}$$

Observação 2.1 *Para ser **equação linear**, tem que satisfazer as seguintes propriedades:*

i A variável dependente e todas as suas derivadas são de primeiro grau; Isto é, cada valor envolvendo a mesma só pode está elevado a primeira potência;

ii Cada coeficiente depende apenas de uma variável independente.

2.3.2 Equação Diferencial Não-Linear

Definição 7

*Diz-se **equação não-linear**, as equações que não satisfazem as propriedades das equações lineares.*

2.4 Solução de equações diferenciais

Definição 8

Diz-se ***solução de uma equação diferencial****, qualquer função ϕ, definida em um intervalo I, que tem pelo menos n derivadas contínuas e, que quando substituída em uma equação, reduz a equação a uma identidade (Zill, 2016).*

Neste seguimento, a solução de uma equação diferencial é uma um equação de ordem n no qual

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \cdots, \phi^{(n)}(x)) = 0, \tag{4}$$

para todo $x \in I$. A solução mais geral possível que admite uma equação diferencial é denominada solução geral, enquanto que outra solução é chamada uma solução particular.

2.4.1 Problema de valor inicial (PVI)

Definição 9

Defini-se ***problema de valor inicial (PVI)****, um tipo de problema que envolve equações diferenciais juntamente com condições iniciais para a função desconhecida (Nóbrega, 2016; Zill, 2016).*

Em outras palavras, consiste na solução de **(EDO's)** de primeira ordem, que podem ser definidas em um intervalo I, de forma que o gráfico de f passe por (x_0, y_0). Neste sentido, determina-se que para

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{5}$$

o objetivo é encontrar a solução da equação diferencial que satisfaça as condição inicial $y(x_0) = y_0$. Onde, $x_0 \in I$, e $y_0 \in \mathbb{R}$ (Nóbrega, 2016; Zill, 2016).

Neste sentido, uma equação diferencial acompanhado de uma condição inicial caracteriza-se em **problema de valor inicial (PVI)**. Ou seja,

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} . \tag{6}$$

3 MODELAGEM MATEMÁTICA POPULACIONAL

A modelagem matemática "é o conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões" (Burak, 1987, p. 21). Neste sentido, a modelagem matemática é

> um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (Bassanezi, 2002, p. 24).

Deste modo, a modelagem matemática desempenha um papel crucial na dinâmica populacional, pois permite a compreensão e a previsão de padrões de crescimento e declínio das populações ao longo do tempo. Essa capacidade de prever tendências populacionais é fundamental para planejar recursos, desenvolver estratégias de saúde pública, gerenciar ecossistemas e até mesmo formular políticas econômicas. Em essência, a modelagem matemática oferece uma ferramenta poderosa para interpretar e antecipar as mudanças nas populações, contribuindo para a tomada de decisões informadas e eficazes.

3.1 Modelo de Malthus

O modelo de Malthus é uma teoria desenvolvida pelo economista e demógrafo britânico Thomas Malthus (1766-1834) no final do século XVIII e início do século XIX. Ao descrever pela primeira vez a dinâmica populacional em linguagem matemática, partiu do pressuposto de que a variação populacional (dP) em relação ao tempo (dt) é proporcional ao seu tamanho em cada instante (P). Nesse contexto, foi adotada a premissa da existência de um coeficiente de crescimento ou decrescimento, denotado por r, o qual é determinado pela discrepância entre as taxas de natalidade e mortalidade de uma população específica (Biffi, 2018; Eisermann, 2019).

Deste modo, o modelo de Malthus, que é dado por:

$$\frac{dP}{dt} = r\,P. \tag{7}$$

Resolvendo a equação (7) analiticamente e, aplicando o método de separação de variáveis, obtém-se que, a solução analítica do modelo de Malthus é

$$P(t) = P_0 e^{rt}. \tag{8}$$

Ao analisar a função, nota-se que dado $P_0 \geq 0$ e, ter um coeficiente $r > 0$, a população cresce infinitamente, isto é $\lim_{t \to \infty} P(t) = +\infty$. Ademais, se $r < 0$, a população tenderá a 0, o que levaria a extinção (Eisermann, 2019).

Por se tratar de uma função exponencial (8), Sua teoria é baseada na ideia de que a população cresce em uma taxa exponencial, enquanto os recursos naturais e a oferta de alimentos crescem em uma taxa linear. Portanto, em algum momento, a população irá ultrapassar a capacidade de recursos disponíveis, resultando em uma crise de fome e desigualdade (Bassanezi, 2002; Biffe, 2018; Eisermann, 2019).

3.2 Modelo logístico

Criado por Pierre Françõis Verhulst em 1837, o ajuste logístico tem por finidade modelar o crescimento de populações ao logo do tempo, levando em conta fatores que possar influenciar nesse crescimento, resolvendo o problema da infinidade do modelo malthusiano. O matemático postulou que a população deve crescer até atingir um limite máximo K, o qual é sustentável pelo ambiente e ao qual a população tende a se estabilizar (Bassanezi, 2002). Algebricamente é

$$\frac{dP}{dt} = r\left(1 - \frac{P}{K}\right)P. \tag{9}$$

fazendo uso do método de separação de variáveis e integrando em relação ao tempo, tem-se como solução do ajuste logístico tem-se a seguinte expressão

$$P(t) = \frac{K\,P_0}{(K - P_0)e^{-r\,t} + P_0} = \frac{K}{\left(\frac{K}{P_0} - 1\right)e^{-r\,t} + 1}. \tag{10}$$

Nota-se que, diferente do modelo de Malthus, A ideia do modelo logístico é que, à medida que uma população cresce, ela encontra uma série de fatores limitantes, onde o mesmos fazem com que o crescimento populacional desacelere e, eventualmente, se estabilize em um nível máximo, que é conhecido como capacidade de suporte. A equação logística foi desenvolvida para modelar esse processo de crescimento limitado, ou seja, a mesma é uma função sigmóide que descreve um crescimento exponencial inicial, seguido por uma desaceleração gradual até atingir o ponto de saturação, onde a taxa de crescimento é zero (Camarano, 2014; Eisermann, 2019; Tavoni, 2013).

4 RESULTADOS

Ao investigar o crescimento populacional no Brasil, nota-se que há uma trajetória significativa ao longo do século XX e início do XXI, marcada por uma rápida expansão demográfica. Esse fenômeno foi impulsionado principalmente por uma alta taxa de natalidade e pela imigração, resultando em um aumento substancial da população (IBGE, 2024). O último censo demográfico realizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em 2023 registrou os seguintes dados:

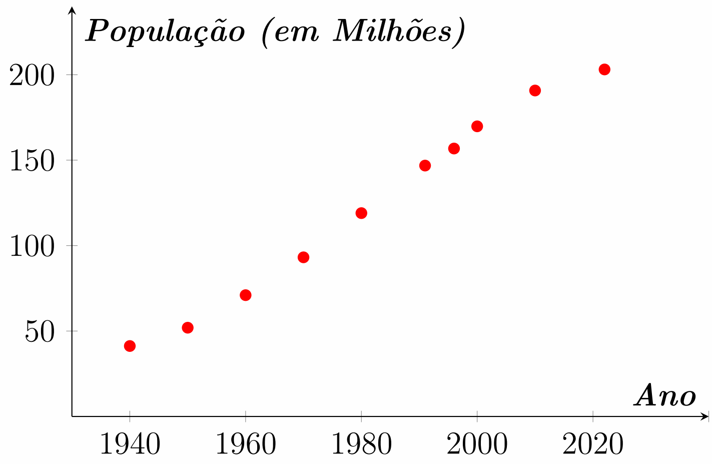
Tabela 1: Censos demográficos do Brasil de 1940 a 2023.

Período (em ano)	Censo (em milhões)
1940	41.236
1950	51.944
1960	70.993
1970	93.139
1980	119.003
1991	146.825
1996	156.804
2000	169.799
2010	190.756
2022	203.081

Fonte: Adaptado de (Bassanezi, 2002; IBGE, 2024).

Uma vez de posse desses dados, foi possível ter uma visão melhor de como se da o crescimento populacional em decorrência do tempo. Na figura 1, é possível visualizar graficamente os dados da tabela 1 em um diagrama de dispersão.

Figura 1: Diagrama de dispersão: crescimento populacional Brasileiro.



Fonte: Autoria própria.

4.1 Aplicação do modelo de Malthus

Ao observa os dados da população brasileira na tabela 1, adotamos o tempo t em anos a partir do ano de 1940, onde $P_0 = 41,236$ e $P_1 = 51,944$. Neste sentido, utiliza-se a forma analítica do modelo, onde a partir dos procedimentos necessário, mostram que:

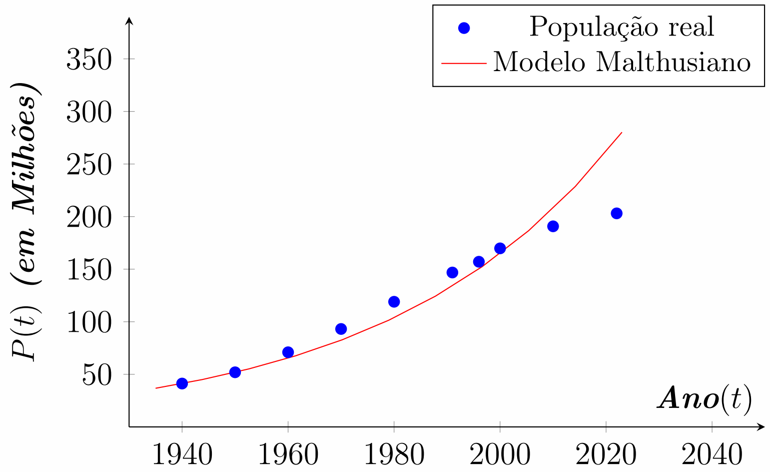
$$\begin{aligned} P_1 =& P_0 \cdot e^{r \cdot t_1}, \qquad (11) \\ 51,944 =& 41,236 \cdot e^{r \cdot 10}, \\ r =& \frac{0,2309}{10} \cong 0,02309. \end{aligned}$$

Com o coeficiente r definido, a função malthusiana que se ajustará as variação populacional em função do tempo é

$$P(t) = 41,236 \cdot e^{0,02309 \cdot t}. \qquad (12)$$

Deste modo, com o senso mostrado na tabela 1 e a função (12) tem-se o gráfico 2, que mostre o ajuste malthusiano.

Figura 2: Projeção malthusiana da população brasileira.



Fonte: Autoria própria.

4.2 Aplicação do ajuste logístico

O modelo logístico pressupõe, que a taxa r decai linearmente, em função da população. Neste sentido, ajusta-se os valores r_i(taxa consecutiva de crescimento i e $i+1$) médios, com a perspectivas de população p_i (estimativas do modelo exponencial), onde

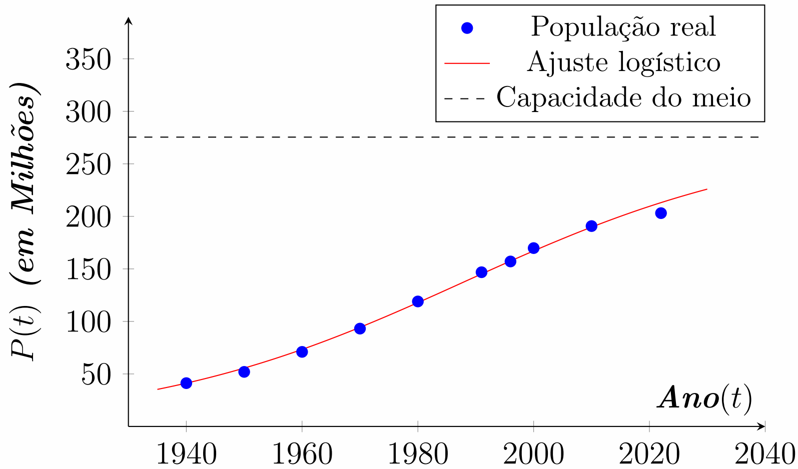
$$r_i = \left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right)^{\frac{1}{t}} - 1. \tag{13}$$

Neste processo, calcula-se os seguintes parâmetros individuas r_i e P_i médios pelo modelo exponencial dado na equação (8). Considerando P_i em milhões de habitantes, a equação logística será dada por

$$P(t) = \frac{275.443}{5,680 \cdot e^{-0,0362(t-1940)} + 1}. \tag{14}$$

Onde, $K = 275,443$ é a população limite e, $5,680 = \dfrac{K}{P_0} - 1$, considerando $P_0 = P(1940) = 41,236$ (Bassanezi, 2002; Eisermann, 2019).

Figura 3: Projeção logística da população brasileira.



Fonte: Autoria própria.

Em síntese, aos parâmetros observados, tem-se a figura 3, onde apresenta-se o ajuste logístico nos dados observados (Bassanezi, 2002; Silva, 2021).

4.3 Análise dos modelos

A análise comparativa entre os dados reais da população brasileira e as estimativas pelos modelos de Malthus e Verhulst, desempenham um papel crucial na avaliação e validação dos modelos observados. O foco se da a partir da identificação da margem de erro associada a função e na proximidade com os dados reais, pois quando mais aproximada desses dados, melhor a confiabilidade no modelos.

Neste viés, na tabela 2, é apresentada os dados da população real, estimativa pelos modelos e o cálculo do erro. Para estimar o erro entre as projeções oficiais e as projeções calculadas pelos modelo malthusiano e logístico, podemos utilizar a equação:

$$\text{Erro} = \left| \frac{\text{Projeção calculada} - \text{Projeção oficial}}{\text{Projeção oficial}} \right| \tag{15}$$

Tabela 2: População real brasileira em comparação com os modelos matemáticos.

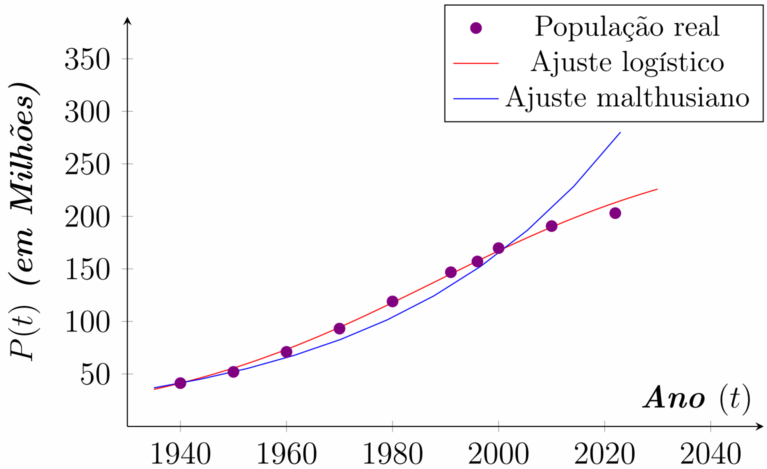
Ano	População brasileira real (em milhões)	População via ajuste Malthusiano (em milhões)	Erro	População via ajuste Logístico (em milhões)	Erro
1940	41,236	41,236	0,0%	41,236	0,00%
1950	51,944	51,946	0,0%	55,580	7,00%
1960	70,993	65,439	7,8%	73,351	3,32%
1970	93,139	82,435	11,5%	94,365	1,32%
1980	119,003	103,846	12,7%	117,888	0,94%
1991	146,825	133,874	8,8%	145,141	1,15%
1996	156,804	150,258	4,2%	157,465	0,42%
2000	169,799	164,797	2,9%	167,106	1,59%
2010	190,756	207,600	8,8%	189,760	0,52%
2022	203,081	273,880	34,9%	213,102	4,93%
$\sum$	1.243,580	1.275,311	91,69%	1.254,993	21,19%

Fonte: Autoria própria.

Os dados apresentados na tabela 2 comparam a população real brasileira com as populações estimadas pelos modelos Malthusiano e Verhulst de 1940 a 2022. O modelo Malthusiano, que assume um crescimento exponencial, apresenta uma precisão inicial alta com erros de 0,0% em 1940 e 1950, mas a acurácia diminui significativamente ao longo do tempo, chegando a um erro de 34,9% em 2022. Em contraste, o modelo Verhulst, que considera a limitação de recursos e prediz um crescimento sigmoidal, mostra uma precisão maior e mais consistente. Este modelo apresenta um erro de 0,0% em 1940 e 7% em 1950, mantendo uma alta precisão com erros próximo de 1% em várias décadas, e atingindo 4,93% em 2022. No total, o erro acumulado do modelo Verhulst é de 21,19%, significativamente menor que o do modelo Malthusiano, que é de 91,69%.

Esses resultados indicam que o modelo Verhulst é mais adequado para prever o crescimento populacional do Brasil, especialmente em períodos recentes onde o crescimento se estabiliza devido a fatores limitantes, enquanto o modelo Malthusiano falha em capturar essa dinâmica. Na figura 4, apresenta-se a comparação gráfica entre os dados reais e os modelos matemáticos utilizados, facilitando a análise e interpretação dos resultados, com identificação das curvas de cada modelo.

Figura 4: Comparação entre a população real e os modelos matemáticos.



Fonte: Autoria própria.

Com base nos dados observados, a população do Brasil tem mostrado um crescimento significativo ao longo das décadas, partindo de aproximadamente 41 milhões em 1940 para mais de 200 milhões em 2022. Utilizando os modelos matemáticos de crescimento populacional, podemos fazer projeções futuras. O modelo de crescimento logístico prevê que a população eventualmente se estabilizará devido a fatores limitantes, enquanto o modelo de crescimento malthusiano prevê um crescimento contínuo. A seguir, apresenta-se a tabela 3 com as estimativas da população brasileira para cada década, até o ano de 210, segundo ambos os modelos.

Tabela 3: Estimativa futura da população brasileira até 2100.

Ano	**Ajuste Malthusiano** (em milhões)	**Ajuste Logístico** (em milhões)
2030	329,446	225,952
2040	415,014	238,985
2050	522,807	248,988
2060	658,597	256,464
2070	829,656	261,942
2080	1045,146	265,898
2090	1316,605	268,725
2100	1658,571	270,729

Fonte: Autoria própria.

De acordo com o modelo logístico, a população brasileira está projetada para se aproximar de sua capacidade limite de aproximadamente 275,443 milhões por volta do ano 2170. Este modelo sugere que o crescimento populacional gradualmente desacelera à medida que se aproxima dessa capacidade, refletindo fatores limitantes como recursos disponíveis e outras restrições ambientais e sociais. Assim, a estabilização da população é esperada dentro deste período, ao contrário do modelo malthusiano que continua a prever crescimento exponencial sem considerar esses limites.

A análise comparativa entre os modelos de Malthus e Verhulst aplicados à população brasileira, conforme representado na figura 4, revela que o modelo logístico se mostra mais congruente com os dados observados. Este resultado implica que a dinâmica populacional do Brasil é melhor descrita por um modelo que incorpora limitações intrínsecas ao crescimento populacional, como a capacidade de suporte do ambiente, do que por um modelo malthusiano, que pressupõe um crescimento populacional estritamente exponencial sem considerar fatores de moderação. Assim, a análise sugere que a população brasileira está sujeita a limitações que restringem seu crescimento à medida que se aproxima de um equilíbrio entre a taxa de natalidade e a capacidade de sustentação do ambiente.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise dos modelos matemáticos de Malthus e Verhulst para prever o crescimento populacional no Brasil revelou importantes compreensões sobre a dinâmica populacional do país. Neste sentido, a comparação entre esses modelos demonstrou que o modelo Verhulst, que considera as limitações de recursos e prevê um crescimento sigmoidal, apresentou uma maior precisão e consistência em suas previsões em comparação com o modelo Malthusiano, que pressupõe um crescimento exponencial.

Ao longo do tempo, observou-se que o modelo Malthusiano apresentou uma diminuição significativa em sua acurácia, enquanto o modelo logístico manteve uma precisão mais estável e menor margem de erro em suas previsões. Assim sendo, esses resultados indicam que o modelo Verhulst é mais adequado para prever o crescimento populacional do Brasil, especialmente em períodos recentes onde o crescimento se estabiliza devido a fatores limitantes.

A análise comparativa entre os modelos matemáticos ressalta a importância de considerar as limitações intrínsecas ao crescimento populacional, como a capacidade de suporte do ambiente, ao modelar seu comportamento. Portanto, a integração entre a modelagem matemática e a computação foi essencial para a compreensão da dinâmica populacional do Brasil, fornecendo percepções valiosos para a formulação de políticas públicas e estratégias de desenvolvimento sustentável.

Em síntese, este estudo contribui para o avanço do conhecimento científico na área da dinâmica populacional, destacando a relevância de adotar modelos que incorporem as limitações ao crescimento populacional para uma análise mais precisa e contextualizada da evolução demográfica.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova abordagem. 4. ed. Campinas: Contexto, 2002. 392 p.

BIFFI, Lorena Carolina Rosa; DA SILVA, Breno Gabriel; TRIVIZOLI, Lucieli Maria. Uma contextualização histórica para o modelo clássico de Malthus. **Revista Hipátia**, [S. l.], v. 3, n. 2, p. 8-24, dez. 2018. Disponível em: https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/722/295. Acesso em: 06 de jun. 2023.

BURAK, D. **Modelagem matemática:** uma alternativa para o ensino de Matemática na 5ª série. Dissertação (Mestrado em Matemática), Unesp, Rio Claro, 1987.

CAMARANO, Ana Amélia (org). **Novo Regime Demográfico:** uma nova relação entre população e desenvolvimento?. Rio de Janeiro: Ipea, 2014. 658 p.

EISERMANN, Jonatan Ismael; THOMAS, Gilberto Carlos. Equações Diferenciais como Modelos Matemáticos de Dinâmicas Populacionais: um estudo voltado ao município de santa rosa/rs. **Remat:** Revista Eletrônica de Matemática, Bento Gonçalves, v. 5, n. 2, p. 143-157, jul. 2019.

IBGE, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. 2024. Disponível em: https://www.ibge.gov.br.

NÓBREGA, Danielle Dantas. **Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações.** 2016. 60 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/36696. Acesso em: 15 abr. 2024.

SANTOS, Cleber de Oliveira dos. Equações Diferenciais: modelagem de problemas. **Artígos Fucap:** Faculdade capivari, Capivari de Baixo, [s/d]. Disponível em: https://www.fucap.edu.br/portal/artigos/Artigoequacoesdiferenciais.pdf. Acesso em: 13 abr. 2024.

SILVA, Josiane Reis. **Modelagem com Equações Diferenciais de Primeira Ordem Utilizando como ferramenta Auxiliar o Método de Runge-Kutta.** 56 p. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Abaetetuba, 2021.

TAVONI, Robinson; OLIVEIRA, Renata Zotin Gomes de. Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst: uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 2, n. 2, p. 86-99, dez. 2013.

Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/

v02n02a09-os-modelos-de-crescimento-populacional.pdf. Acesso em: 20 jul. 2023.

VILHENA, Maria Lúcia Moraes. **Uma Breve Introdução as Equações Diferenciais:** alguns tipos de equações diferenciais ordinárias. 2014. 70 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2014. Disponível em: https://matematica.icen.ufpa.br/images/tccs/TCC_FACMAT_17.pdf. Acesso em: 13 abr. 2024.

ZILL, Dennis G.. **Equações diferenciais:** com aplicação em modelagem. 3. ed (Tradução): São Paulo: Cengage Learning, 2016.