



**SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

RENAN AUGUSTO DA SILVA MIRANDA

**INTEGRAIS DE RIEMANN EM SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO
COM USO DO SOFTWARE GEOGEBRA**

**CASTANHAL - PA
2021**

RENAN AUGUSTO DA SILVA MIRANDA

**INTEGRAIS DE RIEMANN EM SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO
COM USO DO SOFTWARE GEOGEBRA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Faculdade de Matemática
do Campus Universitário de Castanhal
, Universidade Federal do Pará
como requisito para a obtenção de Grau
de Licenciado Pleno em Matemática,
sob Orientação Msc Carla Cristina
de Souza Tavares.

**CASTANHAL - PA
2021**

RENAN AUGUSTO DA SILVA MIRANDA

**INTEGRAIS DE RIEMANN EM SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO
COM USO DO SOFTWARE GEOGEBRA**

Banca Examinadora

Prof(a) Msc. Carla Cristina de Souza Tavares
Orientadora, FACMAT/UFPA

Prof(a) Msc. Marcos Vinícius Orguen Gouvêa – FACMAT/UFPA
Membro

Prof(a) Dr. Artur Costa Almeida – FACMAT/UFPA
Membro

CASTANHAL-PA
2021

DEDICATÓRIA

Dedico esta obra ao meu irmão, ao meu amigo Andson e as minhas avós (in memoriam).
Dedicado a minha família, amigos e principalmente a todos os mestres que conheci nesta jornada.

AGRADECIMENTOS

Acima de tudo sou grato a minha mãe por fazer do impossível o possível para que eu prosseguisse com os estudos, seu incentivo e apoio foram essenciais para o término deste trabalho.

Ao Geovani pelo exemplo de vida, sermões e conversas.

Ao Andson por mostrar minha ignorância em certos assuntos com tanta facilidade quanto se respira, inicialmente a distância entre nossos intelectos me motivou a estudar com mais afinco. Pela hospitalidade e pelos livros emprestados ao longo destes anos.

A minha orientadora, Msc. Carla Tavares, por toda ajuda, incentivo e paciência.

Aos meus irmãos da universidade que mostraram-me importância da diversão e socialização, e principalmente pela ajuda nos trabalhos e provas.

Aos meus colegas de classe pela amizade, simpatia e boas lembranças.

RESUMO

Este trabalho aborda algumas reflexões e discussões sobre integrais de Riemann para o cálculo de volumes e sobre como se utilizar o GeoGebra como ferramenta auxiliar para este propósito. É mostrado como utilizar a integral simples (com apenas uma variável) para o cálculos de volumes de sólidos, em especial os sólidos de revolução assim como também é mostrado o GeoGebra como ferramenta de visualização 3D para estes sólidos. O objetivo é retratar a característica do objeto em estudo sem demonstrar forte interesse nas possíveis aplicações e benefícios decorrentes da pesquisa na área educacional , sendo portanto uma pesquisa básica qualitativa.

Palavras Chaves: Integral de Riemann, Sólidos de Revolução, GeoGebra.

ABSTRACT

This work addresses some reflections and discussions on Riemann integrals for the calculation of volumes and how to use GeoGebra as an auxiliary tool for this purpose. It is shown how to use the simple integral (with only one variable) for volume calculations of solids, especially solids of revolution as well as GeoGebra is also shown as a 3D visualization tool for these solids. The objective is to portray the characteristic of the object in study without showing strong interest in the possible applications and benefits resulting from the research in the educational area, being therefore a qualitative basic research.

keywords: Riemann Integral, Solids of Revolution, GeoGebra.

Lista de Figuras

1.1	$f(x) = x^2 - 1$	2
1.2	Derivada de f quando x tende a P	3
1.3	Partição P do intervalo real $[a, b]$	4
1.4	Área de f sobre a até x	6
1.5	$f(x) = x^2$	7
1.6	Área sob a função decomposta em retângulos	8
1.7	Paralelepípedo	9
1.8	Integral e volume	9
1.9	Elipse $x^2 + y^2/4 = 1/4$	10
1.10	Planificação do cone reto	11
2.1	Superfície de revolução	13
2.2	Clepsidra e Antclépsidra	15
2.3	Sólidos A e B	16
2.4	Função $f(x) = x/2$ em $[0, 2]$	17
2.5	Retângulo $[x_{j-1}, x_j] \cdot f(t_j)$	17
2.6	$y = \sqrt{x^2 - 1}$	18
2.7	Círculo $x^2 + y^2 = r^2$	19
2.8	Retângulo $[a, b] \times [c, d]$	21
2.9	Retângulo $[4, 6] \times [2, 4]$	22
2.10	Retângulo $R_i = f(c_i)[x_{i-1}, x_i]$	23
2.11	Retângulo de medida $f(c)(b - a)$	24
2.12	Ilustração da peça de madeira	25
2.13	Superfície geratriz da peça	26
2.14	Cone reto	28
2.15	$A = \{(x, y); a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$	29
2.16	Tronco de cone	30
2.17	Superfície geratriz do tronco de cone	31
2.18	Modelo da Vasilha	31
2.19	Superfície geratriz	32
2.20	Comparação entre Esfera e Antclépsidra	33
2.21	Applet	34
3.1	Superfície geradora do sólido	35
3.2	Modelo	36
3.3	Superfície geratriz	37

3.4	Representação da Caixa d'água.	38
3.5	Planificação da geratriz do Cone	39
3.6	Retângulo com alturas y_0 e x_0	41
3.7	Prisma e Paralelepípedo	42
3.8	Cilindro e Prisma	43
3.9	Representação do haltere.	44
3.10	Decomposição da forma do Haltere em funções contínuas.	45
3.11	Decomposição do Haltere em dois gráficos.	46
3.12	Representação do sólido 3(barra).	46
3.13	Inserção da figura do vaso.	48
3.14	Construção terminada.	49
3.15	Modelo Tridimensional do vaso.	50
4.1	Modelo 3D de um sorvete.	52
4.2	Modelo.	52
4.3	Descrição do modelo da luminária pelo GeoGebra.	53
4.4	Esferas E_1 e E_2	54
4.5	Cone reto de altura h	55
4.6	Modelo do problema criado no GeoGebra.	56
4.7	Triângulo retângulo.	57
4.8	Círculo $x^2 + y^2 = r^2$	61

Sumário

INTRODUÇÃO	1
1 PRELIMINARES	2
1.1 FUNÇÃO	2
1.2 PRIMITIVA	4
1.3 INTEGRAL DE RIEMANN	6
1.4 INTEGRAL DE RIEMANN E ÁREA	7
1.5 INTEGRAL DE RIEMANN E CÁLCULO DE VOLUMES	9
1.6 GEOGEBRA	12
2 SÓLIDOS GEOMÉTRICOS	13
2.1 INTEGRAL PARA O CÁLCULO DE VOLUMES EM SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO	16
2.1.1 ROTAÇÃO PELO EIXO X	16
2.1.2 ROTAÇÃO PELO EIXO Y	19
2.2 CILINDRO	24
2.3 CONE	27
2.3.1 VOLUME DE TRONCO DE CONE COM BASES PARALELAS	29
2.4 ESFERA	32
3 INTEGRAL DE RIEMANN x PRINCÍPIO DE CAVALIERI	35
3.1 APLICAÇÕES	35
3.2 APLICAÇÃO AO GEOGEBRA	48
4 APLICAÇÕES NO GEOGEBRA	51
CONSIDERAÇÕES FINAIS	59
ANEXO I	61
REFERÊNCIAS	63

INTRODUÇÃO

No decorrer da disciplina de cálculo I, prossegue-se nas grandes maiorias das vezes, por motivos diversos, sem se dar destaques às aplicações dos conceitos centrais desta disciplina, ficando estas a serem tratadas posteriormente em outras, como em física por exemplo. Existe, entretanto, uma aplicação básica que não requer nada além de um bom estudo de geometria elementar. Tal aplicação do conceito de integral consiste, de forma resumida, em expressar o volume de um sólido de revolução como uma integral de Riemann.

Este trabalho ocupa-se em descrever como isso ocorre e como usar esta ideia no mundo concreto através de exemplos e ilustrações. Também é realizada uma reflexão sobre dois métodos para se determinar volumes, a integral de Riemann e o princípio de Cavalieri. Sempre contando com o auxílio computacional do Software GeoGebra para a realização dos gráficos e modelos, sendo em vários momentos o uso do GeoGebra essencial para a visualização e compreensão dos objetos tratados. A intenção ao escrevê-lo foi de mostrar que pode-se usar integral simples para calcular volumes e que dá pra usar o GeoGebra como ferramenta de visualização 3D, para sólidos e mostrar como se constrói esses sólidos com o GeoGebra. No capítulo 1 trata-se de conceitos básicos de cálculos que serão imprescindíveis para acompanhar o restante do trabalho, é onde aborda-se os conceitos de função e integral de Riemann. No capítulo 2 é estudado os sólidos geométricos e seus volumes sob o aspecto da integral de Riemann. Já no terceiro aplicamos o conceito de cálculo de volumes com integrais de Riemann e situações concretas e realizamos uma pequena discussão sobre os méritos dos métodos de da integral de Riemann e o princípio de Cavalieri. Também usa-se o GeoGebra para construir um modelo 3D de um vaso. No quarto capítulo é mostrado várias aplicações no geogebra à geometria elementar e as questões de vestibulares modelando-as.

Capítulo 1

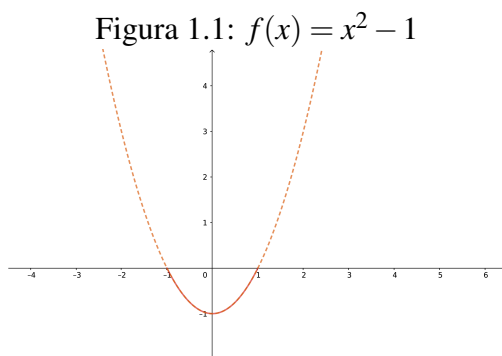
PRELIMINARES

Aborda-se a seguir questões fundamentais ao entendimento da pesquisa e dos resultados por ela alcançados, assim como as suas limitações. Apresenta-se variados conceitos matemáticos, dado que a intenção deste capítulo é construir uma base teórica sobre o qual o desenvolvimento da pesquisa se fundamentará. Os conceitos tratados aqui são estudados em cursos regulares de Cálculo I, e inclui as definições de função, derivada e integral.

1.1 FUNÇÃO

Definição 1. Uma relação $f : X \longrightarrow Y$ é uma **função** se para cada $x \in X$ temos um único $y \in Y$. X é chamado de domínio da função, Y contradomínio e $f(X)$ o conjunto imagem.

Exemplo 1. A função $f(x) = x^2 - 1$ onde $-1 < x < 1$.



Fonte: o Autor (2021).

Observa-se que na figura 1.1 o domínio é o intervalo aberto $(-1, 1)$ e a imagem é o conjunto $-1 \leq y < 0$.

Definição 2. Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

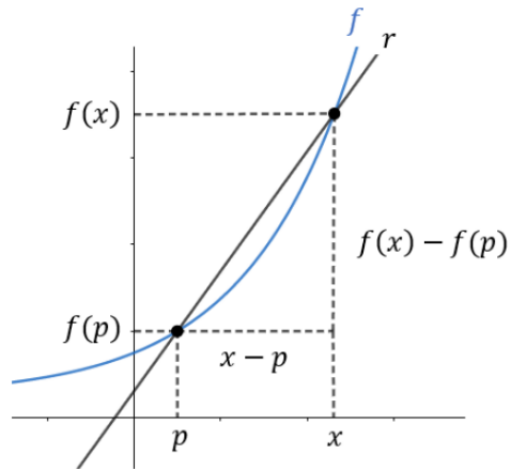
quando existe e é finito, denomina-se **derivada** de f em p e indica-se por $f'(p)$. Assim

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

(Guidorizzi, vol. I, 2004, p. 137)

Interpretação geométrica

Figura 1.2: Derivada de f quando x tende a P



Fonte: o autor (2021).

Na figura 1.2 quando x se aproxima de p a reta r , de inclinação $(f(x) - f(p))/(x - p)$, vai tender a ficar na posição da reta tangente ao gráfico no ponto p . A derivada num ponto p pode ser entendida como a reta tangente a função neste ponto.

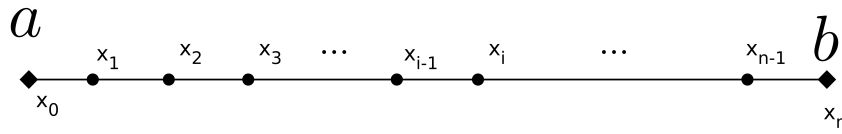
Exemplo 2. Mostre que a derivada da função $f(x) = e^x$ é a própria função, isto é, $f'(x) = e^x$. De fato, para demonstrarmos esse fato usaremos a definição de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \right) = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Definição 3. Denomina-se **Partição** de um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ um conjunto de pontos $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ tais que $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_k$; onde $x_i \in I, \forall i = 0, 1, 2, \dots, k$.

A imagem 1.3 exibe uma partição P em um intervalo [a,b]. Quando a partição P recebe mais pontos, é dito que a partição foi refinada. Na ocasião retratada em 1.3 a partição P tem n elementos e o intervalo [a,b] fica repartido em n subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_n]$ e cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tem comprimento $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (ALBUQUERQUE, 2014) .

Figura 1.3: Partição P do intervalo real [a,b].



Fonte: o autor(2021).

1.2 PRIMITIVA

Definição 4. Seja f uma função definida no intervalo I . Uma primitiva de f em I é uma função F definida em I , tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in I$.

Exemplo 3. A função $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + k$ é uma primitiva da função $f(x) = e^{2x}$, pois

$$F'(x) = \left[\frac{e^{2x}}{2} + k \right]' = \frac{2e^{2x}}{2} = e^{2x} = f(x).$$

Denota-se a primitiva de uma função:

$$F(x) = \int f(x) dx$$

Seja α um real fixo então a primitiva de $\int x^\alpha dx$ será da seguinte forma :

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k & \text{se } \alpha \neq -1 \\ (\ln x) + k & \text{se } \alpha = -1 (x > 0) \end{cases}$$

Exemplo 4. Calcule $\int \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x} \right) dx$

$$\int \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x} - x^{\frac{1}{2}} \right) dx = (\ln x) + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = (\ln x) + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + k.$$

O quadro a seguir tem o propósito de mostrar as principais primitivas, dado que as mesmas são usadas de forma frequente ao longo do trabalho.

Quadro das principais primitivas

$p \neq -1 \quad \int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \frac{-1}{\sin^2 x} = \cot x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$
$a > 0, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + C$
$a > 0, \quad \int \frac{dx}{x \ln a} = \log_a x + C$	$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcsenh} x + C$
$\int \sinh x dx = \cosh x + C$	$\int \frac{dx}{x^2-1} = \operatorname{arccosh} x + C$
$\int \cosh x dx = \sinh x + C$	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctgh} x + C$

Fonte: o autor (2021).

1.3 INTEGRAL DE RIEMANN

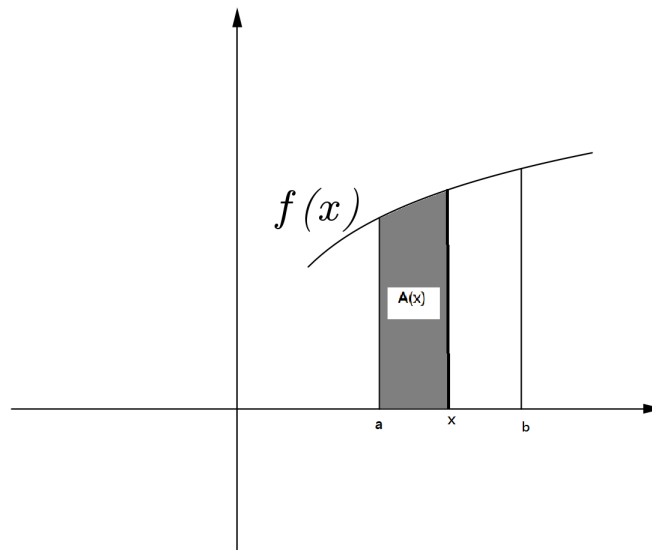
Teorema 1. *Teorema Fundamental do Cálculo.* Se ϕ é uma primitiva da função f no intervalo I e $a, b \in I$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \phi(b) - \phi(a).$$

(NETO, p. 376)

Seja uma função f contínua e não negativa em $[a; b]$. Suponha que existe uma função $A(x)$ definida em $[a; b]$ tal que para todo x neste intervalo, A seja a área da região delimitada pelo gráfico de f e pelas retas $x = a, x = b$ e $y = 0$ no intervalo $[a; b]$, conforme a figura 1.4.

Figura 1.4: Área de f sobre a até x .



Fonte: o autor (2021).

Teorema 2. Seja dada uma função contínua f e não negativa em $I = [a; b]$. A área de f no intervalo $[a; x]$ é dada por uma função A , para todo x em $[a; b]$, tal que

- $A(a) = 0$
- $A'(x) = f(x)$

$\forall x \in [a; b]$ ($A'(a)$ e $A'(b)$ são as derivadas laterais)

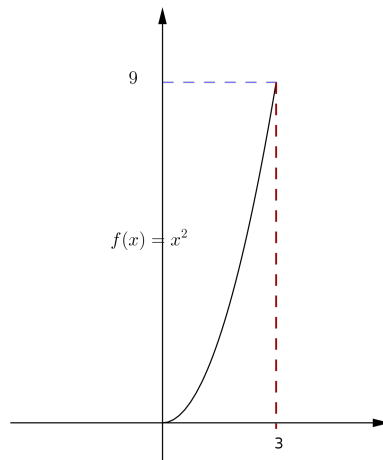
A função $A(x)$ possui as seguintes propriedades:

1. $A(a) = 0$
2. $A'(x) = f(x)$
3. $A(t) = \int_a^t f(x)dx$, onde $a < t < b$.

(NETO, p. 379)

Exemplo 5. Calcule a área sobre a função $f(x) = x^2$, de 0 a 3, exibida na figura 1.5.

Figura 1.5: $f(x) = x^2$



Fonte: o autor (2021).

$$A(3) = \int_0^3 x^2 dx \rightarrow A(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$A(3) = \frac{3^3}{3} = 9$$

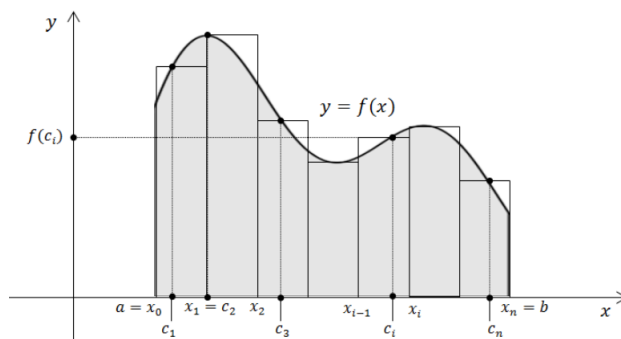
1.4 INTEGRAL DE RIEMANN E ÁREA

A área pode ser obtida pelo seguinte processo: particionamos $[a; b]$ em n intervalos tão pequenos que, em cada um deles, f possa ser considerada constante. Então a região S (conjunto definido por: $(x, y); a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)$) é dividida em n retângulos. A soma das áreas desses retângulos é quase igual à $A(b)$. Quanto mais pontos tivermos na partição, mais próximo o valor da soma fica de $A(b)$. Desta forma, quando $n \rightarrow \infty$ a $\sum_{i=1}^n A_{R_i} \rightarrow A(b)$, onde A_{R_i} é a área do i -ésimo retângulo; $A_{R_i} = f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\bar{x}_i)\Delta x_i$, com $\bar{x} \in [x_{i-1}, x_i]$. Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

A soma no lado esquerdo da igualdade acima é denotada soma de Riemann. A imagem 1.6 retrata a ideia da soma de Riemann.

Figura 1.6: Área sob a função decomposta em retângulos.



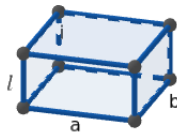
Fonte: ALBUQUERQUE, 2014.

Conforme a partição de $[a, b]$ é refinada, os retângulos vão ficando cada vez menores, dando assim uma aproximação cada vez melhor da região S .

1.5 INTEGRAL DE RIEMANN E CÁLCULO DE VOLUMES

Imagina-se um sólido qualquer sob um plano α . Supondo que um plano β paralelo a α seccione este sólido e que tal seção tenha área conhecida. Sendo a altura de tal sólido h e fazendo a distância de β a α variar, movimentando apenas β , entre 0 e h , tal ação ira gerar uma sequência de secções, a soma das áreas destas secções é, por definição, o volume.

Figura 1.7: Paralelepípedo.

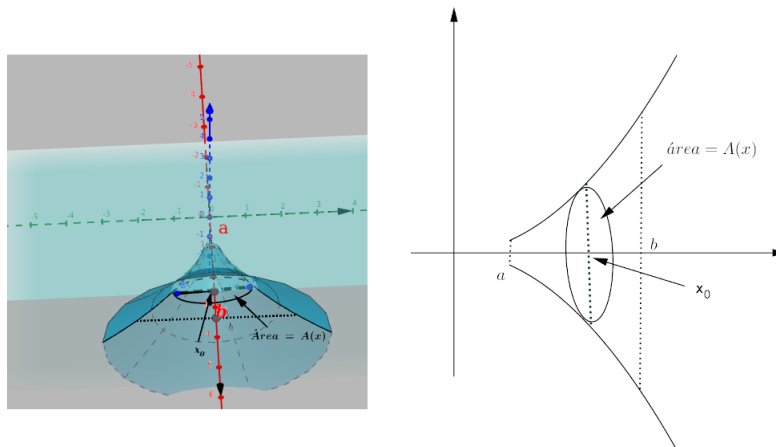


Fonte: o autor (2021).

Toma-se para exemplo o sólido representado na figura 1.7 de medidas a, b e altura l ; como cada seção terá a mesma área ab somada l vezes, o volume do sólido será $ab \cdot l$, ou seja, área da base $\cdot$ altura.

Agora seja o sólido da figura 1.8 e observe que $A(x)$ é **área da interseção do sólido com plano perpendicular ao eixo x que passa pelo ponto de abscissa x_0** .

Figura 1.8: Integral e volume



Fonte: o autor (2021).

Assim o volume pode ser colocado na forma

$$Volume = \int_a^b A(x) dx.$$

Exemplo 6. Calcule o volume do sólido cuja base é o semicírculo $x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0$, e cujas secções perpendiculares ao eixo x são triângulos equiláteros. Relembrando que $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ é a expressão que determina a área de um triângulo equilátero em função do lado (DANTE,2009). Como a medida do lado é $\sqrt{r^2 - x^2}$, vem

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{(r^2 - x^2)\sqrt{3}}{4}$$

$$V = 2 \int_0^r \frac{(r^2 - x^2)\sqrt{3}}{4} dx$$

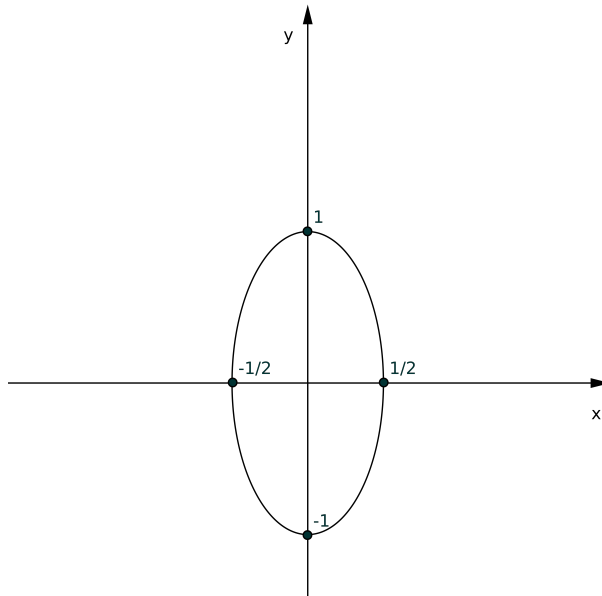
$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[r^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right]$$

$$V = \frac{r^3\sqrt{3}}{3}.$$

Exemplo 7. Calcule o volume do sólido cuja base é a região $4x^2 + y^2 \leq 1$ e cujas secções perpendiculares ao eixo x são semicírculos. Considerando $4x^2 + y^2 = 1$ obtêm-se $y = \pm\sqrt{1 - 4x^2}$, a distância de um ponto do eixo x até gráfico desta função neste ponto será o raio do semicírculo. A fronteira desta região pode ser descrita, também, por: $x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{1}{4}$, conforme figura 1.9. A área do

Figura 1.9: Elipse $x^2 + y^2/4 = 1/4$.



Fonte: o autor (2021).

semicírculo é metade da área do círculo, isto é, $A_{sc} = \frac{\pi r^2}{2}$, de onde vem

$$A_{sc} = \frac{\pi}{2}(1 - 4x^2)$$

Dessa forma, tem-se

$$Volume = \int_a^b A_{sc}(x) dx$$

$$V = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\pi}{2}(1 - 4x^2) dx$$

$$V = \pi \int_0^{1/2} (1 - 4x^2) dx$$

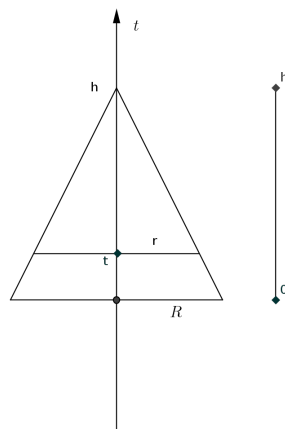
$$V = \pi \left[x - \frac{4x^3}{3} \right]_0^{1/2}$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{2} - \frac{4(\frac{1}{2})^3}{3} \right]$$

$$V = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}.$$

Exemplo 8 (Cone). Considere a imagem 1.10 como se fosse o "perfil" do cone circular reto, tem-se uma reta que passa pelo vértice e pelo centro da circunferência da base, esta reta servirá como um parâmetro t , de tal forma que o volume seja agora dado por $\int_a^b A(t) dt$. Quanto mais se aumenta o

Figura 1.10: Planificação do cone reto.



Fonte: o autor (2021).

valor atribuído ao parâmetro t , menor o raio se torna, ou seja, o raio é dado em função de t , de tal forma que $r(0) = R$ e $r(h) = 0$. Após observar a figura 1.10 obtém-se, por meio das semelhanças

entre os triângulos, a razão

$$\frac{h}{R} = \frac{h-t}{r} \Rightarrow r = \frac{R}{h}(h-t)$$

Se um plano perpendicular a reta t secciona-se o cone, resultaria em várias regiões circulares de áreas $A = \pi r^2 \Rightarrow A(t) = \pi \left(\frac{R^2}{h^2} (h-t)^2 \right)$. E então

$$V_{cone} = \int_0^h \pi \left(\frac{R^2}{h^2} (h-t)^2 \right) dt$$

$$V_{cone} = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h (h-t)^2 dt = \pi \frac{R^2}{h^2} \left[-\frac{(h-t)^3}{3} \right]_0^h$$

$$V_{cone} = \frac{\pi R^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

1.6 GEOGEBRA

"O GeoGebra (aglutinação das palavras Geometria e Álgebra) é um software matemático escrito na linguagem de programação Java, disponível de forma gratuita nas mais diversas plataformas. Criado com o intuito de ser utilizado em sala de aula, nos mais diversos níveis de educação, o programa apresenta, ao mesmo tempo, características geométricas e algébricas de um mesmo objeto, tanto em duas quanto em três dimensões, permitindo alterações dinâmicas nos objetos prontos, sejam eles pontos, retas, planos, vetores, matrizes ou funções que podem ser inseridos através de ferramentas, ou comandos. Isso permite que a ferramenta seja utilizada tanto no estudo de álgebra, quanto geometria e cálculo, auxiliando na visualização e interpretação do que está ocorrendo nos espaços bidimensionais e tridimensionais."

(SIQUEIRA, 2017, p. 2)

Capítulo 2

SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

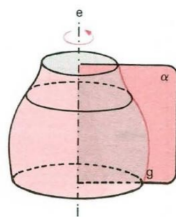
No capítulo anterior conceitos de Cálculo foram introduzidos. Neste capítulo é apresentado vários conceitos relacionados aos sólidos geométricos que se mostraram pertinentes ao decorrer do trabalho. Posteriormente a apresentação do Princípio de Cavalieri exibe-se questões centrais desta pesquisa, o uso de integrais em funções de uma única variável para o cálculo de volume de sólidos de revolução. Define-se, ainda, sólidos geométricos, sólidos de revolução e o princípio de Cavalieri.

Definição 5. Uma porção finita do espaço, delimitada por uma superfície, costuma ser denominada **sólido**(GARBI, p. 255).

Definição 6 (Sólidos de Revolução). Considere um semiplano de origem e (eixo) e nele uma superfície S ; girando o semiplano em torno de e , a superfície S gera um sólido chamado sólido de revolução (DOLCE; PONPEO, FME¹. 10, p. 313-j).

Definição 7 (Superfície de Revolução). Consideremos um semiplano de origem e (eixo) e nele uma linha g (geratriz); girando esse semiplano em torno de e , a linha g gera uma superfície que é chamada superfície de revolução (DOLCE; PONPEO, FME 10, p. 311-J).

Figura 2.1: Superfície de revolução.



Fonte: Fundamentos de matemática elementar vol. 10.

¹ FME é abreviação de "Fundamentos de Matemática Elementar", popular coleção de livros de matemática.

A Figura 2.1 ilustra a Definição 7. É importante ao longo desse trabalho os casos em que o eixo e for o igual ao eixo x ou y do plano cartesiano e nessas situações funções de uma variável fazem o papel da linha geratriz g .

Definição 8. Dada uma sequência de pontos de um plano $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ com $n \geq 3$, todos distintos, onde três pontos distintos são não colineares, considerando consecutivos A_{n-1}, A_n e A_1 , assim como A_n, A_1 e A_2 , chama-se **polígono** à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ (DOLCE; PONPEO, FME 9, p. 132).

Definição 9. Defini-se **poliedro** como sólidos geométricos limitado por polígonos que possuem, dois a dois, um lado em comum (GARBI, p. 256).

Definição 10. Os polígonos que formam uma superfície poliédrica são sua **faces**, enquanto os vértices e os lados das faces denominam-se respectivamente **vértices** e **arestas** da superfície (GARBI, p. 256).

Definição 11. Um poliedro é regular se suas faces são polígonos regulares com o mesmo número de lados (GARBI, p. 263).

Definição 12. Uma superfície poliédrica é dita **convexa** quando o plano de cada face deixa todas as demais faces em um só dos semiespaços por ele determinados. Caso contrário, a superfície poliédrica é dita **côncava** (GARBI, p. 256).

Definição 13 (Poliedro). Um sólido delimitado por uma superfície poliédrica fechada é denominado **poliedro** e o conjunto de suas faces é sua **superfície**. As arestas e faces de um poliedro são as arestas e faces de sua superfície. Um poliedro é convexo ou côncavo conforme o seja a sua superfícies (GARBI, p. 256).

Definição 14. Lugar geométrico é um conjunto de pontos caracterizado por uma propriedade. Uma figura(um conjunto de pontos) é um lugar geométrico se:

- a. Todos os seus pontos têm essa propriedade
- b. Só os seus pontos possuem essa propriedade.

(GARBI, p. 103)

Definição 15. Uma superfície que não é um plano nem formada por partes de planos é dita **superfície curva** (GARBI, p. 273).

Sejam, no espaço, uma linha d e uma reta r , quaisquer desde que, se d for uma reta, r não é paralela a d .

Definição 16. O lugar geométrico dos pontos pertencentes às retas traçadas a partir dos pontos de d e paralelas a r é denominada superfície cilíndrica. A linha d é chamada diretriz e as paralelas a r pelos pontos de d são chamadas geratrizes da superfície cilíndrica (GARBI, p. 273).

Definição 17 (Superfície Esférica). Dado um ponto O e um segmento de reta R , denomina-se superfície esférica o lugar geométrico dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O sejam congruentes com o segmento R . O ponto O é denominado centro da superfície esférica e o segmento R é o seu raio (GARBI, p. 278).

Definição 18. Prisma é um sólido delimitado por faces planas, em que as faces laterais são paralelogramos, e as bases são polígonos congruentes (GARBI, p. 256).

Definição 19. Paralelepípedo são prismas nos quais as seis faces são paralelogramos (GARBI, p. 258).

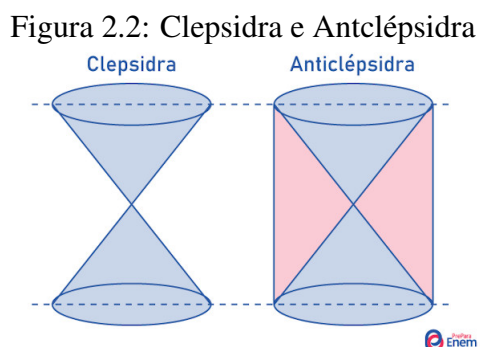
Definição 20. Considere um círculo de centro O e raio r situado num plano α e um ponto V fora de α . Chama-se cone circular ou cone à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V e outra extremidade nos pontos do círculo (DOLCE; PONPEO, FME 10, p. 228-J).

O cone circular reto é também chamado de cone de revolução, pois é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos.

Definição 21 (Clepsidra). É o sólido formado pela reunião de cones de bases invertidas.

Definição 22 (Antclépsidra). É o sólido resultante da subtração da clepsidra de um cilindro equilátero que o circunscreve.

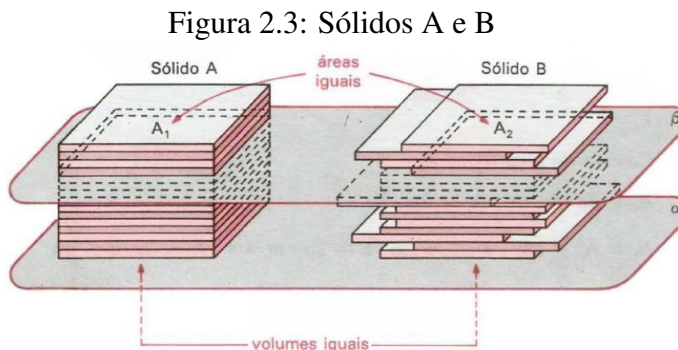
A imagem 2.2 apresenta a visualização da clepsidra e antclépsidra.



Fonte: preparaenem.com

Definição 23 (Princípio de Cavalieri). Dados dois sólidos geométricos A e B de mesma altura e áreas das bases, que, por sua vez estão contidas num mesmo plano α . Os sólidos A e B têm o mesmo volume se qualquer plano β , paralelo a α , determinar duas seções transversais com áreas iguais (DOLCE; PONPEO, FME 10).

A imagem 2.3 exemplifica a definição 23.



Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar 10.

O estudo restringe-se apenas a corpos redondos, que figuram como objetos focais da análise a ser realizada. Propriedades dos sólidos de revolução serão abordados e, mais adiante, dois métodos usados para calcular volume serão comparados.

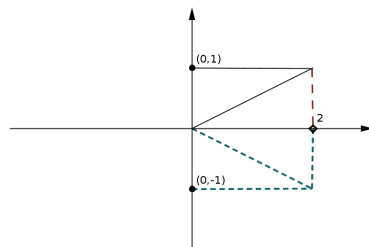
2.1 INTEGRAL PARA O CÁLCULO DE VOLUMES EM SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

2.1.1 ROTAÇÃO PELO EIXO X

Considerando $f(x)$ contínua e não negativa em $[a; b]$. Qual o volume do sólido gerado pela rotação do gráfico de f em torno do eixo Ox no intervalo $[a; b]$? A discussão a seguir ocupa-se de responder este questionamento.

Exemplo 9. Considere a função $f(x) = \frac{x}{2}$ em $[0, 2]$ exibida na figura 2.4. O sólido obtido pela rotação é um cone e o seu volume é $V = \frac{\text{area da base} \cdot \text{altura}}{3}$, sendo a base uma circunferência de área $A_c = \pi r^2$, onde r é o raio, ou seja $r = 1$.

Figura 2.4: Função $f(x) = x/2$ em $[0, 2]$.



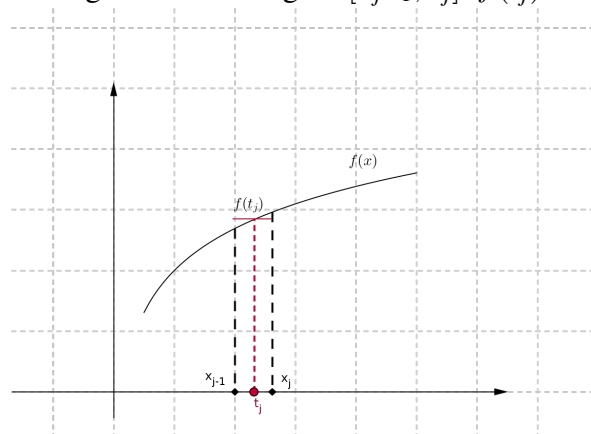
Fonte: o autor(2021).

Desta forma,

$$V = \frac{\pi(1)^2 \cdot 2}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Considere a função f com o gráfico representado na figura 2.5. Particiona-se $[a; b]$ em n intervalos tão pequenos que $f(x)$ possa ser considerado constante nestes intervalos. Seja $[x_{j-1}; x_j]$ um intervalo qualquer onde $f(t_j) = \text{constante} \forall t_j \in [x_{j-1}; x_j]$. Com isso obtém-se vários retângulos que ao serem rotacionados em torno do eixo x , geram cilindros.

Figura 2.5: Retângulo $[x_{j-1}, x_j] \cdot f(t_j)$.



Fonte: o autor (2021).

De acordo com a figura 2.5 o volume do cilindro gerado pelo retângulo será

$$V = (\text{area da base}) \cdot (\text{altura})$$

$$V = (\pi[f(\bar{t}_j)]^2) \cdot (\Delta x_j)$$

O volume do sólido é

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi[f(\bar{t}_j)]^2 \Delta t_j = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

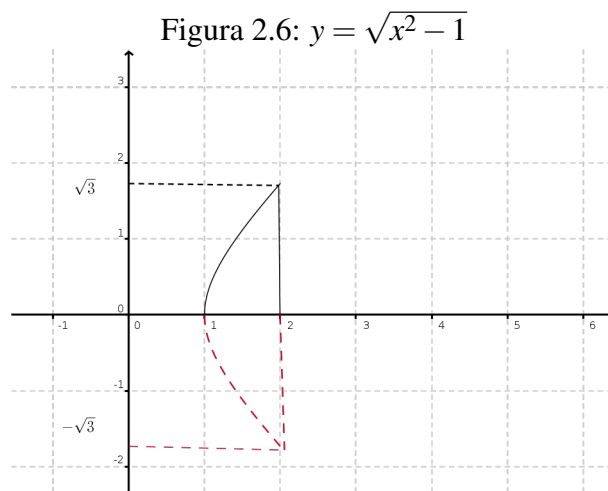
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (2.1)$$

Exemplo 10. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação do gráfico de $f(x) = \frac{x}{2}$ em $[0, 2]$ em torno do eixo Ox .

$$V = \pi \int_0^2 \left[\frac{x}{2}\right]^2 dx = \pi \left[\int_0^2 \frac{x^2}{4} dx \right]$$

$$\frac{\pi}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{8}{3} \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Exemplo 11. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação do conjunto dos pontos (x, y) tais que $y \geq 0, 1 \leq x \leq 2$ e $x^2 - y^2 \geq 1$ em torno do eixo Ox .



Fonte: o autor (2021).

Analisando o gráfico exibido na figura 2.6

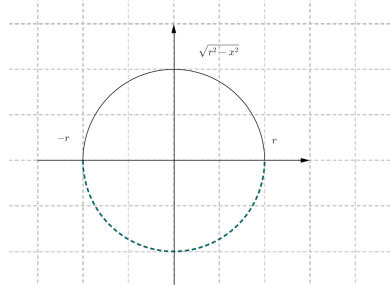
$$V = \pi \int_1^2 [\sqrt{x^2 - 1}]^2 dx = \pi \int_1^2 (x^2 - 1) dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = \pi \left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 \right)$$

$$V = \pi \left(\frac{7}{3} - 1 \right) = \frac{4\pi}{3}.$$

Exemplo 12. Calcule o volume de uma esfera de raio r . Neste caso tem-se a rotação do conjunto dos (x, y) tal que $-r \leq x \leq r$ e $0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$ em torno do eixo x ($y = 0$).

Figura 2.7: Círculo $x^2 + y^2 = r^2$.



Fonte: Autor (2021).

Observando o gráfico da figura 2.7:

$$V = \pi \int_{-r}^r [\sqrt{r^2 - x^2}]^2 dx = 2\pi \int_0^r r^2 - x^2 dx$$

$$V = 2\pi \left(\frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

2.1.2 ROTAÇÃO PELO EIXO Y

Toda a discussão e exemplos acima referiam-se a rotação de conjuntos de pontos ao redor do eixo Ox , sem que nenhum ponto desses conjuntos intercepte o eixo x . A seguir o teorema de Pappus é discutido e posteriormente é exposto o cálculo de volume quando o conjunto de pontos, que constitui a superfície de revolução, é girado em torno do eixo y . O teorema de Pappus é necessário para a fundamentação da fórmula que expressa o volume de sólidos de revolução onde suas superfícies de revolução foram rotacionadas ao redor do eixo y .

Teorema 3 (Papus). Dados uma reta e , eixo, e uma figura plana A tal que $A \cap e = \emptyset$. O volume do sólido B , obtido pela rotação da figura A em relação ao eixo e , é igual ao produto da área da figura, pelo comprimento da circunferência gerada, na rotação, pelo baricentro (ou centro de massa) de A (GUIDORIZZI, 2001).

Sendo a figura uma região limitada do plano $\mathbb{R}^2$, o seu baricentro (ou centro de massa) vai ser um ponto com duas coordenadas. O baricentro é um ponto $P(x_B, y_B)$ (considerando o sistema cartesiano), se o eixo e for igual a x ($e = x$) então deve-se considerar, para uso na fórmula, y_B . Por analogia , se $e = y$ então considera-se x_B .

Assim deve-se ter, sendo $P(x_B, y_B)$ o baricentro, que

$$\begin{cases} V = A \cdot C \cdot y_B, & \text{se } A \text{ for girado em torno de } x \\ V = A \cdot C \cdot x_B, & \text{se } A \text{ for girado em torno de } y \end{cases}$$

Nas expressões acima C é o comprimento da circunferência, A é a área da figura A . No caso em que A é um retângulo $[a, b] \times [c, d]$ as coordenadas do ponto de baricentro $P(x_B, y_B)$ serão dadas pelas igualdades $x_B = (b + a)/2$ e $y_B = (d + c)/2$.

Exemplo 13. Um retângulo situado no semiplano $y \geq 0$ e com um lado paralelo ao eixo x . Seja P a interseção das diagonais conforme figura 2.8. Mostre que o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x é igual ao produto da área do retângulo pelo comprimento da circunferência, gerada na rotação, pelo ponto P . O retângulo é conjunto $R: \{a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq c \leq y \leq d\}$.

$$V = \pi \int_a^b d^2 dx - \pi \int_a^b c^2 dx$$

$$V = \pi(d^2)(b - a) - \pi(c^2)(b - a)$$

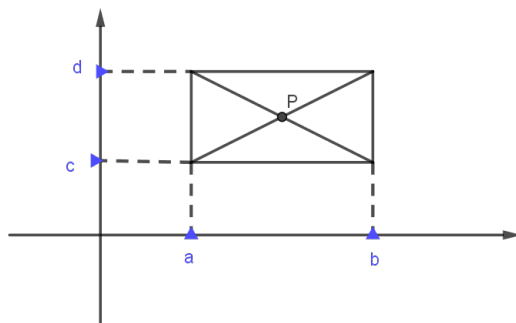
$$V = \pi(d^2 - c^2)(b - a)$$

$$V = \pi(d - c)(d + c)(b - a)$$

e, portanto $V = 2\pi \frac{d+c}{2} (d - c)(b - a)$, onde $2\pi \frac{d+c}{2}$ é o comprimento da circunferência, em que $\frac{d+c}{2}$ faz o papel de raio , gerada pelo ponto P e $(d - c)(b - a)$ é a área do retângulo. Observa-se que $\frac{d+c}{2} = y_B$, ou seja, quando a figura é gerada em torno de x nos interessa a coordenada do centroide no eixo y .

Exemplo 14. Seja o retângulo representado pela figura 2.9

Figura 2.8: Retângulo $[a, b] \times [c, d]$.



Fonte: o autor (2021).

Onde tem-se que as coordenadas do Ponto P são
 $x_B = \frac{b+a}{2} = \frac{6+4}{2} = 5$ e $y_B = \frac{d+c}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$
 e simbolizando a área deste retângulo por A , então $A = (6-4)(4-2) = 4 \text{ u.a}$ e $C = 2\pi$.

O volume dele rotacionado pelo eixo x é

$$V_x = ACy_B = 4 \cdot 2\pi \cdot 3 = 24\pi \text{ u.v}$$

com uso da integral seria:

$$V_x = \pi \int_4^6 4^2 dx - \pi \int_4^6 2^2 dx = 16\pi(6-4) - \pi(4)(6-4)$$

$$V_x = 32\pi - 8\pi = 24\pi \text{ u.v}$$

Agora, será calculado o volume em relação a y (i.e, do sólido obtido pela rotação do retângulo ao redor do eixo y ($x = 0$)).

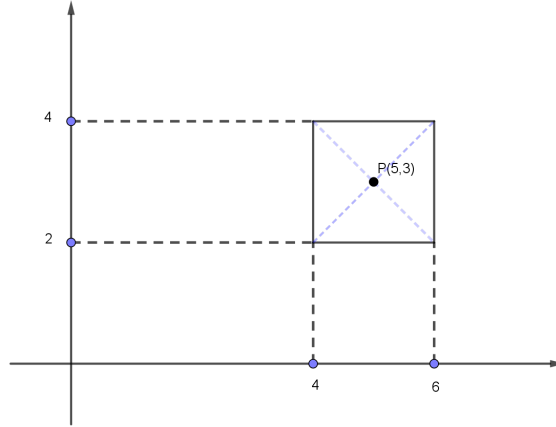
$$V_y = ACx_B = 4 \cdot 2\pi \cdot 5 = 40\pi \text{ u.v} .$$

Como no par

$$\begin{cases} V_x = ACy_B \\ V_y = ACx_B \end{cases}$$

as duas equações serão iguais somente quando $x_B = y_B$. Os objetos em análise não são iguais,

Figura 2.9: Retângulo $[4, 6] \times [2, 4]$.



Fonte: o autor (2021).

tem uma aparência semelhante mas não são os mesmos. Observa-se que na rotação pelo eixo x o sólido apresenta raio menor 2 e raio maior 4, enquanto que em rotação ao eixo y tem-se raio menor 4 e raio maior 6. Então, embora se trata da mesma seção A , o "caminho" que ele percorre é diferente e os sólidos são diferentes. Para eliminar possíveis dúvidas, conferir-se-á o resultado $V_y = ACx_B = 40\pi$ através da integral:

$$V_y = \pi \int_2^4 6^2 dy - \pi \int_2^4 4^2 dy = \pi \cdot 36 \cdot (4 - 2) - \pi \cdot 16 \cdot (4 - 2)$$

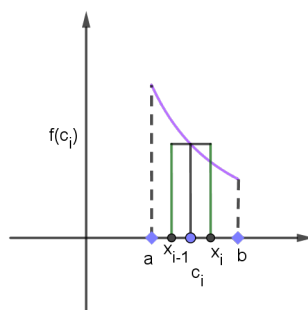
$$V_y = 72\pi - 32\pi = 40\pi$$

Agora que já foi discutido o teorema de Pappus, pode-se usá-lo para determinar uma expressão capaz de obter o volume de um sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y , de um conjunto A . Sendo $f(x) \geq 0$ e continua em $[a, b]$, com $a \geq 0$. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$. Seja B o sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y , do conjunto A . O objetivo é mostrar que é razoável tomar para o volume de B o número

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \quad (2.2)$$

Seja $P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e seja c_i o **ponto médio** de $[x_{i-1}, x_i]$. Seja, ainda, R_i o i -ésimo retângulo $x_{i-1} < x < x_i$ e $0 \leq y \leq f(c_i)$ conforme mostrado na figura 2.10.

Figura 2.10: Retângulo $R_i = f(c_i)[x_{i-1}, x_i]$.



Fonte: o autor (2021).

Pelo Teorema de Pappus, o volume do retângulo gerado pela rotação de R_i , em torno do eixo y , é $V = A \cdot C \cdot x_B$, uma vez que c_i é dado por $\frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, ou seja, ele vai ser a coordenada do baricentro, servindo como x_B .

$$V = 2\pi c_i f(c_i) \Delta x_i,$$

$$C = 2\pi, A = f(c_i) \Delta x_i \text{ e } c_i = x_B.$$

Deste modo a soma de Riemann $\sum_{i=1}^n 2\pi c_i f(c_i) \Delta x_i$ é um valor aproximado para o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y do conjunto A (sólido B). Pelo fato de f ser contínua ela é integrável, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi c_i f(c_i) \Delta x_i = 2\pi \int_a^b x f(x) dx. \quad (2.3)$$

Logo é razoável tomar (2.2) para o valor do volume de B .

(GUIDORIZZI, 2001, p. 407)

Exemplo 15. Calcular o volume do sólido obtido pela rotação, em relação ao eixo y , do conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $1 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq x^2 - 1$

$$V = 2\pi \int_1^2 x f(x) dx = 2\pi \int_1^2 x(x^2 - 1) dx$$

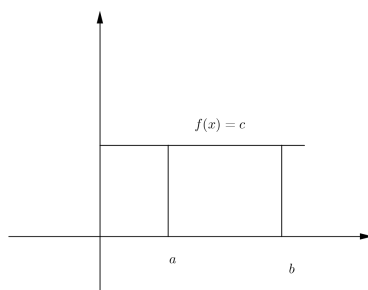
$$V = 2\pi \cdot \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$V = 2\pi\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{9\pi}{2}.$$

2.2 CILINDRO

O volume de um cilindro é dado pela expressão $V = \pi r^2 h$ (DANTE, 2009), ou seja, área da base pela altura; imagine-se a função $f(x) = c$ em $[a; b]$, com c e $a > 0$ e $b > a$, conforme na figura 2.11.

Figura 2.11: Retângulo de medida $f(c)(b - a)$.



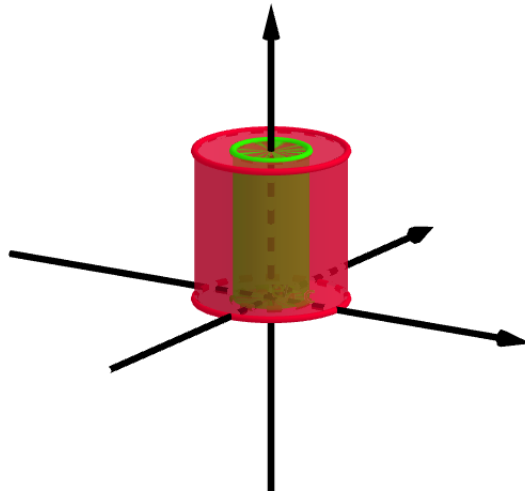
Fonte: o autor (2021).

Percebe-se facilmente que nesta interpretação tem-se

$$V = \pi(f(x))^2(b - a).$$

Exemplo 16. Uma peça de madeira tem como medidas $r = 5cm$ e $R = 10cm$ e altura $h = 6cm$ e forma da figura 2.12. Sabendo que o cilindro interno é vazio, qual é o volume de madeira empregado para fabricar essa peça ?

Figura 2.12: Ilustração da peça de madeira.



Fonte: o autor (2021).

1. método tradicional ² :

Os raios são:

$r = 5cm$, $R = 10cm$.

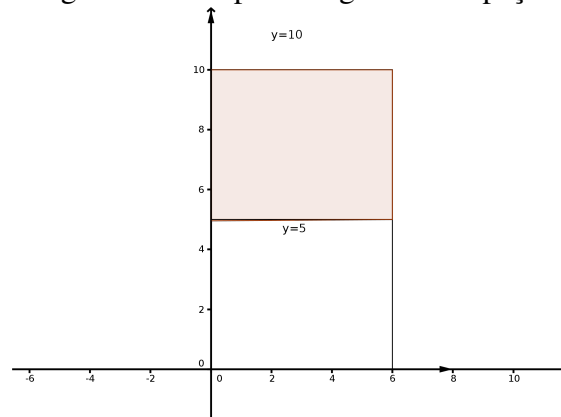
e $h = 6cm$; logo

$$\begin{aligned} V &= \pi R^2 h - \pi r^2 h \\ &= \pi(10^2)6 - \pi(5^2)6 \\ &= 600\pi - 150\pi = 450\pi cm^3 \end{aligned}$$

2. Cálculo:

² Considera-se como "método tradicional" aqueles que utilizam apenas as propriedades da geometria plana ou espacial, sem cálculo diferencial ou integral.

Figura 2.13: Superfície geratriz da peça.



Fonte: o autor (2021).

Considerando a superfície geratriz exibida na figura 2.13, o volume pode ser dado através de

$$V = \pi \int_0^6 10^2 dx - \pi \int_0^6 5^2 dx$$

$$V = 100\pi \cdot 6 - 25\pi \cdot 6$$

$$V = 450\pi \text{ cm}^3.$$

2.3 CONE

A expressão que determina o volume de um cone é

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

(DANTE, 2009)

Considera-se uma função linear do tipo $f(x) = ax$, continua em $[0; h]$, de tal forma que $f(h) = r$. Rotacionando o gráfico de f ao redor do eixo x obtemos um cone. Sabe-se que $f(x)$ passa pelos pontos $O(0,0)$ e $A(h,r)$ pode-se determinar a equação desta reta facilmente como se segue. Da geometria analítica, sabe-se que para três pontos $X(x,y)$, O e A , serem colineares, deve-se ter o determinante da matriz abaixo igual a zero (IEZZI; DOLCE, 2013).

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ h & r & 1 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$yh - xr = 0$$

$$y = \frac{r}{h}x$$

ou seja, $f(x) = \frac{r}{h}x$.

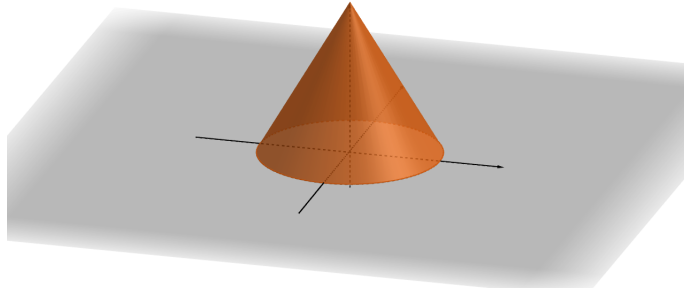
Exemplo 17. Qual é o volume de um cone de raio 7 cm e altura 12 cm? O cone está retratado na figura 2.14.

1. Este problema resume-se a uma simples aplicação da fórmula

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

que resultam em $\frac{1}{3}\pi(7^2)12 = 196\pi cm^3$

Figura 2.14: Cone reto



Fonte: o autor (2021).

2. Pode-se empregar a fórmula (2.1). $f(x) = \frac{r}{h}x \rightarrow f(x) = \frac{7}{12}x$

$$V = \pi \int_0^{12} \left(\frac{7x}{12}\right)^2 dx = \pi \frac{7^2}{12^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{12}$$

$$V = \frac{\pi(7)^2}{(12)^2} \cdot \frac{(12)^3}{3} = \frac{\pi \cdot (7)^2 \cdot 12}{3}$$

$$V = 196\pi cm^3.$$

2.3.1 VOLUME DE TRONCO DE CONE COM BASES PARALELAS

Definição 24. Seja um cone com base circular no plano α e sendo β um plano paralelo a α e que está no mesmo semiespaço do vértice e cujo a distância entre os planos é menor que a altura do cone dado. A interseção de β com o cone será uma região circular. Denomina-se tronco de cone o sólido delimitado pelos planos α e β e pelo segmentos de retas que ligam as duas regiões circulares .

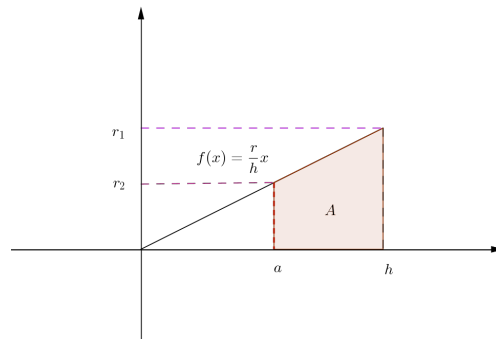
O teorema 4 apresenta uma demonstração em fundamentos de matemática elementar 10.

Teorema 4. O volume de um tronco de cone de bases paralelas com raios r e R e altura h , sendo $r < R$, é dado pela relação

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + rR + R^2) \quad (2.4)$$

Para a próxima proposição considera-se a imagem 2.15.

Figura 2.15: $A = \{(x, y); a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$.



Fonte: o autor (2021).

Proposição 1. Seja $f(x) = \frac{r}{h}x$, com as todas as propriedades da figura 2.15. O volume do conjunto A rotacionando em relação ao eixo x é dado por

$$V = \frac{\pi r_1^2}{3} \left[h - \frac{a^3}{h^2} \right] \quad (2.5)$$

Demonstração:

$$V = \pi \int_a^h [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^h \frac{r_1^2}{h^2} x^2 dx$$

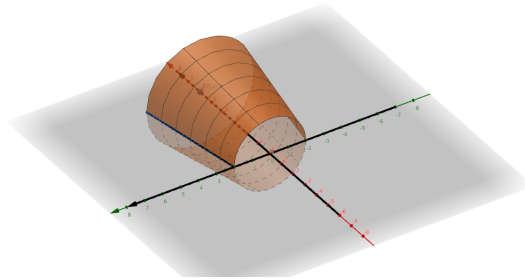
$$V = \frac{\pi r_1^2}{h^2} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^h$$

$$V = \frac{\pi r_1^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} [h^3 - a^3]$$

$$V = \frac{\pi r_1^2}{3} \left[h - \frac{a^3}{h^2} \right].$$

Exemplo 18. Os raios da base de um tronco de cone reto são $3m$ e $2m$, a altura do tronco é $6m$. Vamos calcular seu volume. A superfície deste tronco de cone está na figura 2.16. pela fórmula 2.3 tem-se

Figura 2.16: Tronco de cone.



Fonte: o autor (2021).

$$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$= \frac{\pi 6}{3} (3^2 + 3 \cdot 2 + 2^2)$$

$$V = 2\pi(9 + 6 + 4) = 38\pi m^3$$

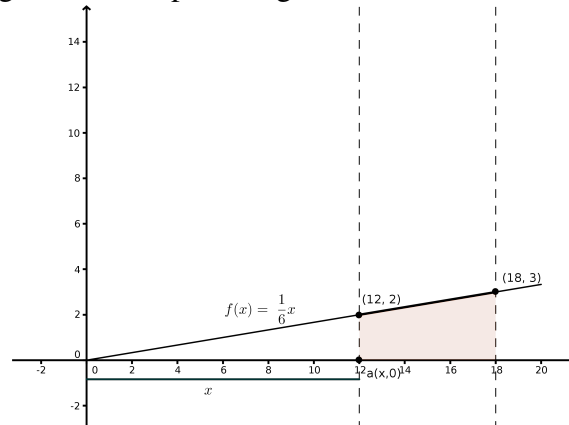
Com métodos do cálculo temos: Antes de aplicar a fórmula precisamos determinar a . Sendo a distância do centro até o ponto a igual a x , isto é, $\overline{Oa} = x$. Aqui em vez de ter somente um tronco de um cone, devemos ter um tronco de cone gerado por um segmento da função conforme figura 3.3, por isto é necessário que o cone seja adequado a função, fazendo a posição em relação ao gráfico anterior variar, ainda será o mesmo cone, só que agora suas coordenadas vão mudar para se adaptar a função $f(x) = \frac{r}{h}x$; dessa forma, afim de utilizar a expressão (2.4) devemos determinar a e h , como novas coordenadas. Por semelhança, sai a razão

$$\frac{x}{x+6} = \frac{2}{3} \rightarrow x = 12$$

, assim $a = (12, 0)$ logo $h = (18, 0)$. Agora

$$V = \frac{\pi r_1^2}{3} \left[h - \frac{a^3}{h^2} \right]$$

Figura 2.17: Superfície geratriz do tronco de cone.



Fonte: o autor (2021).

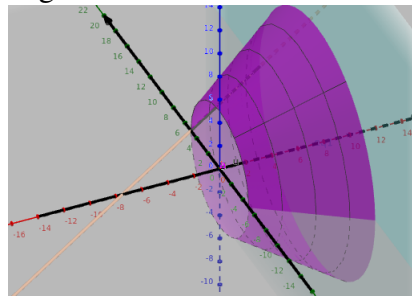
$$V = \frac{\pi 9}{3} \left[18 - \frac{12^2}{18^2} \right]$$

$$V = 38\pi m^3$$

Ao fazer o gráfico no GeoGebra obtém-se, de forma imediata, o valor $\overline{Oa} = x$.

Exemplo 19. Uma vasilha tem a forma de um tronco de cone. Suas dimensões são: raio maior = $40cm$, raio menor = $20cm$ e altura $30cm$. O modelo de tal objeto encontrasse representado na figura 2.18. Qual é o volume máximo de água que a vasilha pode conter?

Figura 2.18: Modelo da Vasilha



Fonte: o autor (2021).

1. Método Clássico:

$$r_1 = 40cm, r_2 = 20cm \text{ e } h = 30cm$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

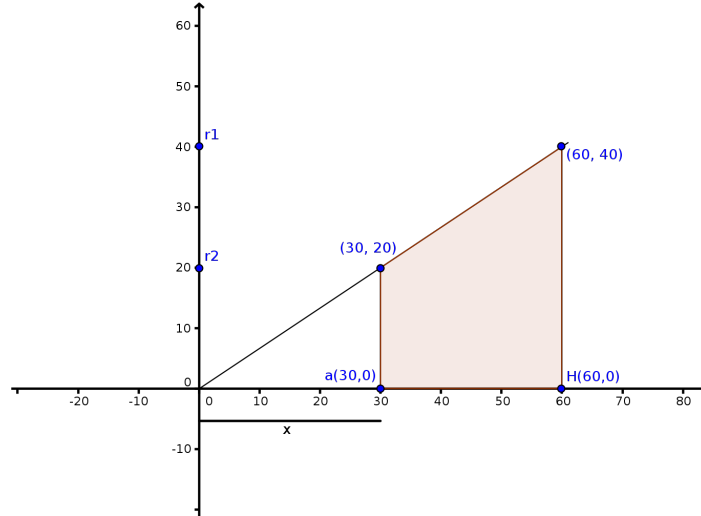
$$V = \frac{\pi(30)}{3}(40^2 + (40)(20) + 20^2)$$

$$V = 10\pi[2800] = 28000\pi cm^3$$

2. Cálculo:

$f(x) = \frac{40}{60}x = \frac{2}{3}x$. Analisando os triângulos da figura 2.19 e usando a semelhança entre eles,

Figura 2.19: Superfície geratriz.



Fonte: o autor (2021).

$\frac{x}{x+30} = \frac{20}{40} \rightarrow 2x = x+30 \rightarrow x=30$. Assim $h = 60cm$ (distância até a origem) e $h(60,0)$ e $a(30,0)$.

$$V = \frac{\pi r^2}{3}(h - \frac{a^2}{h^2})$$

$$V = \frac{\pi 40^2}{3}(60 - \frac{30^2}{60^2})$$

$$V = \frac{\pi 40^2}{3}[60 - 2700/3600]$$

$$V = \frac{\pi 40^2}{3} \cdot 5,2$$

$$V = 28000\pi cm^3.$$

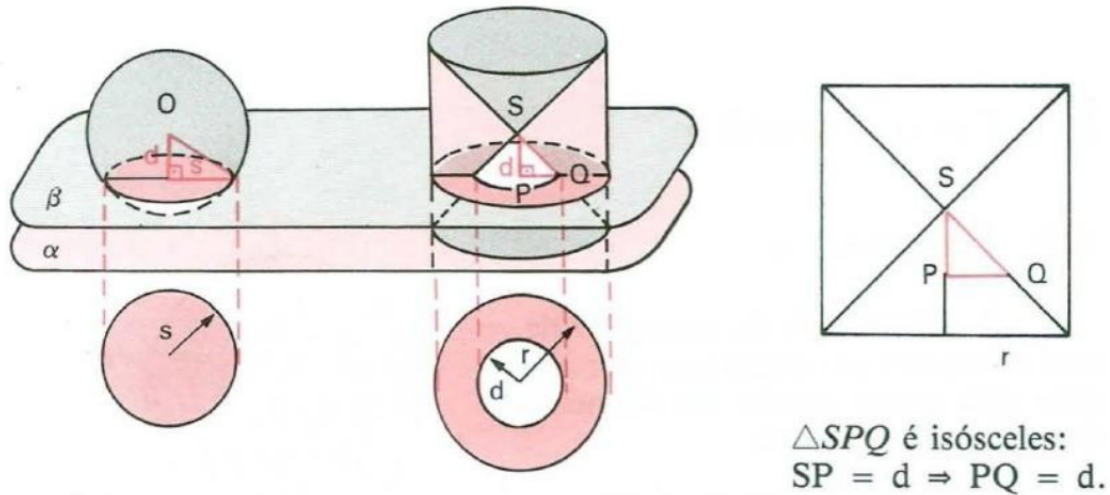
2.4 ESFERA

A expressão que determina o volume da esfera já foi deduzida anteriormente, aqui vamos utilizar o princípio de Cavalieri (Definição 23) para determiná-la e exibir a construção de um *Applet*

(denominação dada a arquivo criados no GeoGebra) que poderá ser empregado pelos docentes do ensino médio afim de constatar dinamicamente o método usado pela geometria espacial para achar tal expressão.

Consideremos inicialmente uma esfera de raio R e um cilindro regular de altura $2R$, e neste cilindro está dois cones, conforme a figura 2.20. Ambos os sólidos estão sobre o plano α e seja β um plano paralelo que os intersectam.

Figura 2.20: Comparação entre Esfera e Antclépsidra



Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar(FME) vol 10.

A interseção do plano β com a esfera é um círculo de raio s . Se d é a distância do centro O ao plano β , temos: $r^2 = d^2 + s^2 \rightarrow s^2 = r^2 - d^2$. Portanto, a área da seção circular é dada por: $\pi s^2 = \pi(r^2 - d^2)$. O volume do cilindro equilátero de raio R menos o volume dos dois cones de raio R e altura R (ou seja, o volume da antclépsidra) é:

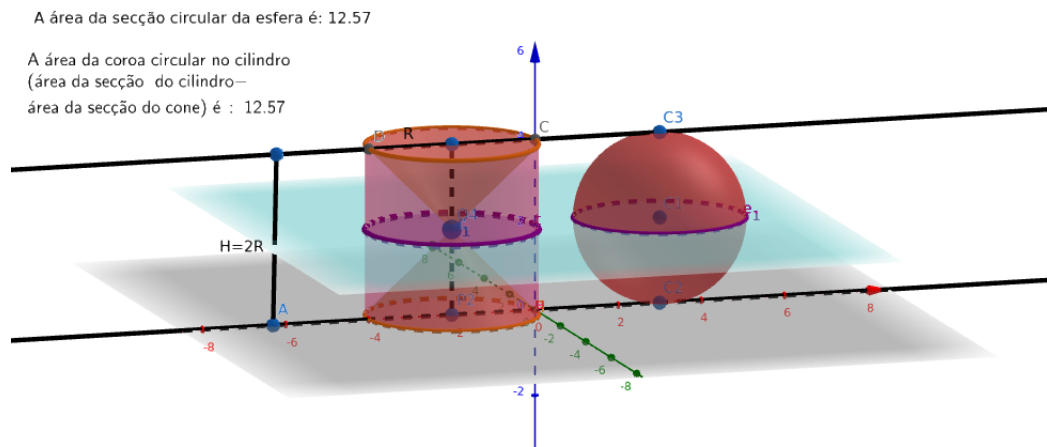
$$\pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

A área gerada por β interseccionando o cilindro, menos a união dos dois cones, a antclépsidra, será uma coroa circular de raios r e d , e também de área igual a $\pi(r^2 - d^2)$. A igualdade das áreas das seções permite concluir, pelo princípio de Cavalieri, que a esfera tem o mesmo volume que a antclépsidra; ou seja, seu volume é

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (2.6)$$

A seguir é exibido a construção de um *Applet*³, criado com o intuito de para verificar a demonstração acima dinamicamente.

Figura 2.21: Applet



Fonte: o autor (2021).

Construir o *Applet* no GeoGebra 3d que está representado na figura 2.21 requiriu os seguintes passos:

Passo 1: Crie os pontos $(3, 0, 2)$ e $(3, 0, 4)$ para a esfera de raio 2.

Passo 2: Crie os pontos $(-2, 0, 0)$ e $(-2, 0, 4)$ para o cilindro de raio 2.

Passo 3: Crie um parâmetro h que vai variar de 0 a 4. Será este parâmetro que fará o plano β paralelo ao plano da base percorrer os sólidos seccionando-os.

Passo 4: Por $(-2, 0, 4)$ e $(-3, 0, 4)$ traçar uma reta e por $(-2, 0, 0)$ e $(3, 0, 0)$ traçar outra reta.

Passo 5: Por $(3, 0, 2)$ gerar uma esfera de raio 2 e um cilindro seleccionando os pontos $(-2, 0, 4)$ e $(-2, 0, 0)$ com raio 2.

Passo 6: Crie um ponto de coordenadas $(x, 0, h)$ e passe por este ponto um plano paralelo ao plano xy . Agora fazendo o parâmetro h variar o plano irá variar também; seccionando a esfera e o cilindro.

Passo 7. Crie um cone de vértice $(-2, 0, 2)$ com ponto $(-2, 0, 4)$ e raio 2; crie um cone no ponto $(-2, 0, 0)$ e com vértice em $(-2, 0, 2)$ e raio 2.

Passo 8. O plano vai seccionar os sólidos e a antclépsidra terá a mesma área da secção esférica. Logo, pelo principio de Cavaliere tais sólidos tem o mesmo volume.

³ Tal *Applet* pode ser encontrado em: <https://www.geogebra.org/m/rhc3efks>.

Capítulo 3

INTEGRAL DE RIEMANN x PRINCÍPIO DE CAVALIERI

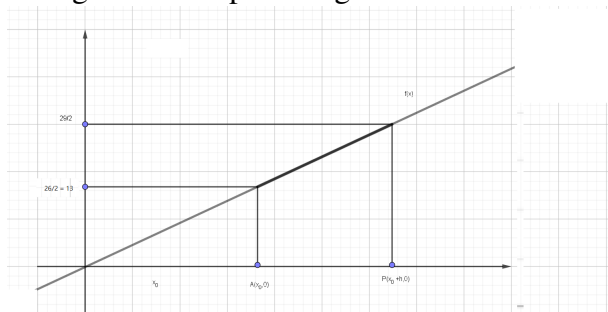
O presente capítulo trata de apresentar aplicações concretas dos conceitos introduzidos e um debate argumentativo entre os princípio de Cavaliere e a Integral de Riemann, quanto suas aplicações ao volume de sólidos de revolução. Destas aplicações podemos analisar a praticidades dos métodos e sua fórmulas. No final do capítulo é abordada uma aplicação do cálculo de volume de sólidos de revolução com auxílio do software GeoGebra.

3.1 APLICAÇÕES

Exemplo 20. Exemplo do balde de tinta .

Um balde de tinta tem o formato de um tronco de cone reto. Suas dimensões são : raio menor = $26/2$ cm , raio maior = $29/2$ cm e *altura* = 32 cm. Os números 29 e 26 são os diâmetros do balde. A imagem 3.1 representa um modelo matemático da planificação da superfície geratriz de tal tronco.

Figura 3.1: Superfície geradora do sólido.



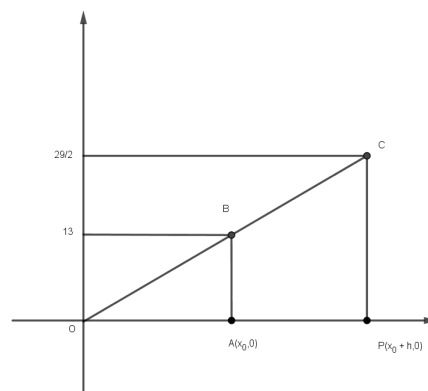
Fonte: o autor (2021).

Como $h = 32$ cm, P se torna $P(x_0 + 32, 0)$. Há, pelo menos, dois meios de resolver isso. O

primeiro consiste em achar a função $f(x)$ e aplicar a fórmula $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$. O segundo é mais geométrico e consiste em determinar x_0 para aplicar a Proposição 1 (que implica na utilização da fórmula (2.5)). Existe ainda o método pela geometria clássica que consiste no uso da fórmula $V = \frac{\pi h}{3} [r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2]$. aborda-se, de imediato, o primeiro meio: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$. Por se tratar de um cone, sabe-se (já foi mostrado no trabalho) que $f(x) = \frac{r}{h}x$. Para eliminar possíveis confusões, adota-se nesta expressão, o h como a altura do cone, isto é, a distância do vértice até a base $(h, 0)$.

Para distinguir a altura do cone e a altura do tronco de cone denota-se H : altura do cone e h : altura do tronco. Note que $H = h + x_0$. Assim, a função passa a ser $f(x) = \frac{\pi r_{\text{maior}}}{H}$, portanto determinar x_0 é essencial para a dedução da função. Os extremos de integração seriam de x_0 a $x_0 + h$.

Figura 3.2: Modelo.



Fonte: o autor (2021).

Para determinar x_0 , a figura 3.2 deve ser atentamente observada, pela semelhança entre os triângulos $\triangle OBA$ e $\triangle OCP$, é permitido escrever

$$\frac{x_0}{x_0 + h} = \frac{13}{29/2} \Rightarrow \frac{x_0}{x_0 + h} = \frac{13}{14,5}$$

$$14,5x_0 = 13x_0 + 13h$$

$$\frac{3}{2}x_0 = h13 \Rightarrow x_0 = (2h13)/3,$$

fazendo $h = 32$

$$x_0 = 832/3 = 277,3$$

Como $H = x_0 + h = 277,3 + 32$ tem-se $H = 309,3$; que é a altura do cone. Para determinar a

função fazemos $\frac{r_{maior}}{H}$ e obtém-se $f(x) = \frac{r}{H}x = 14,5/309,3 = 0,04688x$. De posse da função e dos extremos de integração, é possível usar a expressão (2.1).

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_{277,3}^{309,3} [0,04688x]^2 dx$$

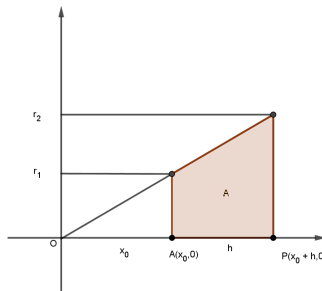
$$V = \pi(0,04688)^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{277,3}^{309,3}$$

$$V = \frac{\pi \alpha^2}{3} [(309,3)^3 - (277,3)^3]$$

$$V = 19015,5787 \text{ cm}^3$$

Abordando pelo Segundo meio, ou seja, utilizando a fórmula (2.5) da Proposição 1. Antes de realizarmos os cálculos algumas palavras sobre esta proposição serão úteis no que se seguirá.

Figura 3.3: Superfície geratriz.



Fonte: o autor (2021).

Considerando a figura 3.3, seja $H = x_0 + h$ a altura do cone e h é a altura do tronco do cone. A proposição 1 enuncia que :

Teorema 5. *Seja $f(x) = \alpha x, \alpha > 0$, com $f(x_0) = r_1$ e $f(x_0 + h) = r_2, r_1 < r_2$, conforme figura acima. O volume do conjunto A rotacionado em relação ao eixo x é dado por*

$$V = \frac{\pi r_2^2}{3} \left[H - \frac{(x_0)^3}{H^2} \right]$$

Onde $H = h + x_0$.

Calculando-se o volume, sabendo que $x_0 = 277,3$, $h = 32$, $H = 309,3$ e $r_{maior} = 14,5$ então

$$V = \frac{\pi(14,5)^2}{3} \left[309,3 - \frac{(277,3)^3}{(309,3)^2} \right]$$

$$V = 19015,6328 \text{ cm}^3$$

Os valores x_0 e H já haviam sido calculados anteriormente não havia motivos para os calcular novamente. Para finalizar, usaremos

$$V = \frac{\pi h}{3} [(r_1)^2 + r_1 r_2 + (r_2)^2]$$

Sendo h a medida da altura do tronco de cone, para obter um certo respaldo aos resultados anteriores pode-se calcular, ainda,

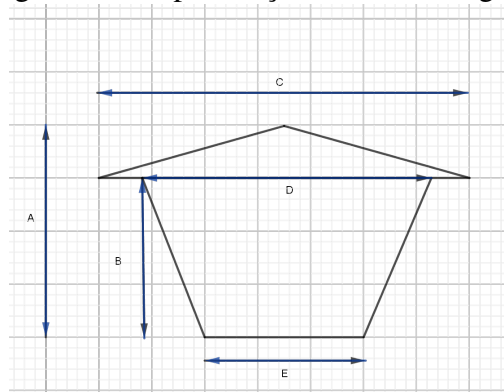
$$V = \frac{\pi 32}{3} [13^2 + 14,5 \cdot 13 + 14,5^2]$$

$$V = 19015,8210$$

Em todos os meios foi usado $\pi = 3,14$.

Exemplo 21. Caixa D'água. Considere a imagem 3.4.

Figura 3.4: Representação da Caixa d'água.



Fonte: o autor (2021).

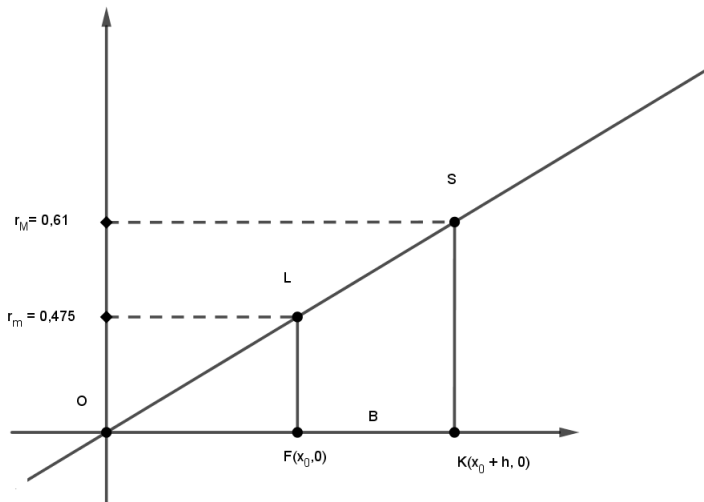
O objetivo aqui é calcular o volume de uma caixa de água a modelando como se fosse um tronco de cone. Tem-se as seguintes legendas para as medidas acima. A: altura com tampa B: altura sem

tampa C: diâmetro com tampa D: diâmetro sem tampa E: diâmetro da base. E suas medidas, em metros, são as seguintes :

A	B	C	D	E
0,72	0,58	1,24	1,22	0,95

$D/2$ e $E/2$ são, respectivamente, os raios maior e menor. Denota-se $r_M = D/2 = 0,61$ e $r_m = E/2 = 0,475$. Tem-se então o gráfico 3.5.

Figura 3.5: Planificação da geratriz do Cone



Fonte: o autor (2021).

Vamos usar a fórmula (2.5). Pela semelhança de triângulo, caso A.A.A; $\triangle OLF = \triangle OSK$; pode-se escrever

$$\frac{x_0}{x_0 + h} = \frac{0,475}{0,61}$$

$$0,135x_0 = 0,475h$$

$$x_0 = \frac{0,475}{0,135}h, h = B$$

$$x_0 = 2,04$$

Calculando H obtem-se $H = x_0 + h = 2,04 + 0,58 = 2,64$; e tendo-se todos os dados de que a fórmula necessita, deriva

$$V = \frac{\pi r_{maior}^2}{3} \left[H - \frac{(x_0)^3}{H^2} \right]$$

$$V = \frac{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}{3} \left[2,64 - \frac{(2,04)^3}{(2,64)^2} \right]$$

$$V = \frac{\pi(0,61)^2}{3} [1,4219]$$

$$V = 0,5536 \text{ m}^3$$

Com o uso da expressão (2.1) vem , dados $x_0 = 2,04, b = H = 2,64$ e $f(x) = \frac{r_{maior}}{H}x = \alpha x$,

$$V = \pi \int_{x_0}^{x_0+h} [\alpha x]^2 dx$$

$$= \pi [\alpha]^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x_0}^{x_0+h}$$

$$V = \frac{\pi \alpha^2}{3} [(x_0 + h)^3 - (x_0)^3]$$

Há ainda um terceiro método para resolver:

$$V = \frac{\pi h}{3} [r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2]$$

$$V = \frac{\pi B}{3} \left[\frac{D^2}{4} + \frac{D.E}{4} + \frac{E^2}{4} \right]$$

$$V = \frac{\pi(0,58)}{3} [(0,61)^2 + 0,61.0,475 + (0,475)^2]$$

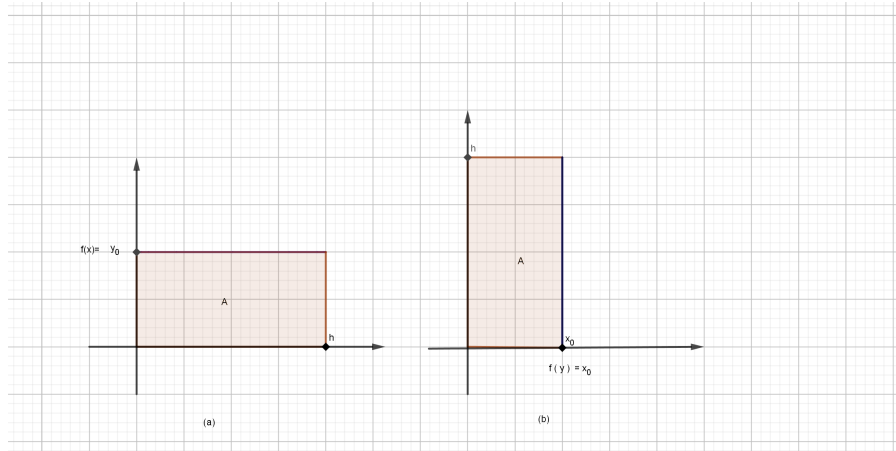
$$V = 0,5390 \text{ m}^3$$

Como em $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l}$, esta caixa de água tem a capacidade de 539,0 l; um pouco mais de 500 l. Este valor corrobora os calculados anteriormente. Estes dois exemplos mostram aplicações do cálculo à vida real. A Proposição 1 usa-se do cálculo para sustentá-lo e da trigonometria para aplicá-lo, então é também uma aplicação do cálculo. Pode-se resolver os mesmos problemas simplesmente aplicando a expressão $\frac{\pi h}{3} [r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2]$ mas ao se utilizar os meios alternativos somos levados a

pensar sobre os mesmos problemas de forma diferente ao mesmo tempo em que nos relembramos de conceitos matemáticos que nos ajudam a aplicá-los.

Exemplo 22. Volume do Cilindro. Comparação entre a dedução pelo Princípio de Cavalieri e Integral de Riemann. Observe a imagem 3.6.

Figura 3.6: Retângulo com alturas y_0 e x_0 .



Fonte: o autor (2021).

em (a) $f(x) = y_0$, onde y_0 é o raio do cilindro reto. Seu volume é

$$V = \pi \int_0^h [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^h y_0^2 dx$$

$$V = \pi y_0^2 [x]_0^h = \pi y_0^2 [h - 0]$$

$$V = \pi y_0^2 h.$$

Ou seja, essencialmente o volume do cilindro é $\pi \cdot \text{raio}^2 \cdot \text{altura}$. Poderíamos ter também a função $f(y) = \text{constante}$, conforme em (b) na figura 3.6. Assim o volume seria

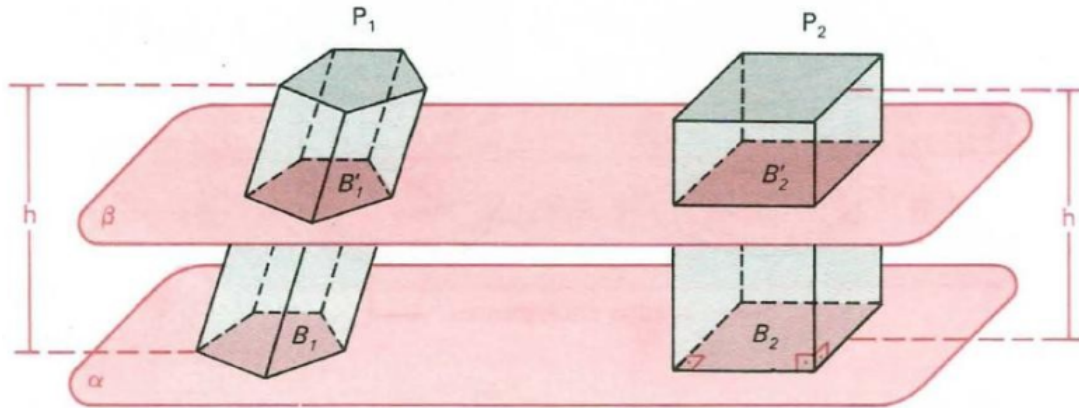
$$V = \pi \int_0^h x_0^2 dx = \pi x_0^2 h.$$

Foi trocada a variável e não foi preciso trocar de equação, isto é, não foi usado $2\pi \int_a^b xf(x)dx$ no lugar de $\pi \int_a^b f(x)^2 dx$.

A seguir será deduzido o volume do cilindro pelo princípio de Cavalieri. A aplicação do princípio de Cavalieri, em geral, implica na colocação dos sólidos com base num mesmo plano, paralelo ao qual estão as secções de áreas iguais (que é possível usando congruência). Antes de tratar do cilindro comenta-se, brevemente, sobre o volume do prisma.

"Considera-se um prisma P_1 de altura h e área da base $B_1 = B$ e um paralelepípedo retângulo de altura h e área da base $B_2 = B$ (o prisma e o paralelepípedo tem altura congruente e bases equivalentes).

Figura 3.7: Prisma e Paralelepípedo



Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar vol. 10.

Suponha, sem perda de generalidade , que os dois sólidos tem as bases num mesmo plano e estão num dos semiespaços determinado por este plano, α é o plano. Qualquer plano β que é paralelo a α , que seccione P_1 , também secciona P_2 e as secções , B'_1 e B'_2 respectivamente, tem áreas iguais pois são congruentes as respectivas bases.

$$(B'_1 = B, B'_2 = B, B_1 = B_2) \Rightarrow (B'_1 = B'_2)$$

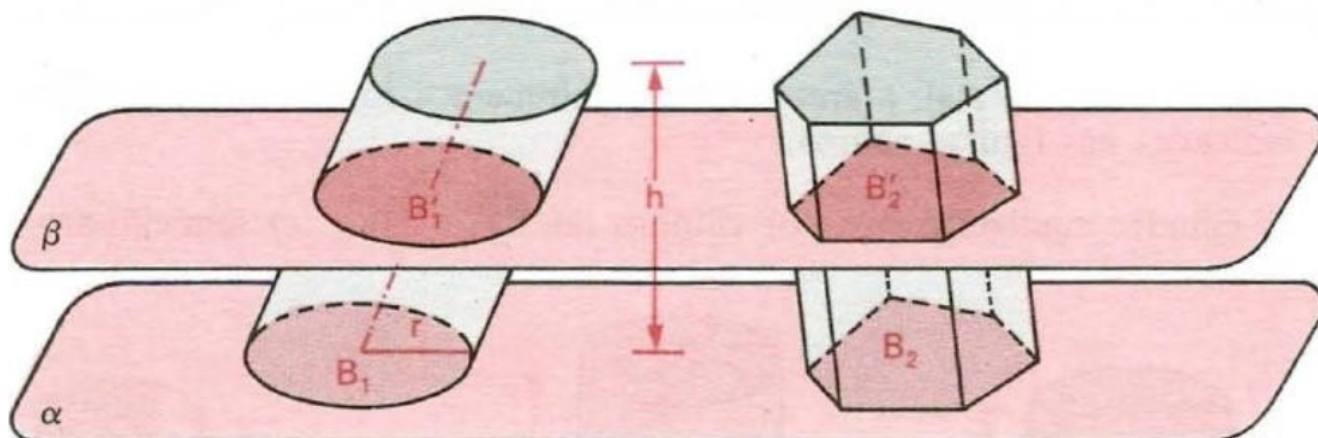
Então pelo princípio de Cavaliere, o prisma P_1 e o paralelepípedo P_2 tem volumes iguais. $V_{P_1} = V_{P_2}$, como $V_{P_2} = B_2 h$ ou seja $V_{P_2} = Bh$ vem que $V_{P_1} = Bh$, ou resumidamente $V = Bh$. *O volume de um prisma é o produto da área da base pela medida da altura.*"

(DOLCE; PONPEO, p. 166)

A partir daqui, uma vez tratado sobre o volume do prisma, aborda-se o volume do cilindro .

"Consideremos um cilindro de altura h e área da base $B_1 = B$ e um prisma de altura h e área da base $B_2 = B$ (o cilindro e o prisma tem alturas congruentes e base equivalentes).

Figura 3.8: Cilindro e Prisma



Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar vol. 10.

Suponha que os dois sólidos tem as base num mesmo plano α e estão num mesmo semi espaço determinado por α . Qualquer plano β paralelo a α , que seccione o cilindro, também secciona o prisma e as secções (B'_1 e B'_2 , respectivamente) tem áreas iguais pois são congruentes as respectivas bases.

$$(B'_1 = B_1, B'_2 = B_2, B_1 = B, B_2 = B) \Rightarrow B'_1 = B'_2$$

Então, pelo Princípio de Cavaliere, o cilindro e o prisma tem volumes iguais.

$$V_{cilindro} = V_{prisma}$$

$V_{prisma} = B_2 h$ ou seja $V_{prisma} = Bh$; vem que $V_{cilindro} = Bh$. Concluindo: *O volume do cilindro é o produto da área da base pela medida da altura. Se $B = \pi r^2$ então temos $V = \pi r^2 h$.*

(DOLCE; PONPEO, p. 220)

No uso do princípio de Cavaliere deve-se comparar um sólido X , aquele que deseja-se saber o volume, com um outro sólido S , de volume já determinado por meio de alguma expressão ou método. A dificuldade aqui reside em encontrar o sólido S , que seja adequado para fazer tal comparação. Por exemplo, a esfera; se compararmos a esfera com um paralelepípedo vemos de imediato que as secções não tem mesma área, em geral, por exemplo na base, a área do paralelepípedo será B_2 enquanto que a área na esfera será 0. Ou seja, o paralelepípedo não é o sólido adequado para a comparação, assim como o prisma também não o é.

A determinação do volume da esfera pela fórmula $\pi \int_a^b f(t)^2 dt$ se dá através de uma simples aplicação mecânica da fórmula. Digamos que temos $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$; uma circunferência de

centro $(0,0)$ e raio a , vamos considerar apenas a parte desta circunferência contida no primeiro e segundo quadrante, ou seja, $y = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, seguindo com o cálculo teríamos

$$V = \pi \int_{-a}^a \left(\sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a$$

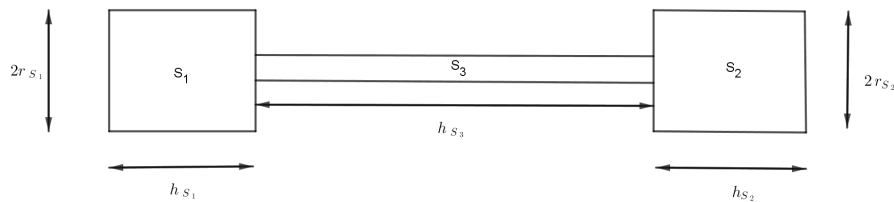
$$V = 2\pi \left[\frac{2a^3}{3} \right] = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

Do ponto de vista prático, a aplicações das equações $\pi \int_a^b f(t)^2 dt$ ou $2\pi \int_a^b t f(t) dt$ são mais vantajosas. Para determinar o volume da esfera com o princípio de Cavalieri precisaríamos compará-la com a ant-clepsidra, tarefa que exigiria muita criatividade. O uso das equações também permite o cálculo de volumes de um número mais amplo de sólidos, como alguns que foram dados como exemplos no Capítulo 2, como é o caso do exemplo 12.

Os sólidos que podem ter seus volumes calculados pelo cálculo integral dependerá da função f (que gerará a superfície do sólido) ser integrável ou não nos limites dados; ou seja, isso aumenta a gama de volumes que podem ser calculados apesar de haver limitações.

Exemplo 23. O Volume de Haltere. O que se deseja é calcular o volume de um haltere que tem a forma apresentada na figura 3.9. Digamos que estamos diante de uma situação em que nos

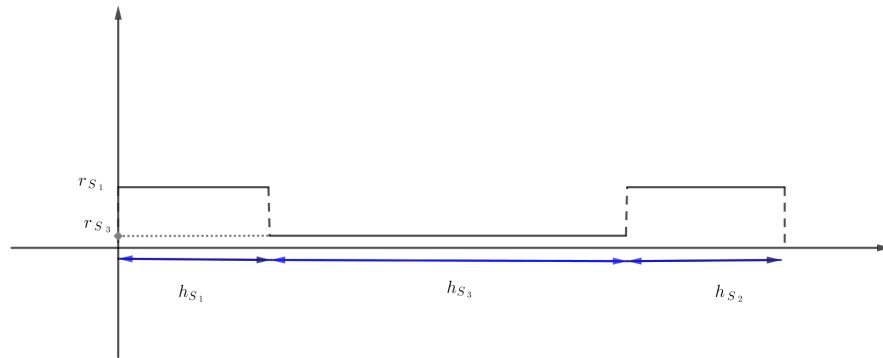
Figura 3.9: Representação do haltere.



Fonte: o autor (2021).

interessa saber o volume do objeto, por exemplo, poderíamos querer calcular o seu peso fazendo o cálculo do produto do volume pela densidade. A figura 3.10 contém as medidas. O haltere pode ser

Figura 3.10: Decomposição da forma do Haltere em funções contínuas.



Fonte: o autor (2021).

decomposto em três sólidos, os dois pesos (S_1 e S_2) e a barra (S_3). Os pesos nos extremos devem ser iguais e $S_1 = S_2$. Calculamos os comprimentos dos círculos dos cilindros de S_1 e S_3 para determinar seus raios.

Os dados são os seguintes, comprimento circular de $S_1 = 52,4\text{ cm}$, comprimento circular de $S_3 = 10\text{ cm}$. Como $C = 2\pi r \Rightarrow r_{S_1} = \frac{52,4}{2\pi} = 8,3439$ e $r_{S_3} = \frac{10}{2\pi} = 1,5923$. As alturas são $h_{S_1} = 18\text{ cm}$ e $h_{S_3} = 92\text{ cm}$. Sendo que $S_1 = S_2$, temos que o volume total será

$$V = 2V_{S_1} + V_{S_3} \quad (3.1)$$

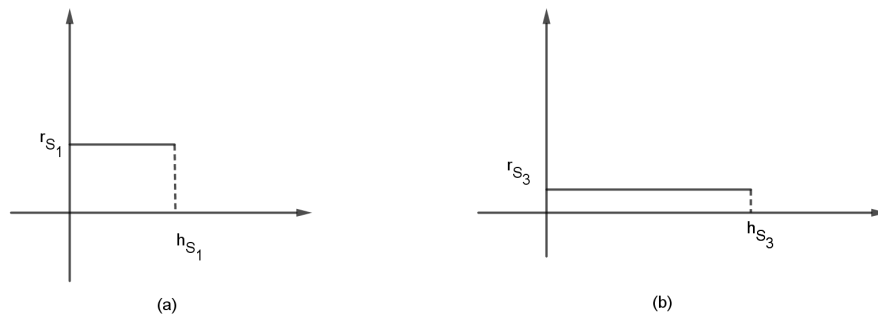
Há duas formas de se calcular (3.1)

-PRIMEIRA: $V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h \Rightarrow$

$$V = 2[\pi r_{S_1}^2 h_{S_1}] + \pi r_{S_3}^2 h_{S_3} \quad (3.2)$$

- SEGUNDA: Fazendo uso do cálculo. De acordo com imagens 3.11

Figura 3.11: Decomposição do Haltere em dois gráficos.



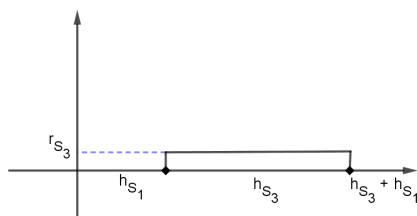
Fonte: o autor (2021).

tem-se

$$\begin{aligned}
 V &= 2\left[\pi \int_0^{h_{S_1}} (r_{S_1})^2 dx\right] + \pi \int_0^{h_{S_3}} (r_{S_3})^2 dx \\
 V &= 2\pi r_{S_1}^2 [x]_0^{h_{S_1}} + \pi r_{S_3}^2 [x]_0^{h_{S_3}} \\
 &= 2\pi r_{S_1}^2 h_{S_1} + \pi r_{S_3}^2 h_{S_3}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

E isto é exatamente igual a expressão (3.2). Se na imagem (b) mudarmos o gráfico para a figura 3.12

Figura 3.12: Representação do sólido 3(barra).



Fonte: o autor (2021).

Haverá uma mudança nos limites de integração da segunda integral, mas o volume permanece

o mesmo. Confira

$$V = 2\pi \int_0^{h_{S_1}} [r_{S_1}]^2 dx + \pi \int_{h_{S_1}}^{h_{S_1}+h_{S_3}} [r_{S_3}]^2 dx$$

$$V = 2\pi r_{S_1}^2 h_{S_1} + \pi r_{S_3}^2 [x]_{h_{S_1}}^{h_{S_1}+h_{S_3}}$$

$$V = 2\pi r_{S_1}^2 h_{S_1} + \pi r_{S_3}^2 h_{S_3}$$

E isso é igual a expressão (3.2) e (3.3). Denomina-se $E = 2\pi r_{S_1}^2 h_{S_1}$ o volume dos ‘pesos’ nos extremos da barra e $B = \pi r_{S_3}^2 h_{S_3}$ como o volume da barra. Nos cabe agora calcular apenas os valores numéricos

$$V = 2\pi r_{S_1}^2 h_{S_1} + \pi r_{S_3}^2 h_{S_3} = E + B$$

$$V = 2\pi(8,3439)^2(18) + \pi(1,5923)^2(92)$$

$$V = 7869,9126 + 732,4263$$

$$V = 8662,3389 \text{ cm}^3$$

O produto entre E e B pela densidade média dos materiais de que são feitos, resultaria em seus respectivos pesos(massa), sendo que a densidade deve estar na unidade adequada, que neste caso é g/cm^3 . Por exemplo, se a densidade dos sólidos S_1 e S_2 for $d_0 g/\text{cm}^3$, então seu peso será

$$P_E = E \cdot d_0$$

Da mesma forma, se a densidade do metal da barra for $d_1 g/\text{cm}^3$, então o peso do sólido S_3 será

$$P_B = B \cdot d_1$$

Assim a massa do objeto com um todo é

$$P = E \cdot d_0 + B \cdot d_1$$

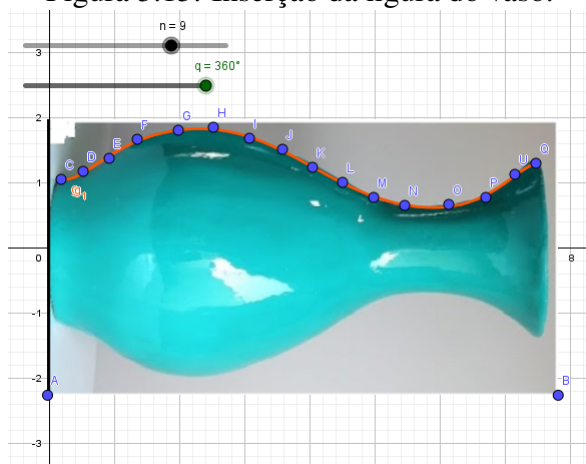
que será dado em gramas (g).

3.2 APLICAÇÃO AO GEOGEBRA

A ideia é basicamente modelar o vaso no GeoGebra com o objetivo de encontrar a função geratriz de sua superfície, usando para isso uma foto do objeto. Uma vez encontrada a função e modelado o vaso fazer-se-á uso dos comandos do GeoGebra para calcular o volume, baseado nas expressões (2.1) ou (2.2). Precisa-se de duas janelas de visualização, uma clássica e uma 3d. Para atingir o objetivo, os seguintes passos foram realizados

- 1 . Insira a imagem(o vaso deve estar na horizontal de tal forma que o eixo Ox passe pelo seu centro, conforme ilustra a figura 3.13).

Figura 3.13: Inserção da figura do vaso.



Fonte: o autor (2021).

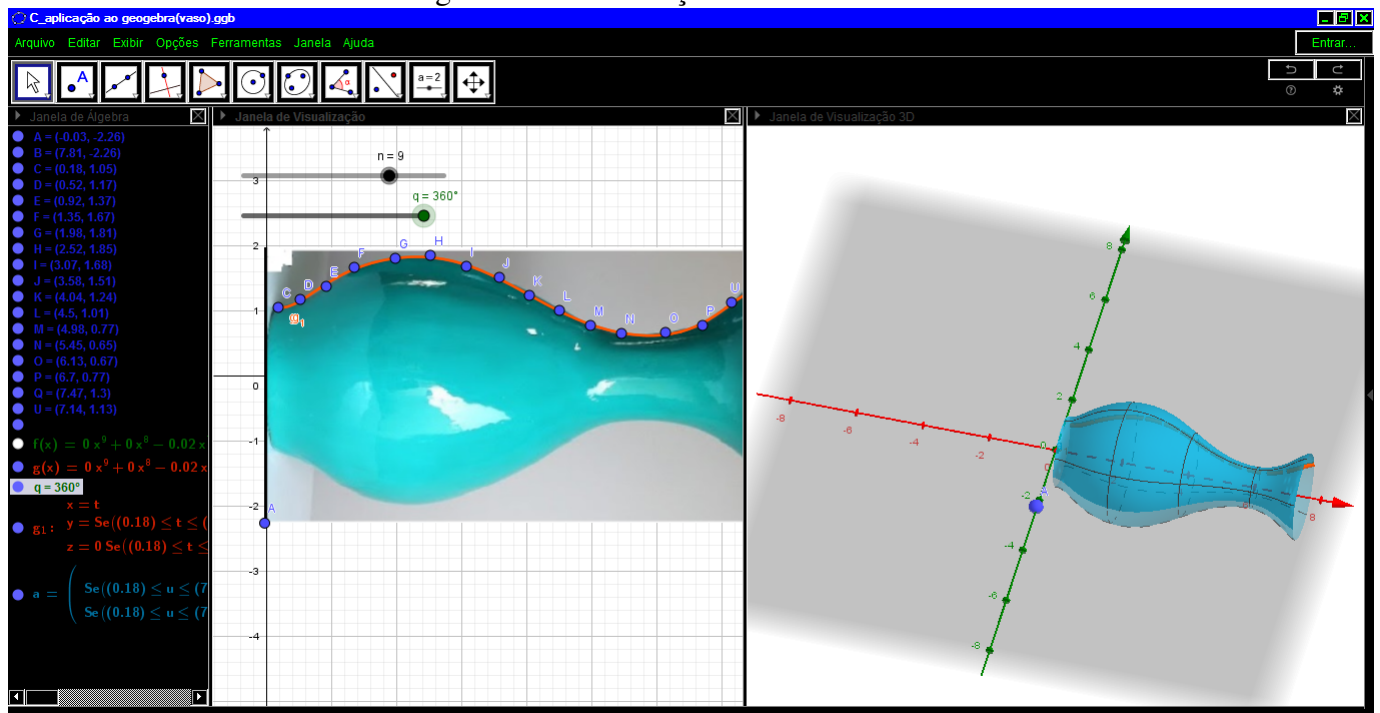
- 2 . Marque diversos pontos na superfície do vaso que fica no primeiro quadrante. Tal conjunto de pontos vamos denominar $\mathbb{P}$. Não foram colocados pontos nas bases.
- 3 . Crie um controle deslizante, n , de 1 até 12 com passo 1.
- 4 . Use o comando $f = \text{FitPoly}(< \{ \text{lista de pontos} \} >, < \{ \text{grau do polinômio} \} >)$. Com $\{ \text{lista de pontos} \} = \mathbb{P}$ e $\{ \text{grau do polinômio} \}$ sendo n .
- 5 . Controle o grau n para obter o melhor polinômio que se aproxime da superfície. O objetivo aqui é usar um segmento do polinômio para substituir a superfície. Se necessário ajuste alguns pontos.
- 6 . Use o comando $g = \text{Function}(f, x(<\text{primeiro ponto}>), x(<\text{último ponto}>))$. Desmarque a função f para que não seja mais visível e aumente o traço da função g .
- 7 . Vá nas configurações do Ponto A, avançado, localização e desmarque a opção 3D graphics. Faça isso para todos os pontos.

- 8 . Configure o visualizador 3D para não exibir o eixo z.
- 9 . Use o comando rotate(<object>,<angle>,<point>). Se g for definida como $g: \text{Function}(f, x(\langle \dots \rangle), x(\langle \dots \rangle))$ então rotate(g,q,xAxis) é o comando adequado.
- 10 . Crie o ângulo q que vai de 0 a 360, ou $0 \leq q \leq 2\pi$, passo(step) = 0.01
- 11 . Use o comando surface (<curve>,<angle>,<line>) $\Rightarrow$ Surface(g,q xAxis).

Tem-se:

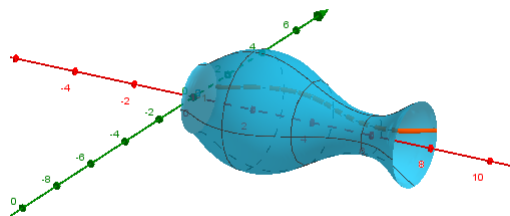
Quando $q = 2\pi$ obtém-se os seguintes gráfico na janela de visualização 3D:

Figura 3.14: Construção terminada.



Fonte: o autor (2021).

Figura 3.15: Modelo Tridimensional do vaso.



Fonte : o autor (2021).

Seja $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_k(x_k, y_k)$ os pontos destacados na figura tais que $x_1 < x_2 < \dots < x_k$. Seja $g(x)$ o polinômio que passa por todos os pontos P_i , $1 \leq i \leq k$, que se aproxima da geratriz do vaso, que é um sólido de revolução conforme ilustra a figura 3.14.

O volume do sólido exibido na imagem 3.15 será dado por

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_k} [g(x)]^2 dx \quad (3.4)$$

Neste caso o polinômio tem grau 9 e os os pontos são $P_1(x_1, y_1) = C(0.18, 1.05)$ e $P_k(x_k, y_k) = Q(7.47, 1.3)$. Usamos o GeoGebra para fazer $[g(x)]^2$; seja $t(x) = g(x)^2$, então (3.4) será $V = \pi \int_{x_1}^{x_k} t(x) dx$. Então o volume do vaso é

$$V = \pi \int_{0.18}^{7.47} t(x) dx = 38.7 \text{ u.v.}$$

Observe que nesta aplicação a maior dificuldade foi encontrar a função que serve como curva geratriz para este sólido de revolução. O polinômio achado é $g(x) = 0x^9 + 0x^8 + 0.02x^7 + 0.15x^6 - 0.72x^5 + 2.14x^4 - 3.88x^3 + 3.89x^2 - 1.27x + 1.18$. Calcular $g(x)^2$ manualmente seria um trabalho monstruoso da mesma forma que determinar $\int_{x_1}^{x_k} t(x) dx$. O GeoGebra é uma ferramenta bastante completa, servindo não apenas para encontrar a função que é a interseção do sólido com o primeiro quadrante mas também realizando estes cálculos algébricos. Veja que, partindo de de um objeto real, para um modelo onde foi possível, através de métodos computacionais, determinar a função e usar a expressão (2.1). O vaso é só uma ilustração do processo, pode-se aplicá-lo a outros sólidos onde se tenham dificuldades de determinar o volume, ou apenas necessitam de um modelo 3d.

Capítulo 4

APLICAÇÕES NO GEOGEBRA

"Umas das principais contribuições das tecnologias digitais para a educação matemática foi tornar possível a "concretização" de objetos matemáticos na tela do computador, dando a sensação de realismo e existência material pela possibilidade de manipulação e alteração de suas propriedades. Com a possibilidade de manipulação de objetos matemáticos, surge uma nova forma de pensar e fazer matemática, configurando-se uma extensão do pensamento do indivíduo "(Notare e Basso, Geometria dinâmica 3D- novas perspectivas para o pensamento espacial, 2016, p.2)

Umas das possibilidades mais óbvias para o uso do GeoGebra é visualização de gráficos e modelos matemáticos. Podendo ser usado na educação básica de forma simples, sem que exija dos estudantes familiaridade com o programa; o estudante modela , uma figura a partir de dados de problemas ou, até mesmo de medidas reais do mundo concreto, criando a partir disto um objeto que pode ser manipulado e alterado de forma dinâmica gerando desta forma uma atividade de experimentação, à partir do qual poderá observar certos fenômenos atribuindo significado. A seguir exemplificamos questões de geometria que ilustram como seria o uso do GeoGebra na sala de aula.

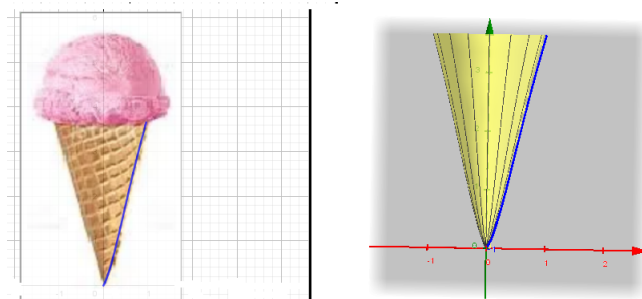
Exemplo 24 (Modelando um Sorvete). Qual é a capacidade de uma casquinha de sorvete de forma cônica cujo diâmetro é de $6cm$ e cuja altura é $10cm$? (use $\pi = 3,14$.) (fonte: Dante, volume único, 1ª ed, 2009, SP, p. 388)

diâmetro= $6cm$; raio = $3cm$; $h = 10cm$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 10 \approx 94,20cm^3$$

Como $1cm^3 = 1ml$, a capacidade do copinho é de $94,20ml$, aproximadamente. A figura 4.1 representa um sorvete qualquer e seu modelo pelo GeoGebra. Apesar deste modelo parecer trivial, os princípios que levam a sua construção poderiam ser utilizados para sólidos mais complexos,

Figura 4.1: Modelo 3D de um sorvete.



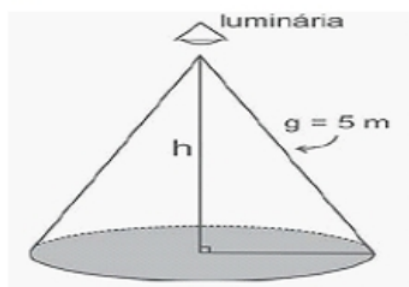
Fonte: o autor (2021).

onde a visualização mental ou o desenho no papel se tornariam difíceis.

Este exemplo ilustra como os professores da educação básica poderiam fazer uso de GeoGebra através de questões problemas, inicialmente simples. Muitas vezes em geometria não se consegue descrever a imagem em questão com qualidade satisfatória o que gera dificuldade na sua análise. Uma vez criando e modificando objetos matemáticos de forma dinâmica os estudantes acabam dando significado as suas propriedades e assim compreendendo de forma mais clara as expressões e demonstrações trabalhadas. Apesar das vantagens, não pode-se deixar de dizer , que o uso de softwares e outras tecnologias digitais com fins educacionais devem ser bem planejadas e discutidas antes de serem aplicados em sala de aula.

Exemplo 25 (Enem 2010). Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura Sabendo que luminária

Figura 4.2: Modelo.



Fonte: prova do Enem 2010.

deveria iluminar uma área circular de $28,26m^2$, considerando $\pi = 3,14$ a altura será igual à:

- (a) 3m
- (b) 4m

- (c) 5m
- (d) 9m
- (e) 16m.

Resolução: O cone é gerado por um triângulo retângulo de hipotenusa $g = 5m$ e catetos h e r , sendo válido o teorema de Pitágoras e a expressão $A_c = \pi r^2$ assim,

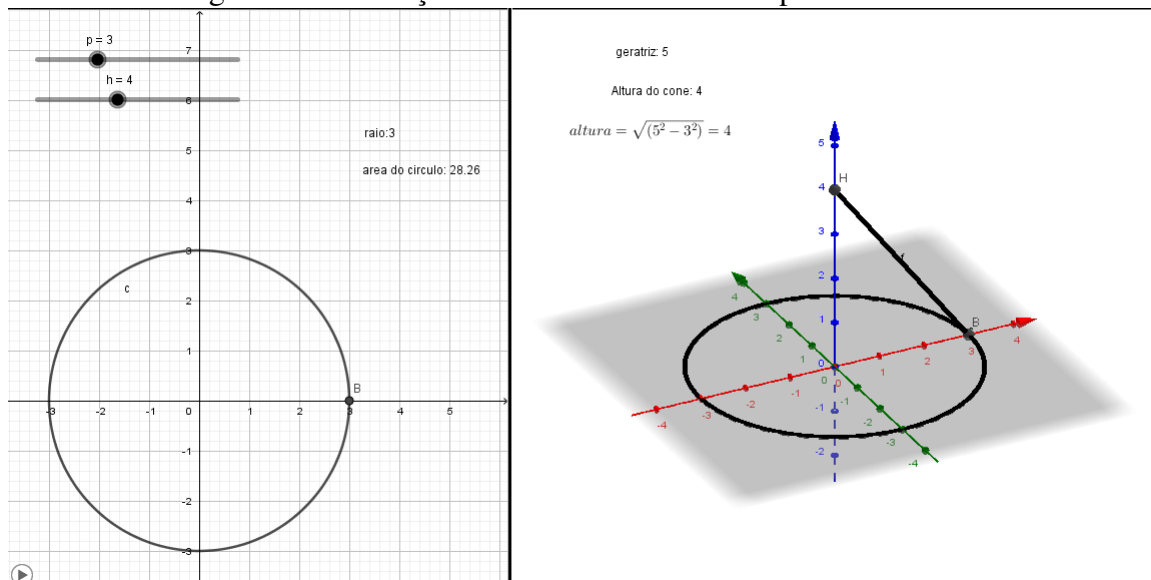
$$r^2 = \frac{A_c}{3,14} = \frac{28,26}{3,14} = 9$$

e pelo teorema de Pitágoras

$$h^2 = g^2 - r^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow h = 4.$$

Portanto, a altura é 4m, alternativa (b). Essa é uma abordagem analítica tradicional, a seguir é mostrado como este problema pode ser abordado com os recursos que o GeoGebra oferece. Em

Figura 4.3: Descrição do modelo da luminária pelo GeoGebra.



Fonte: o autor (2021).

um primeiro momento trabalha-se no $\mathbb{R}^2$; cria-se um ponto deslizante p assumindo valores de 0 a 10 e dois pontos $A(0,0)$ e $B(p,0)$ e em seguida uma circunferência de centro A e raio p . Defini-se $Area_c = \pi p^2$, onde $\pi = 3,14$. Varia-se p até que $Area_c$ se torne igual a 28,26 determinando desta forma o raio necessário para que a base tenha área de $28,26m^2$. Achou-se, para o valor de p , o número 3. A esta altura é possível simplesmente usar a fórmula de Pitágoras e resolver para h , mas segue-se realizando construções.

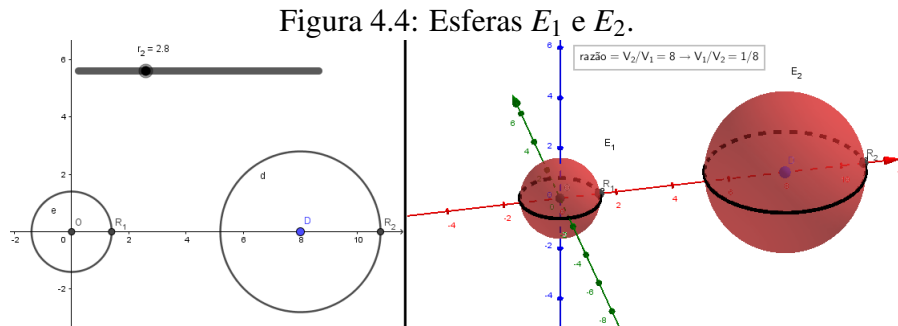
Cria-se, ainda, o ponto deslizante h de 0 até 10, com incremento de 0.01, e um ponto $H = (0,0,h)$. Na aba de visualização 3d , podemos ver o ponto H e criar um segmento de H até B , que será a geratriz. Mudamos h até que a geratriz fique igual a 5, obtendo de forma direta a altura procurada.

Exemplo 26 (Unifor-2013). As esferas E_1 e E_2 são tais que o diâmetro de E_1 é igual ao raio de E_2 . A razão entre os volumes de E_1 e E_2 , nessa ordem, é:

- (a) $1/2$
- (b) $1/3$
- (c) $1/4$
- (d) $1/6$
- (e) $1/8$.

Resolução:

Foram construídas duas esferas onde o raio de uma é a medida do diâmetro da outra. Seja E_1



Fonte: o autor (2021).

e E_2 e r_1 o raio de E_1 e r_2 o raio de E_2 , então $2r_1 = r_2 \Rightarrow r_1 = r_2/2$. Defini-se no GeoGebra os ponto $O(0,0)$ e $R_1(r_1,0)$, sendo r_1 dado por $r_2/2$ onde r_2 é um controle deslizante indo de 0 até 10, e por estes dois pontos determina-se uma esfera. Defini-se, ainda, de maneira arbitrária, os pontos $D(8,0)$ e $R_2(8+r_2,0)$ e também uma esfera. Denomina-se o volume da esfera E_1 como V_1 e, de forma análoga, V_2 a E_2 . Define-se $\text{razão} = V_2/V_1$. Observa-se que este valor é sempre o mesmo conforme variamos r_2 , logo generalizamos nosso pensamento de que esta razão é 8 para qualquer real estritamente positivo que não necessariamente esteja nos intervalos de r_1 e r_2 , assim $V_1/V_2 = 1/8$. De fato, este resultado é verdadeiro pois

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi(r_1)^3}{\frac{4}{3}\pi(r_2)^3},$$

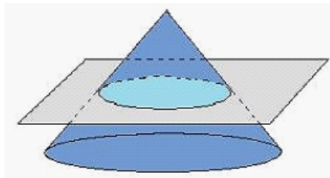
e como $r_1 = \frac{r_2}{2}$, vem

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi(\frac{r_2}{2})^3}{\frac{4}{3}\pi(r_2)^3} =$$
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{r_2^3}{8}}{r_2^3} = \frac{1}{8}$$

A alternativa (e) é a correta.

Exemplo 27 (Uece-2008.1). Um cone circular reto, cuja altura é h , é seccionado, por um plano paralelo à base, em duas partes: um cone cuja medida da altura é $\frac{h}{5}$ e um tronco de cone, conforme a figura. A razão entre a medida dos volumes do cone maior e do cone menor:

Figura 4.5: Cone reto de altura h .



Fonte: prova Uece-2008.1 .

- (a) 15
- (b) 45
- (c) 90
- (d) 125.

Resolução: Neste exemplo, a abordagem se estende além de apenas responder a certa pergunta. Usa-se quatro etapas estabelecidos por Vaz(2012) para investigação matemática com o GeoGebra, o texto abaixo foi retirado de 'Investigação matemática com o GeoGebra em uma propriedades dos Polígonos' escrita por Duelci Vaz, José Vasconcelos, Osni Filho e publicada pela revista Professor de matemática online Vol.3, Num. 1, 2015. e detalha estas quatro etapas.

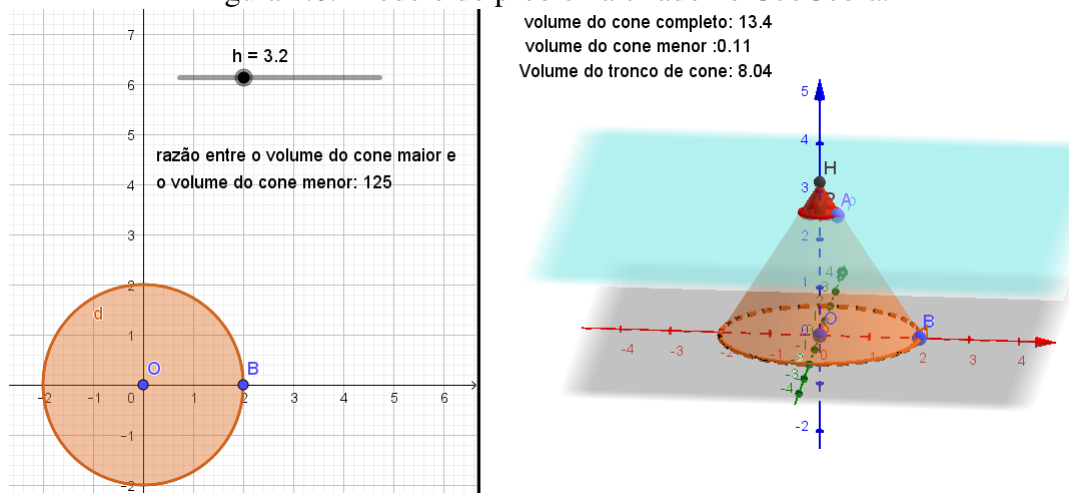
1. Experimentação: Explorar a capacidade de experimentar que o GeoGebra permite, graças a possibilidade de movimentarmos entes matemáticos poderemos comparar as representações algébricas e geométricas, percebemos propriedades, compreendermos definições e construirmos conceitos através das percepções obtidas.

2. Conjeturar: Levantarmos conjecturas relacionadas à primeira etapa. Conjeturar significa percebemos relações oriundas da experimentação, vislumbrarmos propriedades, relações, resultados gerais importantes para o bom desenvolvimento matemático. Uma vez percebida a conjectura podemos enunciá-la como resultado a ser investigado, em forma de pergunta ou problema.
3. Formalizar: A demonstração matemática da conjectura propriamente dita ou a apresentação de uma contra proposição da conjectura levantada, como argumento pedagógico compatível. Tal atitude é importante, pois não podemos, através da experimentação, aceitar o resultado sob o risco de não estarmos praticando os ideais da matemática.
4. Generalização: Depois de experimentarmos, conjecturarmos e formalizamos o saber matemático é importante fazermos generalizações do resultado, quando possível, isto é, investigarmos outras situações pertinentes, situações particulares, enfim, explorarmos o alcance do resultado obtido.

O software permite experimentação diversas e com isso fortalece a ideia de que a proposição é válida ou não. Abaixo é aplicada cada etapa na resolução deste problema.

Experimentação : Primeiro foi criado um controle deslizante h variando de 0 a 10 seguidos dos pontos $O(0,0)$ e $B(2,0)$. Na janela de visualização 3d definiu-se o ponto $H(0,0,h)$ e $P(0,0,h-h/5)$. Depois foi criado o cone de vértice H e base no círculo de centro O e raio 2.

Figura 4.6: Modelo do problema criado no GeoGebra.



Fonte: o autor (2021).

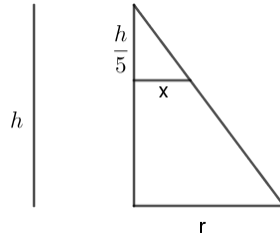
Defini-se também $z = h - h/5$ e é feita a interseção do plano com o cone e desta interseção destaca-se um ponto, A , e atribui-se j à distância de P à A ; j se torna assim o raio deste círculo.

Cria-se um cone de vértice em H e base no círculo de centro P e raio j que está contido no plano z . Agora que se tem dois cones pode-se obter a razão entre o volume do maior e do menor, observamos que esta razão é constante para qualquer valor de h sendo igual a 125, nos levando a pensar que a alternativa (d) é a correta.

Conjecturar : A partir da experimentação percebemos evidências visuais de que esse é um caso a ser investigado, pois essas demonstrações visuais permitem o pensamento que de fato a propriedade é válida para todos os cones. Será que a razão entre o volume dos cones na figura 4.5 é 125 para todos os cones?

Formalizar : Procura-se dar uma prova analítica e formal do fato. Denomina-se C o cone com as seguintes propriedades, altura h e raio r ; e o cone C_1 com raio x e altura $\frac{h}{5}$. Pela figura abaixo vemos

Figura 4.7: Triângulo retângulo.



Fonte: o autor (2021).

que pela semelhança de triângulos, caso A.A.A,

$$\frac{h}{r} = \frac{\frac{h}{5}}{x} \Rightarrow x = \frac{r}{5}.$$

Uma vez conhecida a altura e raio de cada um dos cones é possível determinar a razão entre seus volumes, como $V(C) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ e $V(C_1) = \frac{1}{3}\pi x^2 \frac{h}{5} = \frac{1}{3}(\frac{r}{5})^2 \frac{h}{5}$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{V(C)}{V(C_1)} &= \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}(\frac{r}{5})^2 \frac{h}{5}} \\ \frac{V(C)}{V(C_1)} &= \frac{r^2 h}{\frac{r^2 h}{125}} = \frac{1}{125} \end{aligned}$$

Foi obtido uma resposta formal para o problema; que nos diz que a razão é realmente 125. Portanto (d) é, sem dúvida, a alternativa correta.

Generalização : Já aqui extrapola-se o problema inicial e aproveita-se os passos anteriores para uma tentativa de generalizar o resultado obtido. Respondemos a pergunta: e se, ao invés da altura do cone menor ser $h/5$ for h/k , com $0 < k < h$?(desta forma a distância do ponto H ao ponto P será k .)

De forma análoga aos cálculos feitos na formalização, tem-se os cones C e C_1 sendo que a altura de C é h e seu raio é r e C_1 tem raio r/k e altura h/k . Assim $V(C) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ e $V(C_1) = \frac{1}{3}\pi(\frac{r}{k})^2 \frac{h}{k}$, logo, a razão é dada por

$$\frac{V(C)}{V(C_1)} = \frac{\frac{1}{3}\pi(r)^2 h}{\frac{1}{3}\pi(\frac{r}{k})^2 \frac{h}{k}}$$

$$\frac{V(C)}{V(C_1)} = \frac{r^2 h}{\frac{r^2 h}{k^3}} = \frac{1}{k^3}, \quad \forall k \in]0, h[.$$

Se $k = h$ teremos o cone menor com altura $h/h = 1$ e raio 1.

Ao decorrer deste trabalho, usou-se de integrais simples para o cálculo de volumes dos sólidos de revolução sempre acompanhando a teoria e exemplos com gráficos feitos, em sua grande maioria, no GeoGebra, e em vários casos este software foi uma ferramenta ativa essencial. Este capítulo, mostra, que por si só o GeoGebra é uma ferramenta excelente para o ensino da matemática, contendo enormes quantidades de funcionalidades e comandos que abrange os campos tradicionais da matemática, que são os campos da geometria e álgebra. Encerra-se, portanto, neste capítulo a tentativa de exibir algumas das funcionalidades que o GeoGebra dispõe sobre os sólidos, com esperança de incentivar sua adoção pelos discentes do curso de matemática, que serão futuros professores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Todos os objetivos pretendidos foram alcançados, se faz digno de menção a dificuldade em se obter textos que abordam a temática, ou assuntos semelhante, em português; a maioria dos textos que basearam esta pesquisa são livros de cálculos de uma variável e que não dão destino mais uma ou duas seções dentre seus capítulos para esta aplicação. Tal fato justifica a abordagem introdutória que se deu ao assunto, e que se tratando de um trabalho de conclusão de curso presumiu-se que não havia o dever de abordar o assunto de forma muito profunda. Deu-se uma abordagem que, no limite dos conhecimentos adquiridos ao longo do curso, se acha suficientemente fundamentada, do ponto de vista matemático, e que foi necessária para a compreensão das modelagens realizadas ao decorrer do trabalho.

A medida que a experiência crescia, diversas dificuldades relativas ao uso do software foram sendo superadas; tais dificuldades são comuns ao se trabalhar com um programa com diversas ferramentas, funções e comandos. Nas tarefas de descrever sólidos e auxiliar no cálculo de volumes, o GeoGebra atuou com papel de destaque, a subseção 3.2 e o capítulo 4 demonstram a versatilidade e poder desse Software. Não foram abordados, em detalhes, a sintaxe dos comandos do GeoGebra por se entender que isso fugiria por completo dos objetivos estabelecidos, entretanto, foram enunciados todos os comandos que foram julgados importantes, mesmo não sendo partes essenciais ao entendimento da pesquisa, por se entender que poderá ser útil a quem, no futuro, realize uma pesquisa sobre uma temática semelhante. Assim, de forma um tanto quanto secundária, uma tímida contribuição para a comunidade acadêmica local é deixada.

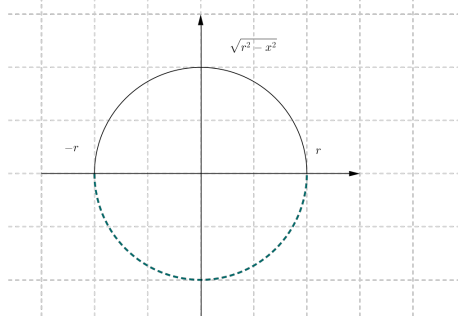
Durante a pesquisa, surgiram dúvidas sobre o comportamento dos objetos analisados. Como será descrito o volume de um sólido de revolução criado pela rotação de uma função em coordenadas polares? E se o eixo de rotação não fossem os eixos x ou y e sim uma outra reta, como por exemplo $y=x$? Estas duas questões poderiam enriquecer o trabalho, mas foram evitadas em seu decorrer pois não havia uma base teórica sólida o suficiente para guiar reflexões acerca delas e, também, existia a intenção de evitar uma abordagem estritamente analítica e abstrata, por se entender que um trabalho de geometria deva ser mais gráfico do que abstrato.

Dado o exposto acima, considera-se possível realizar pesquisas complementares para elucidar todas as dúvidas e questionamentos. Além disso, com o objetivo geral cumprido, o próximo passo lógico a ser dado seria exibir a abordagem que o GeoGebra daria a funções de duas variáveis. i.e., passar de uma variável para duas, sendo o gráfico da função uma superfície em $\mathbb{R}^3$, ou, exibir como seria trabalhar os sólidos de revolução onde as funções geratrizes de suas superfícies fossem funções polares (dadas em coordenadas polares) .

ANEXO I

O objetivo deste anexo, é descrever o cálculo do volume do sólido de revolução descrito pela rotação do segmento da equação $\sqrt{r^2 - x^2}$ contido no primeiro quadrante, tendo a função os limites 0 e r, a rotação é feita ao redor do eixo y.

Figura 4.8: Círculo $x^2 + y^2 = r^2$.



Fonte: o autor (2021).

Para isto é preciso calcular a integral

$$2\pi \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} \quad (4.1)$$

O problema que ocorre é achar a primitiva de $x\sqrt{r^2 - x^2}$

Depois de alguns cálculos se obtêm

$$\int x \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{-1}{3} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Para se chegar nesta solução foram usadas as seguintes etapas:

1. Aplicar a integração por substituição

$$u = r^2 - x^2 \Rightarrow \int \frac{-\sqrt{u}}{2} du$$

2. Remover a constante:

$$\frac{-1}{2} \int \sqrt{u} du$$

3. Aplicar as propriedades dos radicais:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2} \int \sqrt{u} du &= \frac{-1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{-1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \end{aligned}$$

4. Substituir na equação: $u = r^2 - x^2$.

$$\frac{-1}{2} \frac{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$$

5. Simplificar:

$$\frac{-1}{2} \frac{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{-1}{3} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Agora que é conhecida que a primitiva de $\int x\sqrt{r^2 - x^2} dx$ é $\frac{-1}{3}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$ a equação (4.1) pode ser calculada. Usando o resultado obtido em (4.1) tem-se:

$$\begin{aligned} &2\pi \left[\frac{-1}{3} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^r \\ &2\pi \left(\left(\frac{-1}{3} \right) (r^2)^{\frac{3}{2}} \right) \\ &2\pi \left(\frac{-1}{3} (r^3) \right) = -\frac{2\pi}{3} r^3 \end{aligned}$$

como este número representa área, desconsidera-se o sinal negativo. Isso é apenas metade da esfera, para o volume da esfera toda, teríamos

$$V_E = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Maria Janete de Menezes. **Uma proposta para o ensino de integral com o uso do software GeoGebra**, 47 f. Trabalho de Conclusão de Curso - UFPA, Castanhal, 2014.

DE FREITAS VAZ, Duelci Aparecido; DE VASCONCELOS, José Eder Salvador; DE FREITAS FILHO, Osni Oliveira. **Investigação matemática com o GeoGebra em uma propriedade dos polígonos**. Revista professor de matemática online, volume 3, Número I, 2015.

DANTE, Luis Roberto. **Matemática** volume único, 1º edição, 2009, SP, editora ática.

DOLCE, Osvaldo. PONPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar** vol. 10, 5º edição, 1999, SP, atual editora.

DOLCE, Osvaldo. PONPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar** vol. 9, 7º edição, 1999, SP, atual editora.

GARBI, Gilberto Geraldo. **C. Q. D.**, 1º edição, 2010, SP, editora livraria da física.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo** vol. 1, 5º edição, 2001, editora LTC.

<https://www.geogebra.org/m/rhc3efks>. **Volume da esfera com GeoGebra**, Acessado em 25 de março de 2021, as 17:04.

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. **Matemática ciência e aplicações** vol. 3, 2013, São Paulo, 7º edição, editora Saraiva.

NETO, Aref Antar. **Noções de Matemática** Vol. 8, 2010, Editora Vestseller

NOTARE, M. R.; BASSO, M. V. A. **Geometria Dinâmica 3D – novas perspectivas para o pensamento espacial**. RENOTE: Revista Novas Tecnologias na Educação, Porto Alegre, v.14, n. 2, dezembro, 2016. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/70683>. Acesso em 16 de junho de 2017

OLIVEIRA, Ana Maria. **Manual de matemática**, São Paulo, dcl, 2008, 2º reimpresão.

SIQUEIRA, Ruan de Freitas. **Tutorial para GeoGebra**, Rio de Janeiro, UFF, 2017.