



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS - FACET  
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA  
CAMPUS ABAETETUBA – POLO TOMÉ AÇU

FLAVIONE LOPES DIAS

**A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC) E A APLICABILIDADE DE  
SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES**

TOMÉ AÇU/PA  
2022

FLAVIONE LOPES DIAS

**A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC) E A APLICABILIDADE DE  
SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES**

Trabalho de Conclusão de Curso, em formato de artigo, apresentado a Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia do Campus Universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará como requisito obrigatório para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Osvaldo dos Santos Barros

TOME AÇU - PA  
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)  
autor(a)

---

L864b LOPES DIAS, FLAVIONE.  
A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC) E  
A APLICABILIDADE DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES  
LINEARES / FLAVIONE LOPES DIAS. — 2022.  
40 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Osvaldo dos Santos Barros  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -  
Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de  
Abaetetuba, Curso de Matemática, Abaetetuba, 2022.

1. Sistemas de equações lineares. 2. BNCC. 3.  
Aplicações. I. Título.

CDD 370


---

FLAVIONE LOPES DIAS

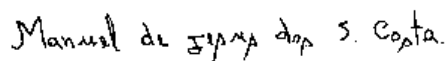
**A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC) E A APLICABILIDADE DE  
SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES**

Data da aprovação: 12 / 12 / 2022  
Conceito: EXCELENTE

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Osvaldo dos Santos Barros  
Orientador



Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa  
Membro interno – FACET/UFPA



Profa. Dra. Renata Laurinho da Silva  
Membro Externo – SEMED CAMETA

TOME AÇU - PA  
2022

Dedico este trabalho a todos aqueles que sempre me apoiaram, me ajudaram e me deram força para nunca desistir dos meus sonhos.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus, por todas as bênçãos que tens colados em minha vida, pela graça de poder concluir este trabalho, finalizando mais uma etapa importante da minha vida.

Agradeço a minha família e amigos, por sempre estar ao meu lado me dando força e me incentivando para nunca desistir dos meus sonhos. Agradeço também a todas as pessoas que de alguma forma participaram desse momento importante da minha vida.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Osvaldo dos Santos Barros, por toda compreensão, cooperação, disponibilidade e ensinamento nesse período conturbado e corrido que se torna essa fase do curso. Agradeço por se dedicar ao trabalho a que se propôs, sempre procurando me deixar segura. Obrigado por ser esse profissional com excelência e levar com tanto comprometimento seu trabalho.

# A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC) E A APLICABILIDADE DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

## Resumo

Este trabalho objetiva mostrar que podemos resolver problemas envolvendo outras áreas de conhecimento: Química, Física, Geografia através de aplicações de sistemas de equações lineares. Com isso, utilizou-se a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que traz o estudo desses sistemas no ensino médio. A pesquisa fez uso de uma revisão bibliográfica a partir dos estudos de: Boldrini (1980), Dante (2016), Lezzi (2016), Lipschutz (2011) e Ruggiero e Lopes (1996). Os resultados encontrados na pesquisa bibliográfica foram de fundamental importância, pois, através das atividades demonstradas foi possível observar que podemos relacionar o ensino da matemática a outras áreas de conhecimento.

**Palavras-chave:** Sistemas de equações lineares, BNCC, Aplicações.

## Abstract

This work aims to show that we can solve problems involving other areas of knowledge: Chemistry, Physics, Geography through applications of systems of linear equations. With this, the National Common Curricular Base (BNCC) was used, which brings the study of these systems in high school. The research made use of a bibliographic review from the studies of: Boldrini (1980), Dante (2016), Lezzi (2016), Lipschutz (2011) and Ruggiero and Lopes (1996). The results found in the bibliographic research were of fundamental importance, because, through the activities demonstrated, it was possible to observe that we can relate the teaching of mathematics to other areas of knowledge.

**Keywords:** Systems of linear equations, BNCC, applications.

## 1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho trataremos o assunto de Sistemas lineares, algumas aplicações e quais as competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estão ligadas a este tema. O estudo de sistemas de equações lineares pode ser estudado e abordado para resolver certas situações do nosso dia a dia, é um assunto apresentado desde o Ensino Fundamental e Médio, visto também em algumas disciplinas de cursos superiores da área de exata, pode estar relacionada a vários ramos da matemática aplicada e em outras áreas do conhecimento como: Física, Biologia, Química, Economia, Engenharia, etc.

O estudo de sistemas de equações lineares teve grandes contribuições de vários matemáticos, os conceitos, as notações e os teoremas foram modificados e desenvolvidos até chegar ao que conhecemos atualmente. O estudo de sistemas lineares deu origem, inicialmente, ao estudo de determinantes e depois, ao estudo das matrizes. Vale ressaltar que não aprofundaremos o estudo de determinantes e matrizes, pois o foco do trabalho é o uso de aplicações de sistemas de equações lineares envolvendo outras áreas de conhecimento.

Historicamente o estudo de sistemas lineares desenvolveu-se, com maior vigor nas civilizações orientais, no século III. a.C., com as inovações matemáticas surgidas na china, os chineses publicaram uma importante obra intitulada “*Chiu-Ch’ang Suan-Chu*” (Nove Capítulos sobre a Arte Matemática). Boyer (1974, p.144) diz que “O capítulo oito do livro é significativo por conter soluções de problemas lineares, usando tanto números positivos quanto números negativos”. Os chineses usavam barras de bambu para inscrever os coeficientes sobre um tabuleiro, que hoje é ocupado pelas matrizes, que se baseava curiosamente em eliminar os coeficientes por meio de operações elementares, que levou ao descobrimento do método de resolução por eliminação quase idêntica a técnica da eliminação gaussiana, desenvolvida na Europa, no século XIX, por Carl Friedrich Gauss. Segue abaixo um exemplo de um problema que envolve sistemas de equações descritas pelos chineses:

Existem três tipos de milho, dos quais três montes do primeiro, dois do segundo e um do terceiro totalizam 39 medidas. Dois montes do primeiro, três do segundo e um do terceiro totalizam 34 medidas. Finalmente, um monte do primeiro, dois do segundo e três do terceiro totalizam 26 medidas.

Quantas medidas de milho estão contidas em um monte de cada um dos tipos?(KOWA apud ANTON, 2007, p.62)

No século XVII, mais precisamente em 1683, um japonês Seki Kowa, considerado o maior matemático dos séculos, estudou o conceito de determinante através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o método chinês. Cerca de 10 anos depois, Leibniz em seu estudo estabeleceu a condição de compatibilidade de um sistema de três equações e duas incógnitas em termos do determinante de ordem três formado pelos coeficientes e pelos termos independentes, ou seja, o determinante da matriz deve ser nulo. Leibniz criou até uma notação com índices para os coeficientes bem próximos da que usamos hoje  $a_{12}$  ele indicava por  $1_2$ .

Outro matemático que também contribuiu para o uso de determinante foi o escocês Colin Maclaurin (1698-1746), que em 1729 escreveu "Um Tratado sobre Álgebra" publicada postumamente em 1748, foi responsável pela descoberta para resolver sistemas de  $n$  equações a  $n$  incógnitas por meio de determinante que hoje é conhecida como a regra de Cramer. O matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752), também foi um grande contribuinte no estudo de determinante que na sua obra "Introdução a Análise de Curvas Algébricas" (1750) apresentava resultados para matrizes de ordem  $n$ .

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) foi o grande responsável pelo sentido atual do termo de determinante, surgido em 1812 num artigo apresentado à Academia de Ciências. Porém, somente em 1841, na publicação de Arthur Cayley que foi utilizada a notação de duas barras verticais ladeando o quadrado de número, uma das notações atuais. Outro que mais contribuiu para consolidar a teoria de determinante foi o alemão Car. G. J. Jacobi (1804-1851), que trazia a definição de maneira algorítmica.

Assim como o estudo de sistemas de equações lineares, o estudo de matrizes também teve grandes contribuições de vários matemáticos, que ajudaram a modificar e aperfeiçoar tal termo, matemáticos como: Joseph Louis Lagrange, e, 1790 (trazendo o primeiro uso implícito da noção de matrizes). Augustin-Louis Cauchy em 1826, no século XIX, dando nome de tableau (tabela). Entretanto, somente em 1850, que o termo de matriz foi nomeado pela primeira vez pelo matemático inglês James Joseph Sylvester definido como "um arranjo oblongo". Um dos primeiros a estudar matrizes também foi o matemático Arthur Cayley que contribuiu de forma significativa nos estudos de matrizes, com a sua famosa obra

intitulado “*Memoir on the Theory of Matrias*” (Ensaio sobre a teoria de Matrizes), publicada em 1858, divulgou esse nome e começou a demonstrar sua utilidade, introduziu algumas das operações matriciais básicas.

Desta maneira, o estudo de matrizes e determinantes é de grande importância na Matemática e no cotidiano do ser humano, no qual, o determinante de uma matriz quadrada é um número real que associamos a essa matriz. Matrizes são estruturas matemáticas organizadas na forma de tabela com linha e colunas, responsáveis pela solução de sistemas lineares. Anton (2012) nos diz que: “as matrizes não são simplesmente uma ferramenta de notação para resolver sistemas de equações, elas também podem ser vistas como objetos matemáticos de vida própria, existindo uma teoria rica e importante associada a elas que tem uma grande variedade de aplicações práticas”.

Considerando a aprovação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ocorrida em 2018, foi feita uma análise desta em relação às competências e habilidade específica da área de matemática e suas tecnologias com destaque ao conteúdo de sistemas lineares com a finalidade de verificar em quais competências e habilidades estavam previsto o conteúdo. Salienta-se ainda que foi realizada uma série de aplicações de sistemas lineares retirados de livros bibliográficos do ensino médio envolvendo outras áreas de conhecimento.

Vale ressaltar que uma das finalidades da matemática destacada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especificamente a habilidade EM13MAT301 é resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultaneamente, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p.528). Portanto, o objetivo desse trabalho é mostrar que podemos resolver e elaborar problemas envolvendo outras áreas de conhecimento através de aplicações de sistemas lineares.

Segundo Silva (2010):

“A resolução de problemas é um dos mais importantes meios para se ensinar matemática, pois, através de diversos tipos de problemas, os alunos aprenderão a experimentar, a planejar, organizar os dados e fazer uso de seus próprios erros. Com isso, aprenderão a buscar novas alternativas para resoluções, adquirindo autoconfiança, aumentando sua autonomia e capacidade de argumentação”. (SILVA, 2010, p.9)

Para Vailant (2021) em seu trabalho “Modelagem de circuitos elétricos e resolução via sistemas lineares”. Define que para a aprendizagem do aluno se tornar mais fácil: “acredita-se que mostrar a aplicabilidade de métodos matemáticos em outras áreas de conhecimento, faz com que os conceitos se tornem mais perspectivas para aprendizagem do aluno”. Dessa forma, o aluno busca estratégias, conceitos e definições matemáticos para resolver tais situações.

Diante disso, este trabalho está dividido em três capítulos, além da introdução e conclusão. No capítulo 1 aborda-se uma pequena introdução a BNCC e as competências específicas de matemáticas com enfoque a terceira competência e a habilidade 1 que aborda o estudo de equações lineares. No capítulo 2 apresentamos uma introdução a parte teórica de Sistemas Lineares, na qual contém as definições, exemplos e técnicas de resoluções que serão usadas no Capítulo 3.

No Capítulo 3, apresentamos três aplicações utilizando o uso de Sistemas Lineares, as seguintes aplicações são: uma em engenharia elétrica, na qual relaciona análise de circuitos elétricos, para tanto apresentamos definições de alguns conceitos de Física, outra aplicação é em química que aborda o balanceamento de equações químicas, para tanto apresentamos também definições de alguns conceitos químicos para melhor compreensão da aplicação e a outra foi em fluxo de tráfego de veículos.

## **2 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC) E Os SISTEMAS LINEARES**

Neste capítulo, apresentaremos uma introdução às normas da BNCC, com enfoque especificamente a 3<sup>o</sup> competência referente á matemática e suas tecnologias pela BNCC, e a habilidade 1 desta competência, que menciona o estudo de equações lineares simultaneamente.

### **2.1 Sistemas Lineares na BNCC.**

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que determinam quais são as aprendizagens fundamentais que todos os alunos da educação básica de escolas públicas ou particulares devem estudar, a fim de garantir o direito de aprendizagem e o desenvolvimento de todos os estudantes prevista na Lei de

Diretrizes e Bases (LDB), na qual, os currículos de todas as escolas públicas e particulares devem ter a BNCC como referencial na formação do aluno. Dessa forma, a BNCC é um documento importante para a melhoria da igualdade do sistema de educação, na qual visa colaborar para a formação integral e para a construção de uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva.

O documento traz em seu texto explícito dez competências gerais para educação básica, além das competências gerais há também as competências específicas de cada área de conhecimento, e dentro de cada competência específica existem as chamadas habilidades. De acordo com a BNCC, cada habilidade é constituída por um código alfanumérico, como segue o exemplo a seguir:

### **EM13MAT103**

**EM** - indica a etapa de Ensino, no caso Ensino Médio;

**13** - representam as series dos níveis de ensino, podendo ser ministrada do 1º ano ao 3º ano.

**MAT** - Matemática e suas tecnologias;

**1** - está associado à competência específica de cada habilidade;

**03** - refere-se à habilidade dentro da competência específica.

Desta forma, o código EM13MAT103, indica que se refere a uma habilidade da Etapa do Ensino Médio para o 1º ano ao 3º ano da área da matemática e suas tecnologias, está relacionada à competência 1 e é a 3º habilidade apresentada.

Como dito anteriormente, a BNCC traz em seu texto dez competências gerais da educação, e além das dez competências gerais cada área de conhecimento apresenta suas competências específicas. Diante disso, a área da matemática e suas tecnologias apresentam cinco competências específicas, dentre elas a 3º competência e a habilidade 1 que será o enfoque desse trabalho. A seguir expunha-se a redação da competência específica 3:

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequações das soluções proposta, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p.527).

Esta competência associa-se a vários ramos da matemática do ensino médio, como por exemplo: álgebra, geometria, probabilidade, aritmética, estatística, grandezas e medidas. Nessa competência destaca-se inicialmente a habilidade identificada como **EM13MAT301** que se refere a uma habilidade da etapa do ensino médio e pode ser abordado do 1º ano ao 3º ano da área da Matemática e suas tecnologias, que compõe a terceira competência e representa a primeira habilidade que apresenta o texto a seguir: “Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas de conhecimento, que envolve equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais”. (BRASIL, 2018, p.528).

Com relação à habilidade citada, ela tem como finalidade a resolução de problemas causados por grandezas que diversificam de maneira linear no cotidiano, na matemática e até mesmo em outras áreas de conhecimentos. Assim, com o conhecimento essencial dessa habilidade o aluno poderá trabalhar com sistemas de equações lineares do 1º grau com duas ou três incógnitas, utilizando as técnicas algébricas e gráficas para a compreensão do crescimento linear que as equações retratam. Considerando a habilidade citada, apresentaremos a seguir um recorte a forma como alguns autores fazem a abordagem deste assunto nos livros bibliográficos.

### **3 INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES**

Neste capítulo abordaremos a parte teórica de Sistema de Equações Lineares na qual contém as definições, exemplos e técnicas de resolução e para seu desenvolvimento foram usadas às referências: Boldrini(1980), Dante (2016), Lezzi (2016), Lipschutz (2011) e Ruggiero e Lopes (1996).

Para escrever sobre sistemas lineares é preciso, primeiramente, abordar equações lineares, pois, um sistema linear é um conjunto formado por equações lineares, como veremos a seguir.

### 3.1 Equações Lineares

De acordo com Dante (2016) equação linear é uma equação que pode ser escrita na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b \quad (1)$$

Nessa estrutura:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  são as variáveis também chamadas de incógnitas; os números reais  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  são chamados de coeficientes e  $b$  o termo independente da equação, sendo que nem todos os  $a$  são nulos, ou seja, todos os coeficientes e termos constantes das equações lineares citados serão números reais. Quando  $b = 0$ , a equação é chamada de equação linear homogêneo nas variáveis  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ .

A equação (1) tem a forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = 0 \quad (2)$$

#### Exemplo 1:

- $x + 3y = 7$  é uma equação linear de incógnitas  $x$  e  $y$ ;
- $x + y + z = 1$  é uma equação de incógnita  $x, y$  e  $z$ .

#### 3.1.1 Solução de Equação Linear

Uma sequência de números reais  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$  é solução da equação  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$  cujas coordenadas satisfazem a equação, ou seja, quando substituimos  $x_1$  por  $\alpha_1$ ,  $x_2$  por  $\alpha_2, \dots, x_n$  por  $\alpha_n$  e, após efetuamos as operações indicadas, obtém-se uma sentença verdadeira, isso implica que a igualdade  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$  é verdadeira. Desta maneira apresentaremos os exemplos a seguir.

**Exemplo 2:** A sequência  $(5, 1)$  é uma solução da equação  $2x + 3y = 13$ , pois, tomando  $x = 5$  e  $y = 1$  na equação dada, obtemos:

$$2 \cdot (5) + 3 \cdot (1) = 13$$

Assim, tornando a sentença verdadeira e,  $(3, 1)$  não é solução, pois  $2 \cdot (3) + 3 \cdot (1) \neq 13$  o que torna a sentença falsa.



**Exemplo 6:** O par ordenado (5,1) é a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases} \quad (6)$$

Pois, satisfaz simultaneamente a todas as equações do sistema, tomando  $x = 5$  e  $y = 1$ , obtemos:

$$\begin{cases} 2.5 + 3.1 = 13 \\ 3.5 - 5.1 = 10 \end{cases}$$

**Exemplo 7:** O termo ordenado (1, 3, -2) é solução do sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases} \quad (7)$$

Pois, satisfaz simultaneamente a todas as equações do sistema, tomando  $x = 1, y = 3$  e  $z = -2$ , obtemos:

$$\begin{cases} 1 + 2.3 + 3.(-2) = 1 \\ 4.1 - 3 - (-2) = 3 \\ 1 + 3 - (-2) = 6 \end{cases}$$

### 3.2.2 Classificação de Um Sistema Linear

A classificação do sistema linear é determinada pelo número de soluções de um sistema de equações lineares, podendo ser possível e impossível. Os sistemas possíveis podem ser: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI). E os sistemas impossíveis (SI). Além do processo algébrico, um sistema linear pode também ter uma interpretação geométrica, como veremos a seguir.

- Dizemos que, um sistema é denominado de sistema possível e determinado (SPD) quando o sistema tem uma única solução.

**Exemplo 8:** Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$$

Se multiplicarmos a primeira equação por 5 e a segunda equação por 3, vamos ter:

$$\begin{cases} 10x + 15y = 65 \\ 9x - 15y = 30 \end{cases}$$

Somando as duas equações eliminaremos a incógnita  $y$  e obtemos:

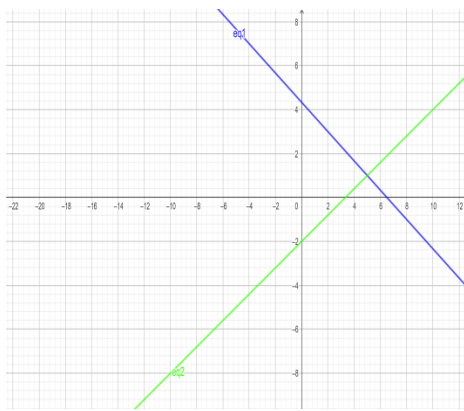
$$19x = 95$$

$$x = 5$$

Substituindo esse valor em qualquer uma das equações anteriores:

$$2x + 3y = 13 \Rightarrow 2 \cdot 5 + 3y = 13 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1$$

Assim, esse sistema apresenta uma única solução que é o par ordenado  $(5,1)$  e interpretando geometricamente temos:



**Figura 1: Retas Concorrentes**

**Fonte: Elaborado pelo autor**

Neste caso, as retas concorrentes apontam que há um único par ordenado que é solução do sistema, pois, elas intersectam-se em único ponto, sendo assim, o sistema possui uma única solução.

- Dizemos que, um sistema é denominado de sistema possível e indeterminado (SPI) quando o sistema possui infinitas soluções.

**Exemplo 9:** Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

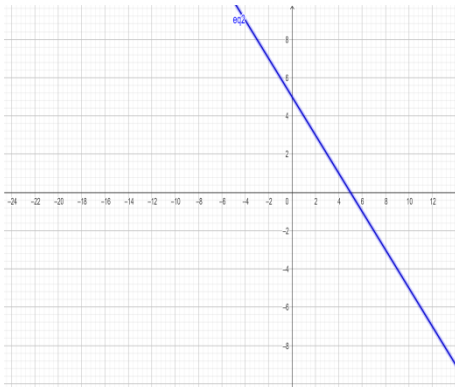
Multiplicando a primeira equação por  $-2$ , temos:

$$\begin{cases} -2x - 2y = -10 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

Somando as duas equações, eliminaremos as incógnitas  $x$  e  $y$  e obtemos:

$$0 = 0$$

Observando a segunda equação e dividimos os dois membros da segunda equação por 2, obtemos  $x + y = 5$ , ou seja, a primeira equação. Sendo assim, o sistema reduz a primeira equação  $x + y = 5$  que possui infinitas soluções. Portanto, esse sistema apresenta mais de uma solução:  $(5,0);(1,4);(3,2)$  etc, interpretando geometricamente temos:



**Figura 2: Retas coincidentes**

**Fonte: Elaborado pelo autor**

Neste caso, as retas coincidentes indicam que há infinitas pares ordenados que são solução do sistemas, pois, elas intersectam-se em todos os pontos da reta, sendo assim, o sistema tem infinitas soluções.

- Dizemos que, um sistema é denominado sistema impossível (SI) quando o sistema não possui nenhuma solução.

**Exemplo 10:** Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 13 \end{cases}$$

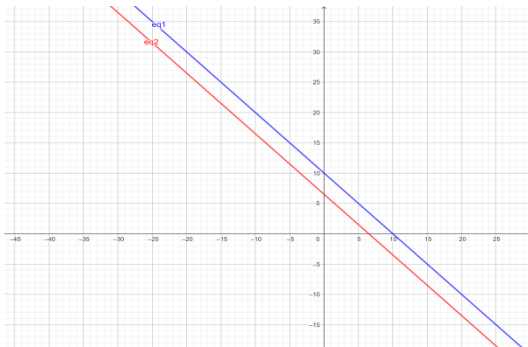
Multiplicando a primeira equação por  $-2$ , temos

$$\begin{cases} -2x - 2y = -20 \\ 2x + 2y = 13 \end{cases}$$

Somando as duas equações eliminaremos as incógnitas  $x$  e  $y$ , obtemos:

$$0 = -7$$

Assim, o sistema não possui solução, interpretando geometricamente temos:

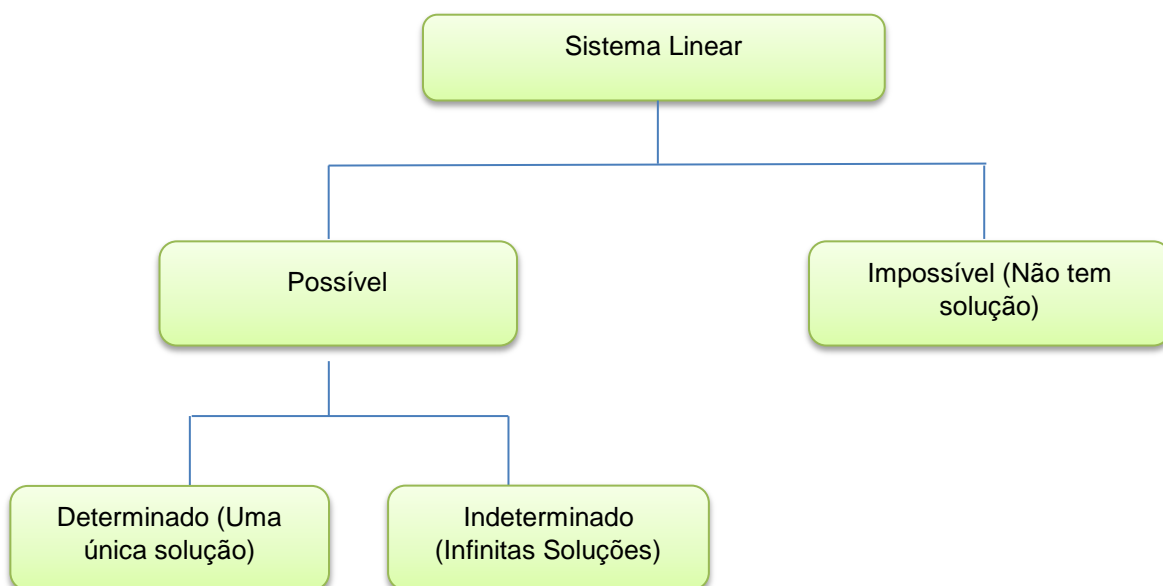


**Figura 3: Retas Paralelas**

**Fonte: Elaborado pelo autor**

Neste caso, as retas paralelas e distintas apontam que na solução do sistema não há par ordenado, pois, não há ponto de interseção na reta, sendo assim, o sistema não possui solução.

Representando esquematicamente as três possibilidades de classificação:



**Elaborado pelo autor**

### 3.2.3 Matrizes associadas a um sistema

De acordo com Dante (2016) para todo sistema podemos associar uma matriz, de outro modo, pode-se dizer que um sistema linear surge de um produto de matriz, ou seja, utilizamos a matriz dos coeficientes e o processo da multiplicação. Dado o sistema linear (3), podemos associar ele a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ou em oposição,  $A \cdot X = B$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Essa é, então, a matriz dos coeficientes chamada de matriz incompleta.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

A matriz das incógnitas:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A matriz dos termos independentes de cada equação linear.

Outra matriz que podemos associar ao sistema linear (3) é:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Nessa matriz, associamos a matriz  $A$  e  $B$ , essa matriz é chamada de matriz aumentada.

Um sistema de equações lineares fica totalmente definido por sua matriz aumentada  $M$  e vice-versa, ou seja, cada linha de  $M$  representa a uma equação do sistema e cada coluna de  $M$  representa aos coeficientes de uma incógnita, exceto a última coluna, que representa aos termos independentes do sistema. Essa maneira de representar um sistema de equação linear é chamada de **forma matricial do sistema**, como demonstraremos nos exemplos adiante.

**Exemplo 11:** Escrevendo na forma matricial o exemplo do sistema (5), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Em termos de matrizes ampliadas, na resolução do sistema, partimos de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Assim chegamos a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Essa é a matriz aumentada do sistema (5).

### 3.3 Resoluções de Sistema de Equações Lineares

Nesse tópico apresentaremos os métodos de resoluções dado pelo Método de Eliminação de Gauss e a Regra de Cramer. Para tanto, apresentaremos também a definição e exemplos de sistemas equivalentes e escalonados.

#### 3.3.1 Sistemas Equivalentes

Dizemos que dois sistemas de equações lineares envolvendo as mesmas variáveis são ditos equivalentes se tiverem o mesmo conjunto solução. Para obter um sistema de equações equivalentes podemos usar certas operações nas equações que são:

- 1) Trocar duas equações;
- 2) Multiplicar uma equação por um número real diferente de zero;
- 3) Um múltiplo de uma equação pode ser somado (ou subtraído de) a outro.

Essas operações são denominadas de **operações elementares**, como veremos no exemplo a seguir.

**Exemplo 12:** Resolva o seguinte sistema de equações lineares.

$$s: \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases} \quad (8)$$

A matriz aumentada do sistema é escrita como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Subtraindo duas vezes a primeira linha da segunda, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Subtraindo três vezes a primeira linha da terceira, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -7 & -5 & -31 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a segunda linha por  $-\frac{1}{3}$ , obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -31 \end{bmatrix}$$

Somando a terceira linha com sete vezes a primeira linha, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Observe então que S é equivalente ao sistema

$$s': \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 \\ 2z = 4 \end{cases} \quad (9)$$

Usando a substituição, temos da última linha que  $z = 2$ , substituindo na segunda equação, obtemos:  $y = 5 - z = 5 - 2 = 3$ , da primeira equação temos:  $x = 9 - 2y - z = 9 - 6 - 2 = 1$ . Logo, a única solução do sistema é  $(1, 3, 2)$  e consequentemente a única solução do sistema S. Portanto, para verificarmos se um

conjunto é equivalente ao outro, basta encontrarmos o conjunto solução de ambos, e verificarmos se são iguais.

### 3.3.2 Sistemas escalonados

Dizemos que um sistema linear de  $m$  equações e  $n$  incógnitas é denominado sistema linear escalonado, quando em cada equação existe pelo menos um número de coeficiente não nulo, tendo em consideração a ordem de “cima para baixo”, o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

Observe o sistema linear a seguir:

$$S: \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ y - 3z = 7 \\ z = -2 \end{cases}$$

O sistema  $S$  é um sistema escalonado, pois a sua solução é facilmente obtida, da última linha temos que  $z = -2$ , substituindo na segunda equação, temos  $y = 7 + 3z = 7 + 3 * (-2) = 7 - 6 = 1$ , e substituindo na primeira equação, temos  $x = 5 + y - 2z = 5 + 1 - 2 * (-2) = 5 + 1 + 4 = 10$ . Logo, o conjunto solução do sistema é  $(10, 1, -2)$ . Se um sistema escalonado apresenta número de equações igual ao número de incógnitas, ele é possível e determinado, ou seja, ele tem solução única.

De modo geral, uma maneira mais fácil de obter o conjunto solução de um determinado sistema é quando o sistema está na forma escalonada, como observado no exemplo anterior. Assim, seja um sistema  $S$  obter um sistema linear  $S_1$ , na forma escalonada, é bastante interessante, uma vez que o conjunto solução  $S$  é o mesmo do  $S_1$ . Portanto, quando o sistema não está na forma escalonado, podemos obter um sistema equivalente a ele, que esteja escalonado por meio de operações elementares, como indicado no exemplo abaixo.

**Exemplo 13:** Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 2x + 7y + z = 21 \\ -3x - 5y + 2z = -8 \end{cases} \quad (10)$$

A matriz aumentada do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 21 \\ -3 & -5 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

Subtraindo da segunda linha duas vezes a primeira linha, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \\ -3 & -5 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

Somando com a terceira linha três vezes a primeira, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 13 \end{bmatrix}$$

Permutar a segunda linha com a terceira linha, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Subtraindo da terceira linha três vezes a segunda linha, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & -16 & -32 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a terceira linha por  $-\frac{1}{16}$ , temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Neste momento, o sistema está na forma escalonada e equivalente ao sistema dado. Da última linha temos  $z = 2$ , substituindo na segunda linha temos  $y = 13 - 5z = 13 - 5 * 2 = 13 - 10 = 3$ , e na primeira linha temos  $x = 7 - 2y - z = 7 - 2 * 3 - 2 = 7 - 6 - 2 = -1$ . Logo, o sistema é possível e determinado possui solução única  $(-1, 3, 2)$ .

### 3.3.3 Método de Eliminação de Gauss

O Método de Eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema linear do tipo  $A * X = B$ , em um sistema equivalente com matriz de coeficientes triangulares superior, ou seja, possui a mesma solução. Para isso efetua-se uma

serie de operações elementares de modo que a solução do sistema original não é alterada que consiste em:

- Trocar duas equações;
- Multiplicar uma equação por uma constante não nula;
- Adicionar um múltiplo de uma equação a outra equação;

Dizemos que dois sistemas de equações lineares envolvendo as mesmas variáveis são ditos equivalentes se tiverem o mesmo conjunto solução

Para obter as soluções de um sistema linear  $A.X = B$  através do método de Gauss utilizamos as seguintes etapas:

- Determinar a matriz aumentada do sistema linear;
- Utilizar operações elementares nas linhas da matriz ate obter uma matriz triangular superior;
- Utilizar substituições regressivas nas equações anteriores;

**Exemplo 14:** Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 3 \end{cases} \quad (11)$$

A matriz aumentada do sistema é escrita como

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Vamos eliminar x das equações (2) e (3)

No primeiro passo, subtraímos da segunda linha  $\frac{1}{3}$  da primeira linha e subtraímos da terceira linha  $\frac{4}{3}$  da primeira linha, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

Após eliminar x das equações (2) e (3), vamos eliminar y da equação (3).

No segundo passo, subtraímos da terceira linha a segunda linha, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$



$$Dx_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$Dx_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$Dx_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{22} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Se  $A * X = B$  é um sistema linear de  $n$  equações a  $n$  incógnitas, então o sistema tem uma solução única se, e somente se  $D \neq 0$ , caso em que a solução é

$$X_1 = \frac{Dx_1}{D}, X_2 = \frac{Dx_2}{D}, \dots, X_n = \frac{Dx_n}{D}$$

Assim, a matriz que resulta quando a  $j$ -ésima coluna de  $A$  é substituída por  $b$ , como mostra o exemplo a seguir.

**Exemplo 15:** Resolva o sistema, utilizando determinantes:

$$\begin{cases} x - 4y + z = 6 \\ 4x - y + 2z = -1 \\ 2x + 2y - 3z = -20 \end{cases} \quad (12)$$

Na forma matricial, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \\ -1 \\ -20 \end{vmatrix}$$

Calcule primeiro o determinante  $D$  da matriz de coeficientes

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -55$$

Como  $D \neq 0$ , o sistema tem solução única. Para calcular  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_z$ , substitua os termos independentes na primeira coluna da matriz para encontrar  $D_x$ , na segunda coluna para encontrar  $D_y$  e na terceira coluna para encontrar  $D_z$ .

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -20 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 144$$



- O sistema tem infinita solução além da solução trivial, sendo um sistema possível e indeterminado (SPI).

**Exemplo 16:** Resolva o seguinte sistema homogêneo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \quad (13)$$

A matriz aumentada do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Subtraímos da segunda linha o dobro da primeira linha, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Somamos a terceira linha com a primeira linha, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos a terceira linha por  $\frac{1}{3}$ , obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Permutar a segunda linha com a terceira, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Somamos a terceira linha com a segunda, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, a solução geral do sistema é:  $(0, 0, 0)$ .

Desta maneira, conseguimos ver que a competência específica 3 e a habilidade 1 da BNCC que relaciona o estudo de sistemas de equações lineares contribui de forma significativa na forma de abordagem com o foco na aprendizagem desse conteúdo para obtenção do conhecimento necessário para manusear essa habilidade. Contudo, veremos a seguir algumas aplicações, retirados de livros bibliográficos de matemática que envolve outras áreas de conhecimento.

## 4 APLICAÇÕES DE SISTEMAS LINEARES

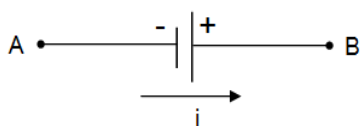
Neste capítulo, vamos demonstrar as aplicações de Sistemas de Equações Lineares, na solução de problemas de circuitos elétricos, balanceamento de equações químicas e fluxo de tráfegos de veículos e para isso utilizaremos os métodos de soluções apresentados no capítulo 3.

### 4.1 Circuitos Elétricos

De acordo com Anton, H. Rorres, C. (2012), inicialmente apresentamos alguns conceitos para a análise de problemas referentes aos circuitos elétricos. Um circuito elétrico é composto por capacitores, fios condutores e resistores.

**Definição 4.1.1.** O Gerador é o aparelho que produz energia as cargas elétricas que o atravessam, exemplo: baterias, pilhas como mostra na figura 4.

Figura 4. Representação de um Gerador



Fonte: <http://minhasaulasdefisica.blogspot.com/2015/03/gerador-eletrico.html>

**Definição 4.1.2.** O Resistor é utilizado para transformar energia elétrica em energia térmica ou para controlar a corrente elétrica em um circuito como mostra na figura 5

Figura 5. Representação de um Resistor.

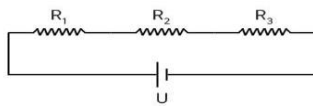


Fonte: <https://ead.umc.br/blog/resistores-fisica-enem>

Os circuitos elétricos podem ser constituídos por um ou mais resistores que podem ser associados em: série, paralelo ou combinação de ambas caracterizadas como mista.

**Definição 4.1.3.** Associação em Série - refere quando os resistores estão conectados a um mesmo trajeto de forma que a intensidade da corrente elétrica seja a mesma em todos os resistores e a tensão seja dividida proporcionalmente, como indicado na figura 6.

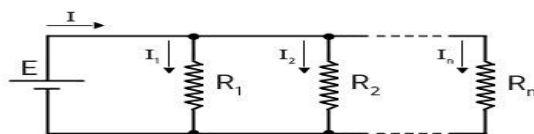
**Figura 6. Representação de um Resistor em Série.**



Fonte: <https://www.todamateria.com.br/associacao-de-resistores/>

**Definição 4.1.4.** Associação em Paralelo - refere quando os componentes se ligam em paralelo com a fonte de energia, de forma que a tensão seja a mesma em todos os pontos do circuito e a corrente elétrica se altera de acordo com a resistência, como indicado na figura 7.

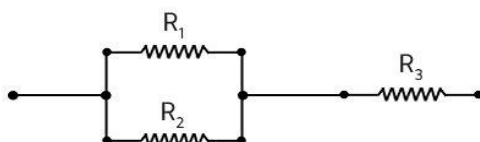
**Figura 7. Representação de um Resistor em Paralelo.**



Fonte: <https://www.todamateria.com.br/associacao-de-resistores/>

**Definição 4.1.5.** Associação Mista - refere quando a combinação das associações em série e em paralelo, como indicado na figura 8

**Figura 8. Representação de um Resistor Misto.**



Fonte: <https://www.todamateria.com.br/associacao-de-resistores/>

De acordo com Anton (2012, p.76) “uma rede elétrica típica possui vários capacitores e resistores ligados por alguma configuração de fios” em circuitos elétricos mais complexos, onde não é possível substituir ramificações por trechos

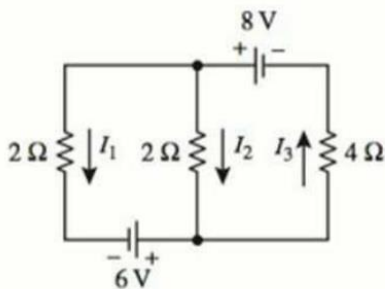
equivalentes, para ser possível obter determinadas grandezas é preciso utilizar equações específicas, conhecidas como as duas Leis de Kirchhoff: Lei de Kirchhoff das correntes e a Lei de Kirchhoff das tensões que são usadas para determinar a intensidade da corrente elétrica em cada parte do circuito, as quais relatam que: a primeira diz que em cada nó, a soma das correntes que entram é igual à soma das correntes que saem de um nó, e a segunda que em um laço fechado, a soma das tensões em uma malha é igual à zero.

Ao aplicar as leis de Kirchhoff em circuitos elétricos surge um sistema de equações lineares, na qual pode ser resolvida por meio de resoluções de sistemas lineares da álgebra linear, outra lei também que pode ser aplicada em circuitos elétricos é a Lei de Ohm que relaciona três grandezas elétricas, na qual relata que a tensão elétrica, representada por  $V$  sendo medida em volt(V) é igual ao produto da resistência elétrica, representado por  $R$  sendo medida em ohm ( $\Omega$ ) pela corrente elétrica, representado por  $I$  sendo medida em ampère (A).

A fórmula da lei de ohm é:

$$V = R * I$$

Para determinar as intensidades das correntes elétricas do circuito elétrico representado na figura 9. Vamos utilizar sistemas lineares.



**Figura 9. Circuito Elétrico**

**Fonte: Anton e Rorres (2012, p.84, ex.5).**

Pela Lei de Kirchhoff das Correntes, aplicada em qualquer um dos nós, temos:

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Pela Lei de Kirchhoff das Tensões, temos:

$$2I_1 = 2I_2 + 6$$

$$2I_2 + 4I_3 = 8$$

Assim, as correntes  $I_1, I_2$  e  $I_3$  formam o seguinte sistema de equações linear:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 2I_1 - 2I_2 = 6 \\ 2I_2 + 4I_3 = 8 \end{cases} \quad (14)$$

A matriz aumentada do sistema é escrita como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Subtraímos da segunda linha o dobro da primeira linha, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos a segunda linha por  $\left(-\frac{1}{4}\right)$ , obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Subtraímos da terceira linha o dobro da segunda linha, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos a terceira linha por  $\frac{1}{5}$ , obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \end{bmatrix}$$

Assim, pela última linha concluímos que:

$$I_3 = \frac{11}{5} = 2,2A$$

Substituindo de volta, obtemos:

$$I_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}I_3 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{11}{5} = -\frac{3}{2} + \frac{11}{10} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} = -0,4A$$

$$I_1 = I_3 - I_2 = \frac{11}{5} + \frac{2}{5} = \frac{13}{5} = 2,6A$$

Como  $I_2$  é negativo, a direção é oposta ao indicado na figura.

Para determinar a solução do sistema através do Método da Regra de Cramer, considerado também como método direto para resolver sistemas lineares. A partir do sistema linear (13) obtido com análise do circuito elétrico podemos realizar os seguintes passos.

Escrevendo na forma matricial, temos que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{vmatrix}$$

Logo, aplicando a Regra de Cramer, obtemos determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -20$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -52$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -44$$

Portanto; a corrente elétrica é dada pelo valor obtido em  $I_1, I_2$  e  $I_3$ :

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-52}{-20} = \frac{-13}{-5} = 2,6A$$

$$I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{8}{-20} = \frac{2}{-5} = -0,4A$$

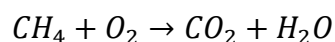
$$I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-44}{-20} = \frac{-11}{-5} = 2,2A$$

Aplicando o Método de Eliminação de Gauss e Regra de Cramer obtém o mesmo resultado. Assim, como  $I_2$  é negativo, a direção é oposta ao indicado na figura (6).

## 4.2 Balanceamentos de Equações Químicas

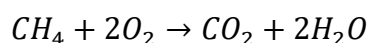
Os componentes químicos são representados por formulas químicas que descrevem a composição atômica de suas moléculas (ANTON, 2012, p.89). Por exemplo, o metano é representado por  $CH_4$ , pois é constituído de um átomo de carbono e quatro átomos de hidrogênio, o oxigênio estável é representado por  $O_2$ , pois é constituída de dois átomos de oxigênio e o dióxido de carbono é representado por  $CO_2$ , pois é constituído por um átomo de carbono e dois átomos de oxigênio.

As transformações que acontecem no decorrer das reações químicas são representadas por equações químicas (MORTIMER, 2016, p.216). Por exemplo, a equação:



Relata-se uma reação no qual o metano ( $CH_4$ ) e o oxigênio estável( $O_2$ ) reage para produzir o dióxido de carbono( $CO_2$ ) e água( $H_2O$ ) formando novos elementos químicos a partir da combinação de composto químicos.

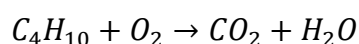
Os elementos químicos do lado esquerdo da seta são denominados reagentes e do lado direito da seta os produtos. Dizemos que uma reação química esta balanceada quando a quantidade de átomos é igual em ambos os lados da seta, ou seja, o numero total de átomos dos reagentes deve ser igual ao número total de átomos dos produtos (MORTIMER, 2016, p.217). Por exemplo, a equação:



Esta balanceada, indicando que um mol de moléculas de metano se combina com dois mols de moléculas de oxigênio estável para produzir um mol de moléculas de dióxido de carbono e dois mols de moléculas de água.

Podemos balancear as equações químicas mais simples por tentativa e erros, porem equações químicas mais complexas necessita de um procedimento mais sistemático. Para isso, analisamos primeiro a equação não balanceada e em seguida ajustamos os coeficientes estequiométricos que antecedem de formulas ate que os números de átomos sejam iguais nos reagentes e nos produtos. Para tanto, o procedimento de balanceamento de equações químicas resulta em resoluções de sistemas lineares homogêneos e dessa forma conseguimos evitar muitas tentativas e erros.

Vamos descrever a equação balanceada para a reação química abaixo:



Sejam  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $w$  inteiros positivos que equilibram a equação:



Para cada um dos elementos na equação, igualamos o número de átomos de cada elemento de ambos os lados, temos:

$$\text{Carbono: } 4x = z$$

$$\text{Hidrogênio: } 10x = 2w$$

$$\text{Oxigênio: } 2y = 2z + w$$

E obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 4x + 0y - 1z + 0w = 0 \\ 10x + 0y + 0z - 2w = 0 \\ 0x + 2y - 2z - 1w = 0 \end{cases} \quad (16)$$

A matriz aumentada desse sistema é:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos a primeira linha da matriz por  $\frac{1}{4}$ , obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A segunda linha menos dez vezes a primeira linha da matriz, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{4} & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Permutamos a segunda linha com a terceira linha da matriz, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{4} & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos a segunda linha da matriz por  $\frac{1}{2}$ , obtemos:

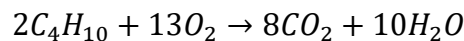
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{4} & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos a terceira linha da matriz por  $\frac{4}{10}$ , obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

Da última linha concluímos que  $w$  é uma variável livre, e que a solução geral do sistema é dada por  $w = t$ ,  $z = \frac{4}{5}t$ ,  $y = z + \frac{1}{2}t = \frac{4}{5}t + \frac{1}{2}t = \frac{13}{10}t$  e  $x = \frac{1}{4}t$ . Entretanto, devemos utilizar os menores inteiros positivos para equilibrar a equação (FONSECA, 2016, p.105). Nesse caso, calculamos o mínimo múltiplo comum entre os denominadores, na qual encontramos o 10, então tomando  $w = 10$ , obtemos  $x = 2$ ,  $y = 13$ ,  $z = 8$  e  $w = 10$ .

Substituindo esses valores em (15), obtemos a equação balanceada:



### 4.3 Fluxos de Tráfego de Veículo

Por meio da aplicação de sistemas lineares, somos capazes de solucionar a média do número de veículos em cada cruzamento em um determinado horário de uma rua de uma cidade. De acordo com Anton e Rorres (2012, p.85) os ramos da maioria das redes se encontram em pontos denominados nos ou vértices, nos quais os fluxos se dividem. Por exemplo, nas redes de trânsito eles ocorrem em cruzamentos de ruas.

A figura a seguir representa dois conjuntos de ruas de mão única que se cruzam no centro de uma cidade.

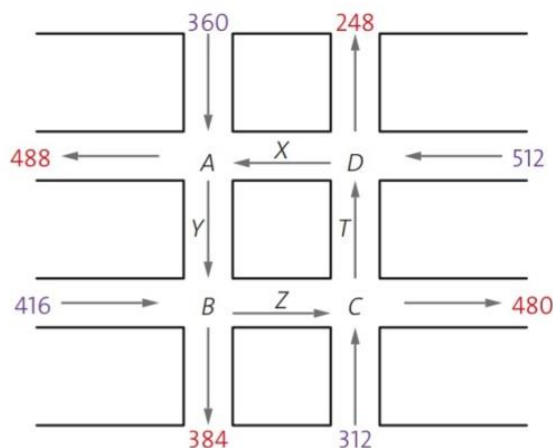


Figura 10. Fluxo de tráfego de veículos

Fonte: Dante (2016, p. 108)

Para determinar a media do numero de veículos por hora que entram e saem dessa seção durante o horário do rush, necessitamos determinar o número de veículos em cada um dos cruzamentos, na qual o número de veículos que entram e saem seja o mesmo e que o fluxo tem o mesmo sentido indicados das setas indicados na figura (10), obtemos:

Cruzamento	Para Dentro	Para Fora
A	$360 + x$	$488 + y$
B	$416 + y$	$384 + z$
C	$312 + z$	$480 + t$
D	$512 + t$	$248 + x$

Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com a tabela a cima, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x - y = 128 \\ y - z = -32 \\ z - t = 168 \\ -x + t = -264 \end{cases} \quad (17)$$

Resolvendo esse sistema, encontramos as taxas de fluxos desconhecidas.

Assim, podemos escrever a seguinte matriz aumentada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 128 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 168 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -264 \end{bmatrix}$$

Somamos a quarta linha mais a primeira linha, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 128 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 168 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -136 \end{bmatrix}$$

Somamos a quarta linha mais a segunda linha, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 128 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 168 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -168 \end{bmatrix}$$

Somamos a quarta linha mais a terceira linha, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 128 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 168 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Somamos a segunda linha mais a terceira linha, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 128 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 168 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Somamos a primeira linha mais a segunda linha, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 264 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 136 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 168 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da última linha concluímos que  $w$  é uma variável livre, e que a solução geral do sistema é dada por:  $t = w$ ,  $z = 168 + w$ ,  $y = 136 + w$  e  $x = 264 + w$ . Então seja  $t = 160$ , encontramos o seguinte resultado:  $x = 264 + 160 = 424$ ,  $y = 136 + 160 = 296$ ,  $z = 168 + 160 = 328$ . Portanto, a solução geral do sistema é  $(424, 296, 328, 160)$ .

Portanto, através das atividades apresentadas foram resolvidas através de aplicações de sistemas lineares, na qual, conseguimos relacionar a matemática a outras áreas de conhecimento.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, foram apresentadas algumas aplicações de sistemas de equações lineares em diversas situações envolvendo outras áreas de conhecimento, os exemplos elencados foram retirados de livros bibliográficos do ensino médio e ensino superior, que podem ser adaptado e aplicado pelos professores dentro de sala de aula em diferentes níveis de ensino, mostrando que a matemática é uma ciência que não se limita a sua aplicação em uma única área.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de referência nacional para a formação dos currículos dos sistemas e das redes escolares públicas e privadas na educação brasileira, que regulamenta quais são as aprendizagens essenciais que os alunos da educação básica devem estudar, que

garanti a igualdade no sistema educacional, colaborando para a formação integral e para construção de uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva. Com o intuito de colaborar para uma melhoria sobre o assunto, este artigo buscou relacionar as competências específicas e as habilidades da área de matemáticas e suas tecnologias relacionados a Álgebra Linear dando ênfase ao assunto de sistemas de equações lineares.

Devido ao cenário que o mundo se encontrou nesses dois últimos anos, que foi o período da pandemia, onde as pessoas tiveram que mudar suas rotinas, as escolas tiveram que fechar e se adaptar ao novo formato de ensino que foi o ensino remoto, infelizmente não foi possível aplicar os sistemas de equações lineares dentro de sala de aula, mas, espero que as aplicações aqui apresentadas sobre os sistemas de equações lineares, possa contribuir de forma significativa para professores e alunos que vejam os sistemas lineares de forma mais relevante e atraente.

## 6 REFERÊNCIAS

ANTON, Howard. **Álgebra linear com aplicações** [recurso eletrônico] / Howard Anton, Chris Rorres; tradução técnica: Claus Ivo Doering. -10. ed. – Dados eletrônicos. –Porto Alegre: Bookman, 2012. 786p.

ANTON, Howard. **Álgebra linear contemporânea** [recurso eletrônico] / Howard Anton, Robert C. Busby; tradução Claus Ivo Doering. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre: Bookman, 2007. 610p.

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra linear** / José Luiz Boldrini ... [et al.]. – 3. Ed. – São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

BOYER, Carl Benjamin. *Historia da matemática*; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**: ensino médio/ Luiz Roberto Dante. – 3. ed. – São Paulo: Ática, 2016.

FONSECA, Martha Reis Marques da. **Química: ensino médio**/ Martha Reis. – 2. ed. –São Paulo: Ática, 2016.

LEZZI, Gelson. **Matemática: ciência e aplicações**: ensino médio, volume 2/ Gelson Lezzi ... [et.al.]. -9. Ed. -São Paulo: Saraiva, 2016.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Álgebra linear** [recurso eletrônico] / Seymou Lipschutz, Marc Lars Lipson ; tradução: Dr. Claus Ivo Doering.–4.ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : Bookman, 2011, 206p.

MORTIMER, Eduardo Fleury. **Química : ensino médio** / Eduardo Fleury Mortimer, Andréa Horta Machado. -- 3. ed. -- São Paulo : Scipione, 2016.

**Origem dos sistemas lineares e determinantes"** em *Só Matemática*. Virtuoso Tecnologia da Informação, 1998-2022. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/historia/sistemas.php> Acesso em 10 de nov. de 2022.

RUGGIERO, M. A. G; LOPES, V. L. R. **Calculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

SILVA, Daniele Della Méa da. **Ensino de sistemas lineares por meio da resolução de problemas**. 2010. 60 p. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria. RS, 2010.

VAILANT, Elinéia Pereira. **Modelagem de circuitos elétricos e resolução via sistemas lineares** [manuscrito] / Elinéia Pereira Vailant. -2021. 72 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – PROFMAT da Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal de Jataí, Goiás, 2021.