



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ANANINDEUA**  
**BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA**

**MARCILENE DA CONCEIÇÃO DIAS**

**IDENTIFICAÇÃO DE VÓRTICES EM ESCOAMENTO COMPRESSÍVEIS**

**ANANINDEUA-PA**

**2022**

MARCILENE DA CONCEIÇÃO DIAS

**IDENTIFICAÇÃO DE VÓRTICES EM ESCOAMENTO COMPRESSÍVEIS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao *campus* universitário de Ananindeua da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharela em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Claudio Fialho Andrade

**ANANINDEUA-PA**

**2022**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

D541i Dias, Marcilene da Conceição.  
Identificação de Vórtices em Escoamento  
Compressíveis / Marcilene da Conceição Dias. — 2022.  
14 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Luiz Claudio Fialho Andrade  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -  
Universidade  
Federal do Pará, Campus Universitário de Ananindeua,  
Curso de Ciência e Tecnologia, Ananindeua, 2022.

1. Definição de Vórtice. 2. Escoamento Compressível.  
3. Escoamento de Beltrami.  
I. Título.

---

CDD 620

## IDENTIFICAÇÃO DE VÓRTICES EM ESCOAMENTO COMPRESSÍVEIS

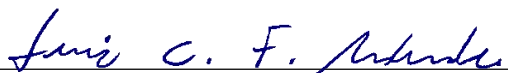
Trabalho de conclusão de curso apresentado ao *campus* universitário de Ananindeua da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharela em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Claudio Fialho Andrade

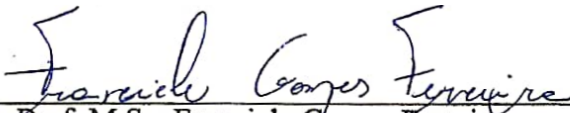
Aprovado em: 16/12/2022

Conceito: Excelente

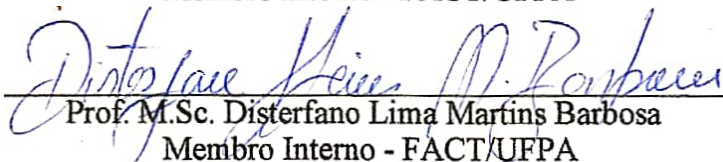
Banca examinadora:



Prof. D.Sc. Luiz Cláudio Fialho Andrade  
Orientador - FACT/UFPA



Prof. M.Sc. Franciele Gomes Ferreira  
Membro Interno - FACT/UFPA



Prof. M.Sc. Disterfano Lima Martins Barbosa  
Membro Interno - FACT/UFPA



B.Sc. David Lohan Pereira de Sousa  
Avaliador Externo - FACT/UFPA



B.Sc. Jean Carlos de Almeida Nobre  
Avaliador Externo - FACT/UFPA

ANANINDEUA-PA

2022

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, a minha família Dias e todos os demais que me ajudaram ao longo desta caminhada.

## **AGRADECIMENTOS**

Especialmente a Deus que é o autor da minha vida e da minha fé.

À minha família Dias a qual tenho orgulho de toda resiliência e de carregar esse nome e esse sangue nas veias.

A minha avó que sempre sonhou em me ver formada e foi o melhor incentivo que eu tive.

A minha Mãe que sempre nos estendeu a mão e priorizou nossa educação.

As minhas irmãs Ana Paula e Aline Dias que são motivos de inspiração e orgulho em todo esse processo.

Aos amigos de graduação que fizeram desse processo algo menos pesado.

Ao meu Orientador Prof. Dr. Luiz Claudio Fialho Andrade pela paciência e compreensão com toda essa construção do trabalho de curso e ao Prof. Dr. Alessandro José por todo apoio.

## RESUMO

Esta pesquisa objetiva aplicar escoamentos compressíveis de Beltrami na identificação de vórtices, segundo diferentes critérios cinemáticos de identificação, e tecer discussões sobre as regiões identificadas nos moldes encontrados em Andrade (2007) e Andrade (2008). Os escoamentos de Beltrami são uma classe de escoamentos que tem sido objeto de intenso interesse por muitos pesquisadores. Muitos estudos foram realizados sobre escoamentos de Beltrami incompressíveis, enquanto análises similares baseadas no caso compressível são muito mais raras, o que motivou a realização deste trabalho. Soluções incompressíveis analíticas em regime permanente das equações de Euler que satisfazem a condição de um escoamento de Beltrami, têm aplicações no estudo da topologia das linhas de campo, no contexto de sistemas dinâmicos (Arnold, 1989; Arnold e Khesin 1998), no estudo da turbulência em fluidos, e na geração de campos magnéticos (Arnold e Khesin, 1998; Moffatt, 1986; Constantin e Majda, 1988; Arnold, 2014; Andrade, 2008). No caso de escoamento compressível, Escoamentos de Beltrami foram aplicadas por Govorukhin, Morgulis *et al.* (1999) e por Govorukhin (2003), usando os fundamentos desenvolvidos por Morgulis *et al.* (1995), para analisar a topologia das órbitas obtidas através de mapas de Poincaré. O campo de velocidades descrito na seção 2.1 (O Escoamento CAB) foi aplicado para obter os vórtices identificados segundo os critérios estabelecidos na Seção 3 (Métodos de identificação de vórtices). Os vórtices foram extraídos mediante a implementação do Escoamento CAB, e o cálculo de cada um dos campos escalares que definem cada um dos critérios em um código computacional usando o *software* MATLAB, sobre um domínio tridimensional variando entre 0 e  $2\pi$  nas 3 direções coordenadas  $x, y, z$ , com passo 0,2. As visualizações dos vórtices são *slices* dos campos escalares identificados como volumes segundo os três critérios obtidas através da função de referência *Isocaps* em um PC de configuração comum. Como síntese dessa discussão, métodos de identificação diferentes ocupam regiões diferentes, em maior ou menor extensão, com maior ou menor magnitude dos campos escalares. Esse tipo de análise da estrutura do escoamento é útil para estender a compreensão da dinâmica dos escoamentos e pode embasar, e.g., modelos de turbulência (Fernandes *et al.*, 2012). Por fim, Simulações adicionais dos critérios de identificação abordados aqui e de outros critérios de identificação sobre o Escoamento CAB, sobre um espectro amplo de funções e parâmetros que definem o escoamento, assim como simulações de escoamentos experimentais de laboratório compressíveis a partir de dados obtidos por Velocimetria por Imagem de Partículas (PIV) são necessárias para aprofundar as breves impressões colhidas aqui.

**Palavras-chave:** Definição de Vórtice; Escoamento Compressível; Escoamento de Beltrami.

## ABSTRACT

This research aims to apply Beltrami compressible flows in the identification of vortices, according to different kinematic identification criteria, and to weave discussions about the regions identified in the molds found in Andrade (2007) and Andrade (2008). Beltrami flows are a class of flows that have been the subject of intense interest by many researchers. Many studies have been carried out on incompressible Beltrami flows, while similar analyzes based on the compressible case are much rarer, which motivated this work. Analytical steady state incompressible solutions of Euler's equations that satisfy the condition of a Beltrami flow have applications in the study of field line topology, in the context of dynamical systems (Arnold, 1989; Arnold and Khesin 1998), in the study of turbulence in fluids, and in the generation of magnetic fields (Arnold and Khesin, 1998; Moffatt, 1986; Constantin and Majda, 1988; Arnold, 2014; Andrade, 2008). In the case of compressible flow, Beltrami flows were applied by Govorukhin, Morgulis et al. (1999) and by Govorukhin (2003), using the fundamentals developed by Morgulis et al. (1995), to analyze the topology of orbits obtained through Poincaré maps. The velocity field described in section 2.1 (The CABC Flow) was applied to obtain the vortices identified according to the criteria established in Section 3 (Methods of identification of vortices). The vortices were extracted through the implementation of the CABC Flow, and the calculation of each of the scalar fields that define each of the criteria in a computational code using the MATLAB software, on a three-dimensional domain varying between 0 and  $2\pi$  in the 3 x coordinate directions, y, z, with step 0.2. The vortex views are slices of the scalar fields identified as volumes according to the three criteria obtained through the Isocaps reference function in a common configuration PC. As a summary of this discussion, different identification methods occupy different regions, to a greater or lesser extent, with greater or lesser magnitude of scalar fields. This type of flow structure analysis is useful to extend the understanding of flow dynamics and can support, e.g., turbulence models (Fernandes et al., 2012). Finally, additional simulations of the identification criteria discussed here and other identification criteria on the CABC Flow, on a wide spectrum of functions and parameters that define the flow, as well as simulations of experimental compressible laboratory flows from data obtained by Particle Image Velocimetry (PIV) is needed to deepen the brief impressions gathered here.

**Keywords:** Definition of Vortex; Compressible Flow; Beltrami Flow.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 01 – Vórtices extraídos segundo os critérios: (a)  $Q$  ( $Q>0$ ); (b)  $\Delta$  ( $\Delta>0$ ); e (c)  $\lambda_2$  ( $\lambda_2<0$ ).. 13

## SUMÁRIO

<b>1. Introdução.....</b>	<b>11</b>
<b>2. Escoamento de Beltrami.....</b>	<b>11</b>
2.1 O Escoamento CABC .....	11
<b>3. Métodos de Identificação de Vórtices.....</b>	<b>12</b>
3.1 O Critério $Q$ .....	12
3.2 O Critério $\Delta$ (Delta) .....	12
3.3 O Critério $\lambda_2$ .....	12
<b>4. Resultados .....</b>	<b>12</b>
<b>5. Referências.....</b>	<b>13</b>
<b>6. Direitos Autorais .....</b>	<b>14</b>



## Identificação de Vórtices em escoamento Compressíveis

Marcilene da Conceição Dias, Caroline de Oliveira Brisola, Luiz C. F. Andrade

[marcy26dias@gmail.com](mailto:marcy26dias@gmail.com)

### Palavras-chave

definição de vórtice, escoamento compressível, escoamento de Beltrami

### 1. Introdução

Escoamentos de Beltrami são uma classe de escoamentos que tem sido objeto de intenso interesse por muitos pesquisadores. Muitos estudos foram realizados sobre escoamentos de Beltrami incompressíveis, enquanto análises similares baseadas no caso compressível são muito mais raras, o que motivou a realização deste trabalho. Soluções incompressíveis analíticas em regime permanente das equações de Euler que satisfazem a condição de um escoamento de Beltrami, têm aplicações no estudo da topologia das linhas de campo, no contexto de sistemas dinâmicos (Arnold, 1989; Arnold e Khesin 1998), no estudo da turbulência em fluidos, e na geração de campos magnéticos (Arnold e Khesin, 1998; Moffatt, 1986; Constantin e Majda, 1988; Arnold, 2014; Andrade, 2008). No caso de escoamento compressível, Escoamentos de Beltrami foram aplicadas por Govorukhin, Morgulis *et al.* (1999) e por Govorukhin (2003), usando os fundamentos desenvolvidos por Morgulis *et al.* (1995), para analisar a topologia das órbitas obtidas através de mapas de Poincaré.

O objetivo deste trabalho, é aplicar escoamentos compressíveis de Beltrami na identificação de vórtices, segundo diferentes critérios cinemáticos de identificação, e tecer discussões sobre as regiões identificadas nos moldes encontrados em Andrade (2007) e Andrade (2008).

### 2. O Escoamento de Beltrami

Campos de Beltrami, são campos em que o vetor-campo é paralelo ao seu próprio rotacional ( $\mathbf{rot}(\cdot)$ ). Se  $V$  é um vetor-campo de velocidade, em um Escoamento de Beltrami verifica-se que  $V \times (\mathbf{rot}(V)) = 0$ , implicando em (Aris, 1989; Govorukhin *et al.*, 1999):

$$\mathbf{rot}(V) = \kappa V \tag{1}$$

onde  $\kappa$  é a abnormalidade do campo (Aris, 1989), ou parâmetro de helicidade (Govorukhin *et al.*, 1999). Se  $\kappa = \text{cte}$ . adimensional (cte. = constante), o campo de Beltrami é chamado de campo de Trkal (Andrade, 2008), e neste caso (Aris, 1989):

$$\text{div}(V) = \kappa^{-1} \text{div}(\mathbf{rot}(V)) = 0 \tag{2}$$

Portanto, um escoamento de Trkal é um escoamento solenoidal (incompressível) de Beltrami (Aris, 1989).

#### 2.1. O Escoamento CABC

O Escoamento CABC, proposto por Morgulis *et al.* (1995), é um escoamento de Beltrami compressível definido por equações de advecção que satisfazem a Eq. (1) e se reduzem ao caso incompressível conhecido como Escoamento ABC (Hénon (1966), Dombre *et al.* (1986), Haller (2005)) pela escolha adequada de parâmetros governantes do escoamento. Os resultados obtidos a partir de escoamentos CABC nos trabalhos de Govorukhin *et al.* (1999) e de Govorukhin (2003) mostraram condições de dinâmica caótica das partículas advectadas. Várias considerações sobre a seleção de funções e parâmetros (ctes.) que definem o escoamento CABC são feitas nestes trabalhos, referindo-se às condições de integrabilidade-não integrabilidade, de compressibilidade-incompressibilidade, e à redução do Escoamento CABC ao Escoamento ABC. O Escoamento CABC assim descrito, é definido por (Govorukhin *et al.*, 1999; Govorukhin, 2003):

$$\begin{aligned}
 u_x &= U_x + \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} + f(\zeta) \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \\
 u_y &= U_y + \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} - f(\zeta) \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \\
 u_z &= \frac{\lambda f(\zeta) \psi(x, y)}{\kappa(\zeta)}
 \end{aligned} \tag{3}$$

onde:  $U_x = b_1 \cos(\zeta) + b_2 \sin(\zeta)$ ,  $U_y = -b_1 \sin(\zeta) + b_2 \cos(\zeta)$ ,  $\psi$  é uma função corrente que satisfaz  $-\nabla^2(\psi) = \lambda \psi$ ,  $f(\zeta)$  é uma função que satisfaz  $f''(\zeta) [1 - \kappa^{-2}] f(\zeta) = 0$ ,  $\kappa = \kappa(\zeta)$  é uma função que define o parâmetro de helicidade, e está relacionada à variável  $z$  através da relação  $dz = \kappa^{-1}(\zeta) d\zeta$ , e  $\lambda$ ,  $b_1$  e  $b_2$  são ctes. adimensionais.

### 3. Métodos de Identificação de Vórtices

Os métodos de identificação de vórtices são ordinariamente divididos em métodos intuitivos e métodos objetivos. O primeiro método considera argumentos não quantitativos (e.g., "Um vórtice é a visão de um movimento girante de um aglomerado de partículas materiais em torno de um centro comum."); o segundo utiliza variáveis associadas ao campo de velocidades nas definições (e.g., relações envolvendo as magnitudes das taxas de deformação angular e das taxas de rotação).

Neste trabalho serão apresentadas identificações de vórtices baseadas em métodos objetivos, através de relações cinemáticas. Discussões mais amplas sobre o tema desta Seção podem ser encontradas em Andrade (2007) e Andrade (2008).

#### 3. 1. O Critério $Q$

O critério  $Q$  (Hunt *et al.*, 1988) define um vórtice como uma região especial onde o segundo invariante escalar ( $Q$ ) do tensor gradiente de velocidade  $\mathbf{L}$  ( $L_{ij}$  em notação indicial) é positivo, com a restrição adicional de que a pressão é menor dentro do vórtice em relação à pressão do meio circundante (Andrade, 2007). Assim descrito, o Critério  $Q$  é definido por:

$$Q(\mathbf{L}) = \frac{1}{2} (|\mathbf{W}|^2 - |\mathbf{S}|^2) = -\frac{1}{2} (S_{ij}S_{ij} + W_{ij}W_{ij}) > 0 \tag{4}$$

onde  $\mathbf{S} = S_{ij}$  e  $\mathbf{W} = W_{ij}$  são, respectivamente os tensores taxa de deformação e taxa de rotação, calculados a partir da decomposição aditiva do tensor gradiente de velocidade  $\mathbf{L} = L_{ij}$ . A Eq. (4) também define o Laplaciano da pressão, obtido tomando-se o divergente das Eqs. de Navier Stokes.

#### 3. 2. O Critério $\Delta$ (Delta)

O critério  $\Delta$  (Chong *et al.*, 1990) define um vórtice como a região do espaço onde o discriminante ( $\Delta$ ) do polinômio característico do tensor gradiente de velocidade  $\mathbf{L}$  é positivo. Nesse caso, o polinômio característico de  $\mathbf{L}$  tem autovalores complexos conjugados. Assim descrito, o Critério  $\Delta$  é definido por:

$$\Delta(\mathbf{L}) = 27R^2 + 4P^3R - 18PQR + 4Q^3 - P^2Q^2 > 0 \tag{5}$$

onde  $Q$  é definido pela Eq. (4),  $P = -tr(\mathbf{L})$  é o primeiro invariante escalar de  $\mathbf{L}$  ( $tr =$  'traço'), e  $R = -Det(\mathbf{L})$  é terceiro invariante escalar de  $\mathbf{L}$  ( $Det =$  'determinante').

#### 3. 3. O Critério $\lambda_2$

O critério  $\lambda_2$  (Jeong e Hussein, 1995) define um vórtice como a região do espaço onde o tensor simétrico  $\mathbf{S}^2 + \mathbf{W}^2$  tem dois autovalores negativos, ou de forma equivalente, como a região do espaço onde o tensor  $\mathbf{S}^2 + \mathbf{W}^2$  tem o autovalor intermediário ( $\lambda_2$ ) negativo, desde que qualquer tensor simétrico tem somente autovalores reais, que podem ser ordenados como  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ . Assim descrito, o Critério  $\lambda_2$  é definido por:

$$-\lambda_2(\mathbf{S}^2 + \mathbf{W}^2) < 0 \tag{6}$$

## 4. Resultados

O campo de velocidades descrito na seção 2.1 foi aplicado para obter os vórtices identificados segundo os critérios estabelecidos na Seção 3. Esse campo de velocidades, descrito pelas Eqs. (3), foi aplicado usando as seguintes funções:  $f(\zeta) = a_1 \cos(\zeta) + a_2 \sin(\zeta) + 1$ ;  $\psi(x,y) = \lambda(B \cos(x) + C \sin(y))$ ;  $\kappa(\zeta) = (a_1 \cos(\zeta) + a_2 \sin(\zeta) + 1)^{1/2}$ . Os parâmetros (ctes.) aplicados foram:  $b_1 = b_2 = \varepsilon = 0$ ;  $\lambda = 1$ ;  $B = C = 2$ ;  $a_1 = a_2 = \alpha = 0,10$ . Estas funções e parâmetros foram aplicadas em resultados obtidos por Govorukhin (2003).

Os vórtices foram extraídos mediante a implementação do escoamento CABCC, e o cálculo de cada um dos campos escalares que definem cada um dos critérios em um código computacional usando o *software* MATLAB, sobre um domínio tridimensional variando entre 0 e  $2\pi$  nas 3 direções coordenadas  $x, y, z$ , com passo 0,2. As visualizações dos vórtices são *slices* dos campos escalares identificados como volumes segundo os três critérios obtidas através da função de referência *Isocaps* em um PC de configuração comum (Intel i7-7500U, DDR4 de 8GB).

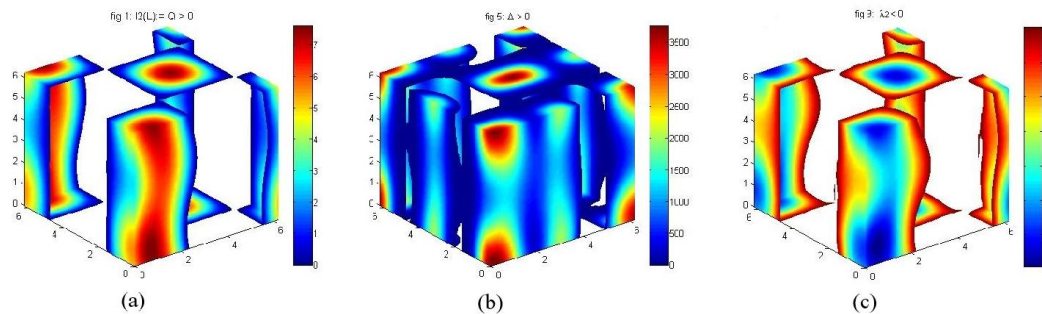


Figura 1: Vórtices extraídos segundo os critérios: (a)  $Q$  ( $Q > 0$ ); (b)  $\Delta$  ( $\Delta > 0$ ); e (c)  $\lambda_2$  ( $\lambda_2 < 0$ ).

Na Figura 1, por observação visual, verifica-se que, entre os critérios estudados, o critério menos restritivo, quanto às regiões ocupadas pelos vórtices, é o critério  $\Delta$  (Chong *et al.*, 1990) cf. a Figura 1b. Também por observação visual, verifica-se que os critérios  $Q$  (Hunt *et al.*, 1988), cf. a Figura 1a, e  $\lambda_2$  (Jeong e Hussein, 1995), cf. a Figura 1c, mostram grande concordância quanto às regiões ocupadas pelos vórtices.

A observação visual da Figura 1 mostra, ainda, grandes regiões de baixa magnitude do campo escalar que define o critério  $\Delta$  sobre as regiões ocupadas (cores em tons 'frios' tendendo ao azulado, cf. a Figura 1b) em detrimento de pequenas regiões ocupadas (cores em tons 'quentes' tendendo ao vermelho, cf. a Figura 1b). Nas visualizações dos critérios  $Q$  e  $\lambda_2$  verifica-se um maior equilíbrio entre as magnitudes dos campos escalares identificados segundo as regiões ocupadas pelos vórtices em cada um dos dois critérios (equilíbrio entre os tons 'frios' e 'quentes'), cf. as Figuras 1a e 1c.

Como síntese dessa discussão, métodos de identificação diferentes ocupam regiões diferentes, em maior ou menor extensão, com maior ou menor magnitude dos campos escalares. Esse tipo de análise da estrutura do escoamento é útil para estender a compreensão da dinâmica dos escoamentos e pode embasar, e.g., modelos de turbulência (Fernandes *et al.*, 2012).

Impressões similares quanto às magnitudes dos campos e quanto às regiões ocupadas pelos vórtices podem ser observadas entre estes três critérios, no caso de escoamento incompressível (Escoamento ABC), em Andrade (2007) e Andrade (2008).

Simulações adicionais dos critérios de identificação abordados aqui e de outros critérios de identificação sobre o Escoamento CABCC, sobre um espectro amplo de funções e parâmetros que definem o escoamento, assim como simulações de escoamentos experimentais de laboratório compressíveis a partir de dados obtidos por Velocimetria por Imagem de Partículas (PIV) são necessárias para aprofundar as breves impressões colhidas aqui.

## 5. Referências

- Andrade, L. C. F. "Sobre Estruturas Vorticais e a Turbulência Estrutural", Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.
- Andrade, L. C. F. "On the Identification of Vortical Structures", *XIX COBEM*, (Brasília-Brasil) – 5-9 de novembro, 2007.
- Aris, R. "Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics", Dover, 1989.
- Arnold, V. I. "Mathematical Methods of Classical Mechanics", Springer, 1989.
- Arnold, V. I., Khesin, B. A. "Topological Methods in Hydrodynamics", Springer, 1998.
- Arnold, V. I. "Collected Works", Vol.II, pp 399-403, Springer, 2014.
- Chong, M.S.; Perry, A.E.; Cantwell, B.J., "A General Classification of Three-Dimensional Flow Field", *Phys. Fluids A*, Vol.2, 1990, pp. 765-777.
- Constantin P.; Majda, A. "The Beltrami Spectrum for Incompressible Fluid Flows", *Commun. Math. Phys.*, 1988, pp.435-436.
- Dombre, T.; Frisch, U.; Green, J.M. *et al.* "Chaotic Streamlines in the ABC Flows", *J. Fluid Mech.*, Vol.167, 1986, pp. 353-391.

- Fernandes, C.S.; Andrade, L. C. F.; Lins, E. F. *et al.* “A Turbulence Model Based on Vortex Concept”, *VII CONEM*, (São Luís-Brasil) – 31 de julho-3 de agosto, 2012.
- Govorukhin, V. N.; Morgulis, A.; Yudovich, V. I.; Zaslavsky, G. M. “Chaotic Advection in Compressible Helical Flow”, *Phys. Rev. E*, Vol.60, Nº 3, 1999, pp. 2788-2797.
- Govorukhin, V. N. “Numerical Results on CABC-Flows”, *NATO Advanced Study Institute International Summer School on Chaotic Dynamics and Transport in Classical and Quantum Systems*, (Corsica-France) – August, 18-30, 2003, <[https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/\\_Public/36/055/36055606.pdf](https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/36/055/36055606.pdf)>
- Haller, G. “An Objective Definition of a Vortex”, *J. Fluid Mech.*, Vol.525, 2005, pp. 1-26.
- Hénon, M. “Sur la Topologie des Lignes de Courant Dans un Cas Particulier”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol.262, 1966, pp. 312-314.
- Hunt, J.C.R.; Wray, A.A.; Moin, P. “Eddies, Stream, and Convergence Zones in Turbulent Flows”, *Report CTR-S88, Center for Turbulence Research*, 1988, pp. 193-208
- Jeong, J.; Hussain, A.K.M.F. “On the Identification of a Vortex”, *J. Fluid Mech.*, Vol.285, 1995. pp. 69-94.
- Moffatt, H. K. “Magnetostatic Equilibria and Analogous Euler Flows of Arbitrarily Complex Topology. Part 2. Stability Considerations”, *J. Fluid Mech.*, Vol.166, 1986, pp.359-378.
- Morgulis, A.; Yudovich, V.I.; Zaslavsky, G.M. “Compressible Helical Flow”, *Commun. Pure and Applied Math.*, Vol. XLVIII, 1995, pp. 571-582.

## 6. Direitos autorais

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.