UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ROSÂNGELA DA SILVA PEREIRA

**PROPORÇÃO ÁUREA PARA O ENSINO BÁSICO:** Uma proposta de apostila para o ensino.

CASTANHAL-PA
2025

ROSÂNGELA DA SILVA PEREIRA

**PROPORÇÃO ÁUREA PARA O ENSINO BÁSICO**: Uma proposta de apostila para o ensino.

Trabalho de conclusão de curso, apresentado à faculdade de Matemática, do campus universitário de Castanhal, Universidade Federal do Pará, como requisito para a conclusão de curso de licenciatura em Matemática.

Orientador (a): Renato Germano Reis Nunes.

CASTANHAL-PA
2025

ROSÂNGELA DA SILVA PEREIRA

**PROPORÇÃO ÁUREA PARA O ENSINO BÁSICO: Uma proposta de apostila para o ensino.**

Trabalho de conclusão de curso, apresentado à faculdade de Matemática, do campus universitário de Castanhal, Universidade Federal do Pará, como requisito para a conclusão de curso de licenciatura em matemática.

Data de aprovação: 19 / 08 / 2025 .

Conceito: Aprovado

**BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr. Renato Germano Reis Nunes

Universidade Federal do Pará

Profa. Dra. Gerlândia De Castro Silva Thijm

Universidade Federal do Pará

Profa. Dra. Roberta Modesto Braga

Universidade Federal do Pará

À minha mãe que sempre me apoiou e a todos que nunca desistiram de mim.

## AGRADECIMENTOS

Quero agradecer à minha família, especialmente à minha mãe, por sempre ter sido um grande espelho para mim.

Agradeço também a todos que, de alguma forma, estiveram comigo nesse percurso. Não foram muitos, mas foram essenciais para que eu não desistisse.

A UFPA, aos professores e, em especial, ao meu orientador pela paciência. Sei que nem sempre fui fácil de acompanhar, mas sou grata por terem insistido junto comigo.

Não tenho grandes discursos, só o alívio e uma estranha calma por ter terminado algo que parecia impossível lá no começo. Esse trabalho é, mais do que tudo, uma parte de mim. E se ele for útil a alguém, nem que seja um pouco, já valeu a pena.

Obrigada.

*O essencial é invisível aos olhos.*

— Antoine de Saint-Exupéry (1943)

## RESUMO

Este trabalho discute a origem, evolução e aplicações da sequência de Fibonacci assim como a razão áurea, ressaltando o contexto histórico, natural, matemático e artístico, também trazendo sugestões de atividades didáticas que exploram o tema de forma prática e interdisciplinar. A partir da visão de Mário Lívio em seu livro intitulado Razão Áurea, o trabalho tem como objetivo a confecção de uma apostila científica sobre o assunto.

O primeiro capítulo aborda a origem da sequência de Fibonacci, desde as poesias sânscritas de Acharya Pingala na Índia antiga até chegar ao problema dos coelhos discutido por Leonardo de Pisa (Fibonacci), contextualizando sua descoberta e enfim trazendo exemplos práticos envolvendo a sequência assim relacionando a Matemática com situações cotidianas.

No segundo capítulo a razão áurea é explorada a partir da definição de Euclides em os elementos e sua relação com a sequência de Fibonacci. O capítulo discute suas propriedades, geometria, manifestações na natureza e curiosidades.

O terceiro capítulo mergulha na presença da razão áurea em diversas representações de arte. Seja na música, pintura, arquitetura, fotografia e até na literatura.

Por fim, o quarto capítulo trabalha atividades lúdicas que possam ser trabalhadas tanto em sala quanto interdisciplinarmente. Mostrando que a matemática, além de números, pode revelar padrões universais de beleza e organização.

**Palavras-chave:** fibonacci; razão áurea; número de ouro; retângulo áureo.

**ABSTRACT**

This paper discusses the origin, evolution, and applications of the Fibonacci sequence as well as the golden ratio, highlighting the historical, natural, mathematical, and artistic contexts. It also presents suggestions for didactic activities that explore the theme in a practical and interdisciplinary manner. Based on the perspective of Mario Livio in his book The Golden Ratio, the objective of this work is the development of a scientific booklet on the subject.

The first chapter addresses the origin of the Fibonacci sequence, from the Sanskrit poetry of Acharya Pingala in ancient India to the rabbit problem discussed by Leonardo of Pisa (Fibonacci), contextualizing its discovery and providing practical examples involving the sequence, thus connecting mathematics to everyday situations.

The second chapter explores the golden ratio starting from Euclid's definition in The Elements and its connection to the Fibonacci sequence. The chapter discusses its properties, geometry, manifestations in nature, and curiosities.

The third chapter delves into the presence of the golden ratio in various forms of art, including music, painting, architecture, photography, and even literature.

Finally, the fourth chapter presents playful activities that can be used both in the classroom and in interdisciplinary projects, showing that mathematics, beyond numbers, can reveal universal patterns of beauty and organization.



**Keywords**: Fibonacci; golden ratio; golden number; golden rectangle.

## LISTA DE FIGURAS

**LISTA DE TABELAS**

**SUMÁRIO**

## 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho representa não apenas uma produção acadêmica, mas também um processo pessoal de construção, pois surge da reflexão sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos no aprendizado da Matemática e da necessidade de proporcionar recursos que despertem neles maior interesse e envolvimento com a disciplina. Em um contexto educacional cada vez mais permeado pela tecnologia, é desafiador manter crianças e jovens engajados em sala de aula, especialmente quando a Matemática é percebida apenas como uma sequência de cálculos abstratos e números. Nesse cenário, a Proporção Áurea se apresenta como um tema capaz de aproximar o conteúdo matemático da realidade dos estudantes, revelando sua presença tanto na natureza quanto na arte e em outras áreas do conhecimento, evidenciando a interdisciplinaridade e a beleza intrínseca da Matemática.

O objetivo geral deste trabalho consiste na elaboração de uma apostila informativa voltada ao ensino da Proporção Áurea, que possa servir como recurso de apoio ao professor em sala de aula. A apostila busca não apenas apresentar a fundamentação teórica e histórica do tema, mas também propor atividades práticas que promovam a participação dos alunos e estimulem a aprendizagem de forma significativa. As atividades foram escolhidas de modo a exigir poucos materiais, permitindo sua aplicação em diferentes contextos escolares, inclusive na ausência de suporte institucional ou recursos pedagógicos específicos.

Os objetivos específicos deste trabalho são: desenvolver a apostila como material didático estruturado; apresentar a origem e a evolução histórica da Razão Áurea; explorar suas aplicações na arte e na natureza; estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento e trabalhar atividades simples com poucos recursos manipuláveis. Com isso, se espera que a iniciativa contribua para que o ensino da Matemática seja percebido pelos alunos de maneira mais rica e envolvente, despertando curiosidade, interesse e valorização da disciplina.

## 2. METODOLOGIA

Este trabalho foi desenvolvido a partir de uma abordagem qualitativa, com caráter exploratório e descritivo, tendo como foco a pesquisa bibliográfica e a elaboração de material didático voltado para o ensino básico. A escolha por essa metodologia se deu em função da natureza do objeto de estudo que envolve aspectos históricos, matemáticos e artísticos, demandando um levantamento amplo e interdisciplinar de informações.

A primeira etapa consistiu na pesquisa bibliográfica, realizada a partir de livros, artigos científicos, teses e dissertações, assim como fontes digitais confiáveis. Entre as referências, destacam-se obras de autores como Mário Lívio, Keith Devlin e Donald in Matila Ghyka, além de materiais de divulgação científica e conteúdos disponibilizados em portais educacionais. O objetivo desta etapa foi reunir conceitos básicos, contextualizar historicamente o surgimento da razão áurea e compreender suas aplicações na arte, arquitetura, natureza e matemática.

Em seguida, foi conduzida uma seleção e organização do conteúdo, dividindo-o em quatro capítulos: primeiro apresentando sua descoberta, evolução histórica e importância no pensamento matemático, seguido de uma exploração de exemplos concretos, como o crescimento de plantas, conchas, obras de arte clássicas e arquitetura. Depois demonstrando formas de cálculo, representações gráficas e relação com a sequência de Fibonacci, chegando, por fim, a atividades didáticas, incluindo propostas interativas e práticas para o trabalho em sala de aula, com a intenção de auxiliar na compreensão do tema por estudantes do ensino básico.

A terceira etapa correspondeu à elaboração da apostila, estruturada com linguagem clara e acessível, mas sem abrir mão da ideia conceitual. O material foi criado com elementos visuais, exemplos ilustrados e sequências lógicas que levam o leitor desde os conceitos introdutórios até aplicações mais complexas.

Na construção do quarto capítulo, foram priorizadas atividades interativas que estimulam a participação interativa do estudante, como construções geométricas com régua e compasso, medições em obras de arte, análise de proporções em objetos do cotidiano e experimentos visuais que permitam identificar a presença da razão áurea no mundo real.

Por fim, o trabalho passou por revisão de conteúdo e formatação de acordo com as normas da ABNT a partir do auxílio dos livros de Marconi e Lakatos(2017) e Prodanov e

Freitas (2013) , assegurando clareza, coesão e adequação acadêmica. Essa metodologia buscou não apenas organizar o conhecimento sobre a razão áurea, mas também transformá-lo em um recurso pedagógico de fácil aplicação para professores e alunos.

## 3. A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI.

Precursor da sequência de números que ficaria conhecida, posteriormente, com seu nome, Leonardo de Pisa, ou Fibonacci, também foi responsável por aprender e adaptar teorias matemáticas Hindu-Arábicas, antes usadas apenas no comércio oriental, agora também no ocidente. Porém, há controvérsias sobre o descobrimento da sequência, estudos indicam que a primeira menção feita foi por volta de 200 a.c. pelo matemático indiano Pingala. Neste capítulo iremos detalhar historicamente os pontos principais das duas construções.

### 3.1.Pingala e a poesia sânscrita

Estima-se que o famoso matemático indiano tenha vivido por volta de 400-200 a.c., ou um pouco antes. Acharya Pingala (Figura 1) é mais conhecido pelo estudo das métricas poéticas sânscritas, mais especificamente pelo trabalho Chandahśāstra (a ciência da métrica).

Figura 1 — Acharya Pingala

Disponível em: https://www.prayoga.org.in/post/acharya-pingala-s-maathra-meru

Trabalho esse que buscava explorar e sistematizar os padrões de sílabas longas (Guru) e curtas (Laghu) em versos de poesia védica.

Segundo o site Cuemath (2020) os versos curtos e longos também eram representados como 0 e 1, respectivamente. Desse modo, sem querer, acabou por mencionar o sistema binário, posteriormente desenvolvido por Gottfried Wilhelm Leibniz[1] durante o século XVIII. Além do sistema binário, a sequência de Fibonacci também pôde ser expressa a partir de seu estudo sobre padrões métricos. Chamado por Pingala de mātrāmeru (montanha ou escalada de medidas), era usado para determinar o número possível de combinações de sílabas longas e/ou curtas: Um verso de 1 unidade de tempo, composta por uma sílaba curta seria representada de apenas uma forma: L. Um verso de 2 unidades pode ser representado de duas formas: LL (curta + curta) ou G. De 3 unidades, três formas: LLL, GL, LG. 4 unidades, 5 formas: LLLL, LLG, LGL, LGG, LL. E assim por diante, sendo visível o padrão: 1, 2, 3, 5…, representado na tabela 1, também encontrados na sequência de Fibonacci.

Tabela 1 — Sequência de versos sânscritos

| Unidade | Formas | Total |
|---|---|---|
| 1 | L | 1 |
| 2 | LL ou G | 2 |
| 3 | LLL, LG, GL | 3 |
| 4 | LLLL, LLG, LGL, GLL, GG | 5 |
| 5 | LLLLL, LLLG, LLGL, LLGL, LLLLL, GGL, GLG, LGG | 8 |
| 6 | LLLLLL, LLLLG, LLLGL, LLGLL, LLGLL, GLLLL, GGLL, GLGL, LGGL, GLLG, LGLG, LLGG, GGG | 13 |

Fonte: Adaptado pela autora com o uso do Canva

Apesar de ter uma visível diferença no início da sequência, é inegável que o padrão existe. Porém, não havia outra utilidade além da poesia sânscrita na época, isso até ser redescoberto por Leonardo de Pisa, séculos depois.

### 3.2. Leonardo de pisa e o problema dos coelhos

Leonardo de Pisa (Figura 2), mais conhecido como Fibonacci, nasceu em Pisa, na Itália, na década de 1170. Filho de mercador e funcionário do governo, teve a oportunidade de estudar e aperfeiçoar os numerais indu-arábicos em viagens ao oriente médio pois, até então, utilizavam o ábaco como meio de soma e subtração, porém, para operações mais complexas, como a multiplicação, não era um instrumento de fácil manuseio. Tendo em vista o contexto histórico, os mercadores, não necessariamente, se importavam em utilizar o ábaco. Mesmo assim, Fibonacci não só aperfeiçoou os numerais para o padrão usado hoje, como também

[1] Filósofo, matemático, cientista e diplomata alemão. Além do sistema número binário, também é conhecido por suas contribuições ao cálculo diferencial e integral independente e pela teoria das Mônadas.

traduziu de maneira lúdica e versátil para o entendimento em seu livro *liber abaci* (*livro do ábaco*) publicado em 1202 (*apud* Lívio, 2006, p.108)

Figura 2 — Leonardo de Pisa

Disponível em: https://mats1fvt.blogspot.com/2016/06/2-leonardo-fibonacci.html

Seu livro o fez ter tanta visibilidade que chegou ao imperador romano Frederico II (*stupor mundi*[2]), sendo chamado para resolver problemas matemáticos bastante elaborados pelo então matemático da corte Johannes de Palermo. Tendo sucesso em questões que hoje precisam de calculadoras para serem feitas.

Ele também dedicou um de seus livros ao imperador: *liber quadratorum* (livro dos quadrados). Além desses dois livros, também escreveu um livro curto chamado *flos* (flor), onde descreveu dois dos problemas de Johannes resolvidos e *pratica geometridae* ( prática de geometria), publicado em 1223. Segundo Mário Lívio, em seu livro intitulado Razão áurea:

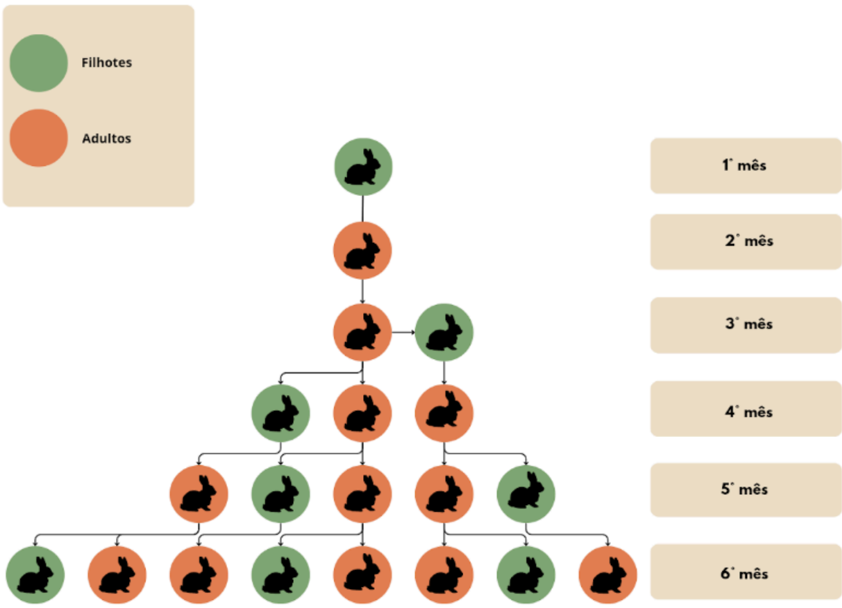
> O papel de Fibonacci na história da Razão Áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a Razão Áurea, foi responsável por um progresso significativo mas não espetacular.
> Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver com a Razão Áurea, ele expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de suas aplicações. (Lívio, 2006, p. 155)

O problema em questão encontra-se em *liber abaci* onde Fibonacci traz o seguinte problema: Quantos casais de coelhos teremos dentro de um ano considerando que, atingem a idade adulta no segundo mês, podendo reproduzir. todos os meses os casais férteis dão a luz a um novo casal, não há problemas genéticos ou consanguíneo entre os coelhos e os coelhos

[2] Em português: *maravilha do mundo*. Recebeu o apelido por patrocinar estudos matemáticos e científicos.

nunca morrem? Para solucionar a questão proposta, ele utilizou a seguinte lógica representada na figura 3:

Figura 3 — Demonstração da sequência de Fibonacci na questão dos coelhos.




Fonte: adaptado pela autora com o uso do Canva.

No primeiro mês o casal ainda é filhote, no segundo mês chegam na idade adulta e somente no terceiro mês passam a reproduzir. No quarto mês o primeiro casal dá à luz a mais um e o casal anterior de filhotes chega na fase adulta, somando três casais. No quinto mês, dois casais adultos geram mais dois pares de casal de filhotes e o casal de filhotes anterior chega na fase adulta totalizando cinco pares e no sexto mês, três casais adultos geram três casais de filhotes e os filhotes do mês anterior chegam na idade adulta formando oito casais e a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8,... Que fazem parte da sequência de Fibonacci (Lívio, 2006, p. 113)

Note que, se separarmos apenas os pares adultos de coelhos ou apenas os filhotes, a sequência continua aparecendo. Além disso, ao observar o desenvolvimento do experimento, Fibonacci percebeu que o crescimento a cada mês era o resultado da soma dos pares de coelhos do mês anterior com os atuais. Dessa forma, concluiu que:

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 2 = 3$$

$$2 + 3 = 5$$

$$3 + 5 = 8$$

Ou seja, basta somar todos os termos até o 12º mês:

Figura 4 — Crescimento populacional de coelhos num intervalo de um ano.

| 1° mês | 2° mês | 3° mês | 4° mês | 5° mês | 6° mês | 7° mês | 8° mês | 9° mês | 10° mês | 11° mês | 12° mês |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 |

Fonte: Adaptado pela autora com o uso do Word

Note que se somarmos 13 + 21 (que representam o sétimo e oitavo meses respectivamente) seu resultado é igual a 34 (nono mês). Se ele quisesse saber, por exemplo, o total de casais de coelhos dentro de um ano e um mês, bastava apenas somar os resultados dos dois últimos meses.

Figura 5 — Crescimento populacional de coelhos em 13 meses.

| 1° mês | 2° mês | 3° mês | 4° mês | 5° mês | 6° mês | 7° mês | 8° mês | 9° mês | 10° mês | 11° mês | 12° mês | +1 mês |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 | 233 |

Fonte: Adaptado pela autora com o uso do Word

O apelido Fibonacci (do latim *filho da boa natureza*) teve sua primeira aparição, provavelmente, em uma nota de rodapé por Guillaume Libri[3] em seu livro intitulado Histoire des Sciences Mathématique en Italie (História das ciências matemáticas na Itália) em 1838 (*apud* Lívio, 2006, p. 109).

Apesar de ter sido bastante relevante, especialmente durante o renascimento, os estudos da sequência só ganharam reconhecimento no século XIX. Recebendo o nome de sequência de Fibonacci pelo francês Édouard Lucas[4] (1847 – 1891, *apud* Lívio, 2006, p. 114)

A sequência tem como propriedade geral cada termo ser o resultado da soma dos dois termos anteriores. Desse modo temos a fórmula[5]:

$$F_{n-2} = F_{n-1} + F_n$$

Onde $F_n$ é o n-ésimo número da sequência.

$F_{n-1}$ é o termo seguinte a $F_n$

$F_{n-2}$ é o termo seguinte a $F_{n-1}$.

Se pegarmos o problema dos coelhos e quisermos saber qual o valor do 14° termo, por exemplo. Temos que $F_{n+2}$ = 14° termo, $F_n$= 13° termo e $F_{n-1}$ = 12° termo. Então:

$$F_{n+2} = 144 + 233$$

$$F_{n+2}= 377$$

[3] Além de conde e matemático italiano, ficou mais conhecido por roubar livros enquanto inspetor de bibliotecas na França.
[4] Matemático famoso por popularizar o problema das torres de Hanói.
[5] Segundo Mário Lívio, feita em uma notação em 1634 por Albert Girard, matemático francês.

Logo, o 14° termo da sequência é 377.

Um outro exemplo bastante semelhante ao das métricas de pingala é o de uma criança subindo as escadas: imagine que o número máximo de degraus que uma criança consegue subir de uma única vez é 2 — levando em consideração que pode subir um de cada vez ou dois degraus de uma vez. Se n é o número de degraus na escada e $D_n$ o número de maneiras que ela pode subir, de quantas maneiras ela pode chegar ao topo se n = 8?

Figura 6 — Descrição do exemplo dos degraus

| *n* | D*n* | total |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 11, 2 | 2 |
| 3 | 111, 12, 21 | 3 |
| 4 | 1111, 112, 121, 211, 22 | 5 |
| 5 | 11111, 1112, 1121, 1211, 2111, 221, 212, 122 | 8 |
| 6 | 111111, 11112, 11121, 11211, 12111, 21111, 2211, 1212, 1221, 2112, 2121, 1122, 222. | 13 |
| 7 | 1111111, 111112, 111121, 111211, 112111, 121111, 211111, 11122, 11212, 11221, 12112, 12121, 12211, 21112, 21121, 21211, 22111, 1222, 2122, 2212, 2221 | 21 |
| 8 | 11111111, 1111112, 1111121, 1111211, 1112111, 1121111, 1211111, 2111111, 111122, 111212, 111221, 112112, 112121, 112211, 121112, 121121, 121211, 122111, 211112, 211121, 211211, 212111, 221111, 11222, 12122, 12212, 12221, 21122, 21212, 21221, 22112, 22121, 22211, 2222 | 34 |

Fonte: Adaptado pela autora com o uso do Canva

Se n = 1, a criança só tem uma opção de subida. Quando n = 2, há duas maneiras de subir. n = 3, três maneiras e assim por diante como podemos ver na Figura 6. Logo, quando n = 8, $D_n$ = 34.

Há inúmeros exemplos de como podemos encontrar a sequência de Fibonacci além dos coelhos e do ato de subir escadas, mas como a sequência se relaciona com a proporção/razão áurea? É o que veremos no capítulo seguinte.

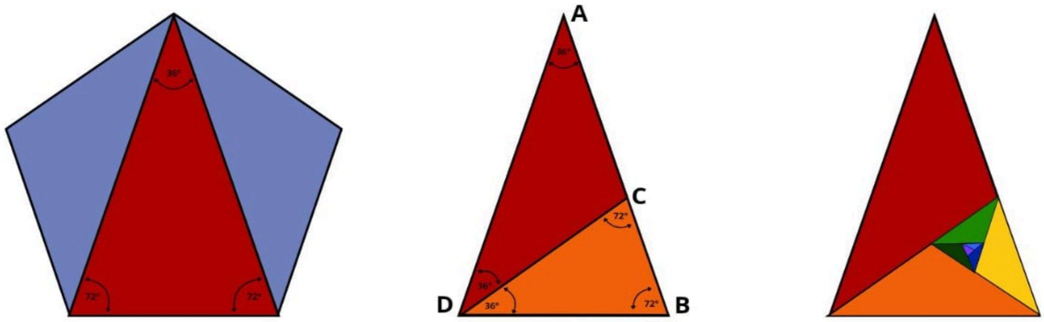
## 4. RAZÃO ÁUREA.

Segundo Mário Lívio (2006, p. 11): a primeira definição clara do que mais tarde se tornou conhecido como a Razão Áurea foi dada por volta de 300 a.C. pelo fundador da geometria como sistema dedutivo formalizado, Euclides de Alexandria. Em seus 13 livros que formam o conjunto do mais conhecido trabalho de sua carreira, *Elementos*, a razão áurea é mencionada pelo menos em quatro deles.

Em especial no quarto livro, quando ele discute a construção do pentágono que foi o motivo principal do interesse dos gregos pela razão áurea (Figura 7). De fato, quando refletimos sobre como podemos extrair a razão de dentro do pentágono, a solução não só é elegante como também é bonita.

A figura A representa o pentágono. Nele está destacado um triângulo isósceles com ângulos de 72º nas bases e 36º no topo. Já na figura B o triângulo isósceles recebe um novo triângulo com as mesmas proporções dentro de si. Se continuarmos a traçar linhas para criar novos triângulos, como na figura C, perceberemos que a proporção se mantém infinitamente.

Figura 7 — Representação das três figuras extraídas de um pentágono, A, B e C, respectivamente.




(A) (B) (C)

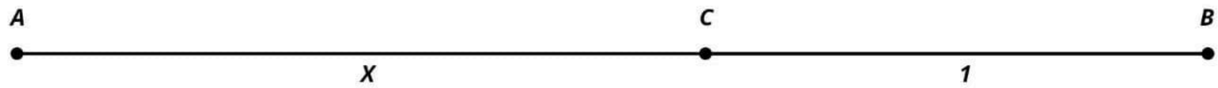
Fonte: Adaptado pela autora com o uso do Canva.

Para entender como o triângulo se relaciona a razão áurea, primeiramente devemos entender as propriedades e curiosidades de *Phi*.

### 4.1. Φ (Phi), o número de ouro.

Ainda falando sobre Euclides, quando dividimos uma linha AB por um ponto C, a razão extrema e média diz que o segmento maior dividido pelo menor é igual ao segmento inteiro dividido pelo maior. Como representado na Figura 8.

Figura 8 — segmento de reta AB.




Fonte: Adaptado pela autora com o uso do Canva.

Ou seja:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$$

Segundo a definição de Euclides sobre geometria elementar, o ponto C divide AB exatamente na razão áurea. Isso também se aplica ao triângulo do exemplo anterior.

Como sabemos, quando trabalhamos com ângulos internos de figuras regulares planas, a soma dos ângulos se dá por 180(n-2), com n sendo o número de lados. No exemplo anterior, tivemos um triângulo destacado na figura A, ou seja n = 3, resultando numa soma de ângulos igual a 180. Já no caso do pentágono, n = 5, resultando em uma soma de 540. Isso significa que $540/5=108°$.Como formamos um triângulo dentro do pentágono, existem três triângulos isósceles com bases de 36° cada.

Focando na figura B, traçando uma linha entre os pontos D e C, criamos um novo triângulo DBC com os mesmos ângulos do triângulo ADB, note que são similares. Isso significa que:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{DB}{DC}$$

Como são ambos isósceles, isso implica que:

$$DB = DC = AC$$

Assim sendo:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{AC}$$

Provando, assim, que o ponto C divide a linha AB em uma razão áurea e como AD = AB e DB = AC, então AD/DB = Φ.

Pode ser demonstrado no segmento, quando CB for 1 e AC x (figura 8), parafraseando Lívio (2006, p. 98), "[...]se a razão entre x e 1 é a mesma que entre x + 1(AB) e x, então a linha terá sido cortada na razão áurea[...]".

Ou seja:

$$\frac{x}{1} = x + \frac{1}{x}$$

Resultando em:

$$x^2 = x + 1$$

Resolvendo uma equação de segundo grau, o resultado é de:

$$x_1 = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

O valor de $x_1$ = 1,6180339887… o valor de phi. Desse modo, vemos que φ é um número irracional e infinito. E eis aí algumas curiosidades matemáticas sobre ele.

Quando pegamos, por exemplo, os dez primeiros algarismos após a vírgula e procuramos pelo seu quadrado ($1{,}6180339887^2$), o resultado é simplesmente 2,6180339887; observe que todos os algarismos depois da vírgula continuaram inalterados. O mesmo vale quando dividimos o valor por 1 ($\frac{1}{1{,}6180339887}$) o resultado é igual a 0,6180339887, novamente mudando apenas o valor antes da vírgula.

Agora vamos imaginar que exista o seguinte problema:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$

Para resolver o problema, o primeiro pensamento poderia ser o de somar separadamente os termos (√1+√1 = √2, √1+√1+√1 = √3…) o que seria bastante trabalhoso. Lívio traz uma solução bastante simples: acrescentamos x como resultado:

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$

Elevando ao quadrado:

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}$$

Porém, a expressão após 1 é igual à anterior. Ou seja, x. Desse modo, resultando numa equação de segundo grau: $x^2 = 1 + x$. Como resolvemos anteriormente, o resultado novamente será φ.

Outro exemplo curioso é quando temos a fração contínua:

$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}}$$

Para resolver usamos o mesmo princípio do problema anterior:

$$x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}}$$

Nesse caso, o denominador da equação segue sendo o próprio x, assim:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Multiplicando ambos os lados:

$$x^2 = x + 1$$

Novamente chegando ao valor de φ. Ou seja, podemos encontrar o valor de *phi* se calcularmos uma série consecutiva de termos. Dessa forma, poderíamos chegar a sequência de Fibonacci. Para achar a razão da sequência usamos:

$$F_n + \frac{1}{F_n}$$

Onde n é o enésimo número de Fibonacci e $F_n$+1 seu sucessor. Quanto maior o n, mais próximo de *phi* o resultado se aproxima. Podemos provar isso usando o exemplo anterior (com cinco casas decimais):

$$1 = 1,00000$$

$$1 + \frac{1}{1} = 2,00000$$

$$1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} = 1,50000$$

$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = \frac{5}{3} = 1,66666$$

$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = \frac{8}{5}\ 1,60000$$

$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}} = \frac{13}{8} = 1,62500$$

E assim sucessivamente provando que quanto maior o valor de n, mais próximo de φ ele se aproxima.

Os exemplos são apenas algumas das maravilhas que φ pode proporcionar dentro da matemática. Não é à toa que se tornou símbolo de devoção para os pitagóricos. Platão acreditava se tratar de um ser cósmico, divino. Adiante iremos entender melhor seu fascínio.

### 4.2 Retângulo áureo (o olho de Deus)

Uma curiosidade bastante interessante demonstrada no livro é a da criação dos retângulos áureos. Se pegamos uma sequência sucessiva ímpar de números de Fibonacci e multiplicarmos, o resultado sempre será o quadrado do último número:

$$1 * 1 + 1 * 2 + 2 * 3 = 9 \rightarrow 3^2 = 9$$

$$1 * 1 + 1 * 2 + 2 * 3 + 3 * 5 + 5 * 8 = 64 \rightarrow 8^2 = 64$$

$$1 * 1 + 1 * 2 + 2 * 3 + 3 * 5 + 5 * 8 + 8 * 13 + 13 * 21 = 441 \rightarrow 21^2 = 144$$

Essa é uma propriedade que pode ser lindamente demonstrada quando criamos um retângulo áureo que diz: qualquer número ímpar de retângulos com lados iguais a números sucessivos de Fibonacci se encaixa precisamente em um quadrado. Perfeitamente ilustrado na figura 9.

A figura em questão, quando sobreposta com um retângulo em cima do outro, cria o que chamamos de retângulo áureo representado na figura 10.

Figura 9 — quadrado áureo.

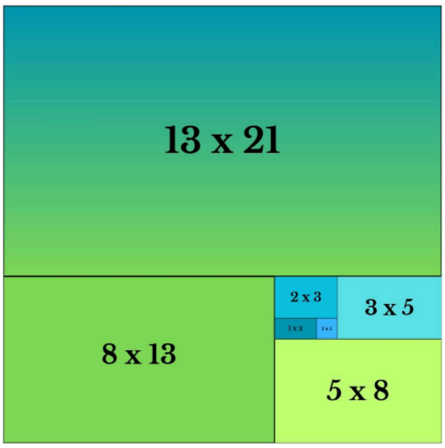
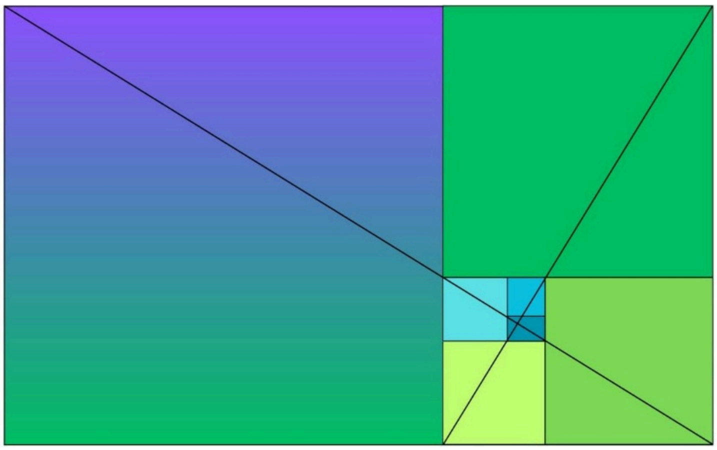



Figura 10 — retângulo áureo



Fonte: Adaptadas pela autora com o uso do Canva.

Note que quando retiramos um quadrado do retângulo áureo da figura 10, sobra um retângulo menor que também é áureo. Se continuarmos retirando, teremos retângulos cada vez menores. Desenhando duas diagonais em qualquer par de retângulos, elas irão se cruzar exatamente no mesmo ponto. Ponto esse que recebeu o nome de “olho de Deus” por Clifford A. Pickover[6], devido às propriedades divinas manifestadas pela razão áurea.

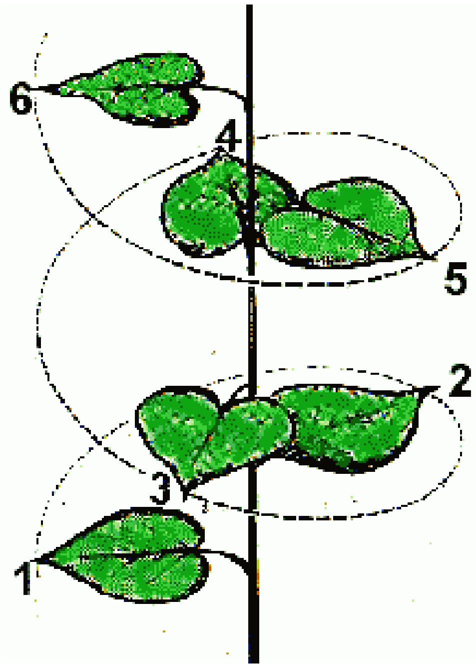
Mas voltando aos números de Fibonacci, desde que foram descobertos passaram a ser expressos não só através de cálculos e problemas bem elaborados, mas também na natureza. O que fascinava imensamente os pitagóricos.

[6] Grande divulgador da ciência e matemática, nascido em 1957, com mais de 40 obras em mais de uma dúzia de idiomas

**4.3. A razão áurea e a natureza.**

A natureza pode ser muitas vezes intrigante. Lívio descreve em seu livro como os ramos crescem em uma determinada planta de modo que todas as folhas recebam luz solar.

Figura 11 — Caule de razão ⅓




Disponível em:
https://matheusmathica.blogspot.com/2010/01/os-numeros-de-fibonacci-sao-encontrados.html

O espaçamento dos galhos de uma determinada árvore, por exemplo, é distribuído como uma espiral (ou parafuso, como descreve ele) a fim de que a umidade e a luz sejam concedidas a todas as folhas. Esse é um fenômeno chamado de *phyllotaxis* (arranjo de folhas). Como dito por Lívio.

> [...]nas tílias americanas, as folhas aparecem geralmente em dois lados opostos (correspondendo a metade de uma volta em torno dos ramos), o que é conhecido como razão filotáxica ½. Em outras plantas , como a aveleira, a amoreira e a faia, a passagem de uma folha para a seguinte envolve um terço de uma volta (razão filotáxica ⅓). De modo semelhante, a macieira, o carvalho e o damasqueiro têm folhas cada ⅖ de uma volta, e a pereira e o salgueiro-chorão têm folhas a cada ⅜ de uma volta [...].Você notará que todas as frações que são observadas são razões de membros alternados da sequência de Fibonacci (Lívio, 2021. p. 129).

A figura 11, ilustra a razão ⅓, pois, a cada volta completa passamos por três folhas. Seguindo a mesma lógica, algumas flores e frutas também seguem esse padrão. As rosas, por exemplo, se distribuem de acordo com a necessidade de sua própria estrutura. Segundo Lívio, as pétalas das rosas estão separadas por ângulos que são frações de múltiplos simples de φ, pois a primeira pétala se distância da segunda a uma distância de 1*φ, ou seja, 0,618 (tirando parte inteira), a terceira a 0,236 (2*φ) e assim por diante em frações de uma volta completa.

Nos girassóis há padrões tanto indo quanto voltando, com 34 e 55 espirais comumente, também existindo de valores maiores, porém, todos sendo números de Fibonacci. Além disso, quando focamos nas frutas o abacaxi é citado como tendo em sua superfície cinco, oito, treze ou vinte e uma espirais de inclinação, ou seja, números de Fibonacci. Assim como as margaridas podem ter treze, vinte e uma ou trinta e quatro pétalas.

Obviamente não é uma regra geral. Apesar de definir algumas plantas e, de fato, fazer parte da natureza, a sequência de Fibonacci não se aplica a todas as plantas, flores ou frutas. Apesar disso, a razão áurea pode ser encontrada em diversos aspectos e em diferentes cenários na natureza num contexto geral. Seja num grão de área ou na via láctea. Como visto nas figuras 12 e 13 a seguir:

Figura 12 — Casca de Náutilos

Figura 13 — Via láctea

Disponíveis em:
https://hypescience.com/esses-10-fenomenos-naturais-sao-exemplos-da-sequencia-de-fibonacci/ e https://www.eso.org/public/portugal/images/potw1901a/.

Podemos ver claramente que, apesar de se tratarem de dois "objetos" de tamanho diferentes, possuem bastante similaridade já que ambas detém a chamada espiral áurea, vistas nas Figuras 14 e 15.. Naturalmente, a concha cresce de acordo com a necessidade do náutilo vivendo dentro de si, mas a via láctea tem uma explicação um pouco mais detalhada. Resumidamente, o disco gira em torno de si mesmo, porém, os corpos celestes contidos nele têm sua própria velocidade a depender da distância. Segundo Lívio, a velocidade é maior perto do centro e menor conforme se distancia.

Por ter o raio aumentado sempre que a movemos para o sentido horário, recebeu o nome de "espiral logarítmica". Além disso, conforme o tamanho aumenta, o formato permanece o mesmo, característica denominada de auto-similaridade. Adorada por Jacques Bernoulli, recebeu a descrição: "pode ser usada como um símbolo tanto de vigor e constância na adversidade quanto do corpo humano, o qual, após todas as mudanças, até mesmo após a morte, será restaurado ao seu exato e perfeito ser"(Lívio, 2006, p. 137).

Figura 14 — Retângulo áureo em uma concha.

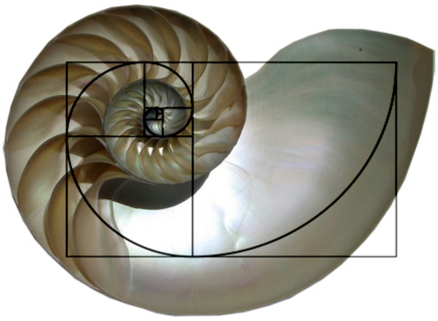
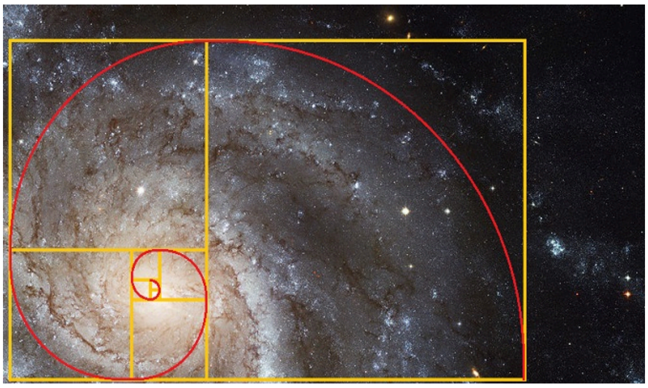


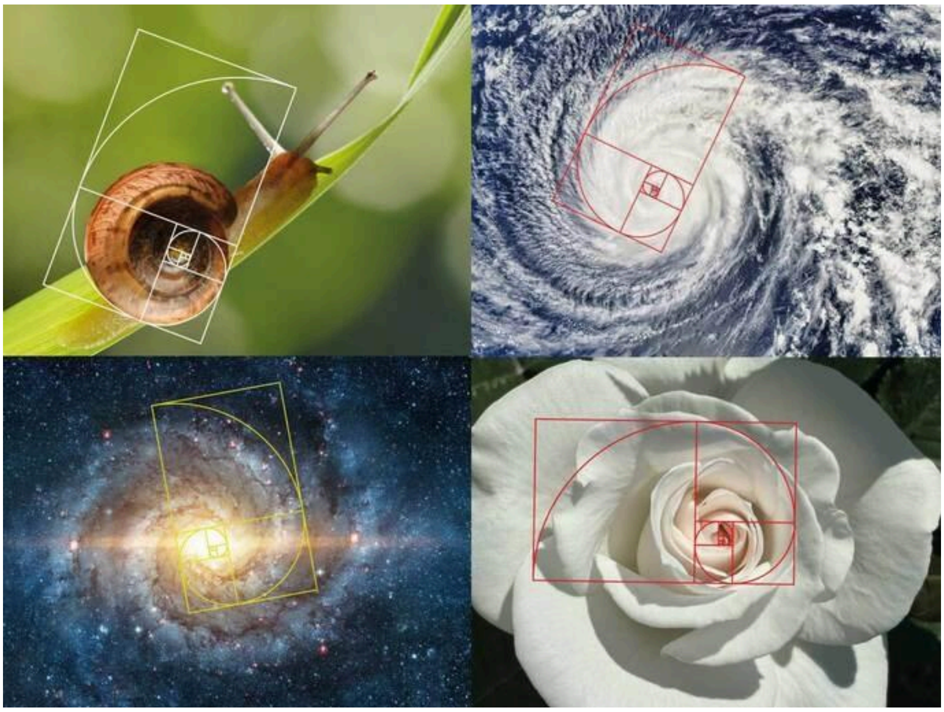
Figura 15 — Retângulo áureo na via láctea



Disponíveis em: https://share.google/hV67p4vlpizsqpK6p e https://ecohustler.com/culture/fibonacci-numbers-the-fingerprint-of-god

O que nos leva a uma curiosidade um tanto triste. Essa afirmação de Bernoulli o levou a desejar que em seu túmulo fossem cravados tanto a espiral quanto os dizeres "*Eadem mutato resurgo*"[7]. Infelizmente ao invés de uma espiral logarítmica, o pedreiro em questão não tinha conhecimento da diferença e acabou por gravar nele uma espiral arquimediana. A diferença entre as duas é que enquanto a espiral logarítmica tende a crescer e manter seu formato como uma concha, a de Arquimedes mantém as distâncias entre os rolamentos iguais como um rolo de papel.

Figura 16 — proporção áurea na natureza.



Disponível em: https://share.google/vFftuR6uwvyIxXtrW.

[7] Embora mudado, resurjo o mesmo.

Não é difícil perceber como essa espiral está presente em toda a natureza. Seja no céu, no mar, nas árvores, em fósseis e também no corpo humano. O que nos leva aos grandes artistas renascentistas e o desejo pela perfeição em suas obras.

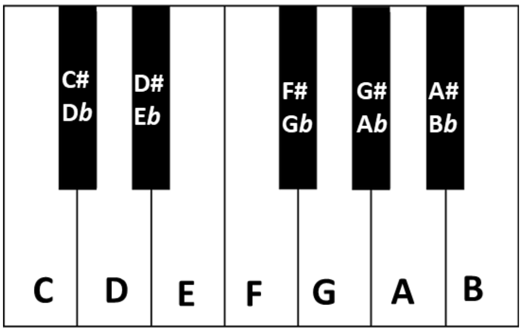
# 5. A ODISSEIA DA PROPORÇÃO ÁUREA NA ARTE

Apesar de se tratar de um assunto matemático, a proporção áurea se mescla e adapta a outras áreas também. No capítulo 1, surgiu por acaso com a poesia sânscrita de Pingala, passou para um problema um tanto curioso sobre coelhos imortais, seguiu para uma fascinante descoberta matemática e enfim chegou à natureza botânica e até astrológica. Mas sua capacidade criativa está mais além, a proporção áurea se estende a muitas vias, uma delas é a arte. Este capítulo resumirá a grande aventura da proporção áurea na arte, desde seus primeiros indícios até suas controvérsias, e desmentir fatos que podem ser vistos como verdade.

## 5.1. Na música.

A história da música não se distancia da matemática; na verdade, faz parte dela.

Figura 17 — Uma oitava de piano (sem dó maior)




Disponível em: https://share.google/FRD3AXHTghnpvtEgC.

Voltando à idade antiga, com Pitágoras e a descoberta das relações entre números inteiros e os diferentes tons musicais, como diz Lívio até a era medieval, onde Johann Sebastian Bach (1685-1750) decidiu codificar entre suas composições o próprio nome usando notas musicais como códigos. Uma delas sendo a gematria[8]. Onde considerava A = 1, B = 2, C = 3 e assim sucessivamente, com exceção de I e J que eram a mesma letra no alfabeto alemão da época. Desse modo, seu nome representado seria: B-A-C-H = 14 e/ou J-S-B-A-C-H = 41. Claro que a grande questão é: onde entra a razão áurea?

Nas palavras de Mário Lívio:

> [...]O violino é um instrumento no qual a Razão Áurea de fato aparece com frequência. Habitualmente, a caixa de som do violino contém doze ou mais arcos de curvatura (que fazem as curvas do violino) de cada lado. O arco plano na base quase sempre é centrado no ponto da Seção Áurea, a partir da linha do centro.(p.209)

[8] Método hermenêutico de análise de textos para atribuir valores numéricos às letras.

Essa afirmação pode ser representada por um dos violinos de Antonio Stradivari (1644-1737), considerados os melhores do mundo (Figura 18). Em desenhos originais pode ser visto o cuidado especial com os “olhos” dos buracos em posições determinadas pela razão áurea (não há imagens de boa qualidade de seus desenhos) o que dá ao violino maior qualidade. Desse modo, alguns desses violinos ainda existem nos dias atuais, porém, são mais comuns em museus ou leilões.

Figura 18 — Cópia de um Violino Stradivari

Disponível em:
https://www.antiquesandthearts.com/treasures-on-trial-the-art-and-science-of-detecting-fakes/

Além dos violinos, pianos também carregam a razão áurea. Uma oitava de um piano contém 13 teclas, 8 delas brancas e 5 pretas. Onde as pretas se dividem em grupos de 2 e 3 teclas. Ou seja, 2, 3, 5, 8, 13, números de Fibonacci. Além disso, muitos associam duas notas em questão bastante agradáveis, sendo elas A e C, onde C produz uma frequência aproximada de 264 enquanto que A produz uma frequência aproximada de 440. Quando buscamos a razão entre as duas frequências e simplificamos, o resultado é igual a 53. Isso também ocorre quando temos as notas C alto e E, onde as frequências são de 528 e 330 respectivamente. Simplificando a razão entre os dois obtemos 85.

Porém não se deve levar essa questão como um fator geral, já que muitos pianos tem oitavas de 12 teclas e não 13 (Figura 17). Outra controvérsia sobre o uso da razão áurea na música foi pesquisada pelo matemático John F. Putz ao tentar provar que Mozart (1756-1791) usava a razão áurea em suas composições. O que a princípio pareceu uma afirmação correta já que Mozart era um grande apaixonado por números, mas nada foi realmente comprovado, mesmo que suas músicas sejam relacionadas a algo divino e agradável aos ouvidos. O que há a seguir são apenas estudos e discordâncias sobre o uso ou não do uso da razão áurea em composições de Béla Bartók (1881-1945), que há bastante ênfase nos estudos das composições por Erno Lendvai, mas nada realmente concreto. E Claude Debussy

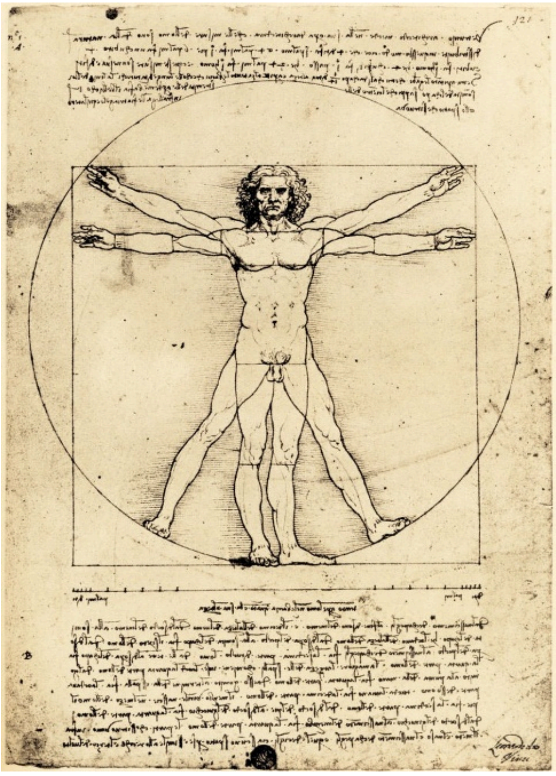
(1862-1918), com composições que podem ser trabalhadas matematicamente como as anteriores. Porém, novamente, não há nada que, de fato, comprove as afirmações dos estudos Roy Howard, que foi o autor de *Debussy em proporção* (1986). De qualquer maneira, não há como afirmar com certeza que os compositores focaram seus trabalhos com intuito de utilizar a razão áurea. Muitos chegaram a negar veementemente sua relação com a música. O que não se pode negar é a Matemática por trás das composições, tendo relação com a razão áurea ou não.

### 5.2. Na pintura

Este tópico é, sem dúvidas, o mais estudado quando se trata de proporcionalidade e razão áurea, já que se trata da demonstração visual da chamada " proporção divina " por Luca Pacioli (1445-1517). Assim como nos tópicos anteriores, também existem afirmações falsas e inconcretas.

Luca Pacioli, conhecido como o "pai da contabilidade" era um grande fã do trabalho de Fibonacci, assim como de outros matemáticos famosos de sua época. Seu apreço pela arte e geometria o levou a escrever *A divina proporção* (1509, *apud* Lívio, 2006, p. 156), onde Leonardo da Vinci em pessoa foi o responsável por ilustrar os sólidos geométricos presentes na obra, que iam desde de Matemática à arquitetura e estrutura do corpo humano.

Figura 19 — O homem vitruviano.

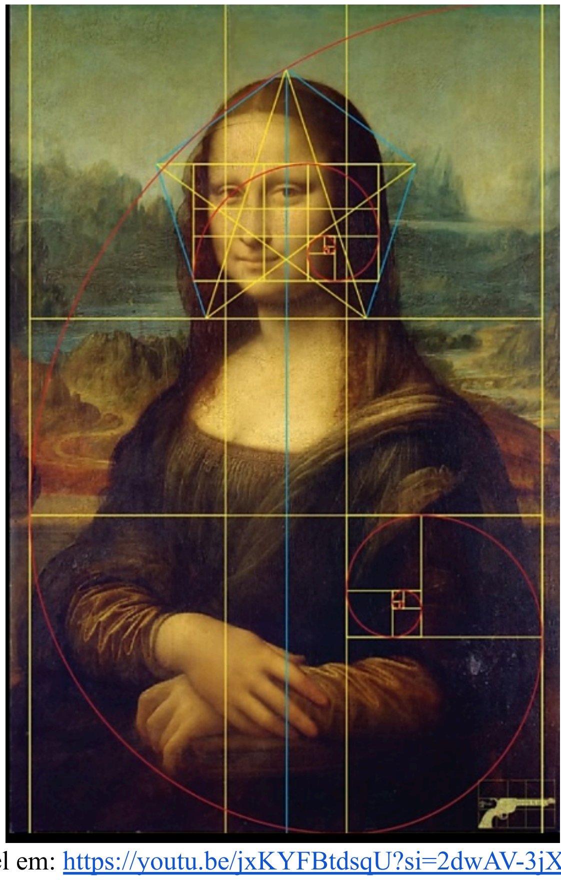


Disponível em: https://falodemaiis.blogspot.com/2013/12/o-codigo-da-vinci-capitulo-20.html

Inspirado por Marcus Vitruvius Pollio (70-25 a.c.) que, em suas palavras descreve que o corpo humano tinha seu umbigo como ponto central, pois se um homem estivesse deitado de costas, com os braços e pernas esticados e fosse traçado com um compasso a partir do umbigo um círculo, as palmas das mãos e dos pés tocariam esse tal círculo (Lívio, 2006, p. 157). Além de que, se este mesmo homem estiver com os braços esticados e medirmos de uma mão à outra, essa distância é a mesma que sua altura. Leonardo então desenhou o famoso homem vitruviano (figura 19).

Leonardo da Vinci é mais conhecido por sua obra "Monalisa". Além de pintor, ele também era arquiteto, músico, matemático, astrônomo, dentre outras especialidades do artista. Muitos acreditam que suas obras carregam a proporção áurea, comparam, por exemplo, a própria Monalisa com os retângulos áureos no escopo de seu rosto como na figura 20 a seguir:

Figura 20 — Monalisa áurea.



Disponível em: https://youtu.be/jxKYFBtdsqU?si=2dwAV-3jX6R73ptn

O homem vitruviano não é associado diretamente à razão áurea, suas proporções são únicas e defendidas por Pacioli como determinante para obras de arte. Porém, logicamente, assim como tantas outras obras, foi associado à proporção divina por ser agradável aos olhos. Da mesma forma, Monalisa, como mostrado na figura, apresenta diversos pontos de ligação com a proporção áurea mesmo que, atualmente, haja mais controvérsias sobre sua relação que afirmações.

O que não significa que não haja artistas que, de fato, usaram da proporção para criar suas obras. No caso de Leonardo da Vinci, apenas o esboço de um desenho intitulado "uma cabeça de ancião" parece demonstrar que o artista realmente usava de retângulos para determinar as medidas dos rostos em suas pinturas. Porém não há boas imagens do desenho.

Segundo Lívio, "o primeiro artista proeminente e teórico da arte a utilizar a razão provavelmente foi Paul Sérusier (1864-1927)"(p. 193).

Figura 21 — Mulheres Bretãs, o encontro no bosque sagrado (1892)

Disponível em: https://www.wikiart.org/en/paul-serusier/breton-women-the-meeting-in-the-sacred-grove.

Sérusier usava para verificar em algumas de suas invenções de formas e composições. Além dele, alguns artistas cubistas, como Juan Gris (1887-1927) e Jacques Lipchitz (Chaim Jacob (1891-1973) também utilizaram da razão áurea em suas obras.

Na década de 1920, Gino Severini (1883-1966) tentava unir futurismo e cubismo como objetivo.

Maria Vorobeva, pintora cubista russa, insinua em seu livro, *A Vida com os pintores de La Ruche* (1974 *apud* Lívio, 2006, p. 195), que Pablo Picasso, Rivera e Gris usaram a razão áurea como “outra maneira de dividir planos, o que é mais complexa e atrai as mentes experientes e inquisitivas.”

Por fim, fascinado pela aplicação da razão áurea na arte, o famoso arquiteto e pintor suíço-francês Charles Édouard Jeanneret (Le Corbusier, 1887-1965), teve grande impacto na arquitetura envolvendo a razão áurea.

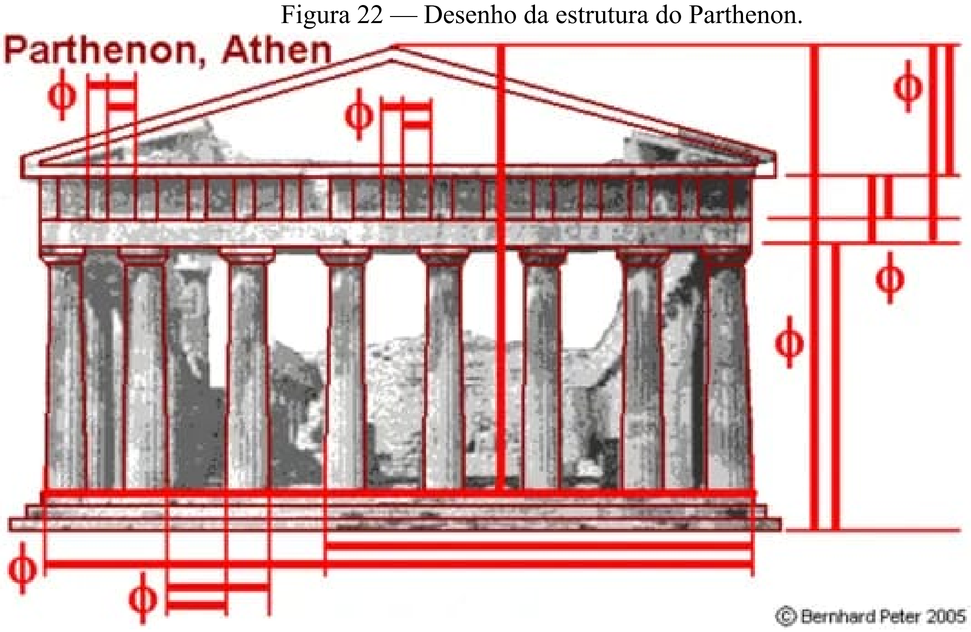
### 5.3. Na arquitetura

A arquitetura é uma grande aliada do ensino da Matemática quando se trata de geometria. Além disso, também pode contar histórias de uma vida passada distante, com reviravoltas, descobertas e contradições.

Quando se fala de razão áurea na arquitetura, muitos estudos podem apontar que as pirâmides teriam relação com essa fascinante proporção. Alguns até mantém a ideia ativa a fim de complementar o arsenal de falsas informações envolvendo a razão áurea. O que são bastante extensas.

O Parthenon é outra obra arquitetônica conhecida por conter medidas que se igualam à proporção áurea, seja pela harmonia e similaridade dos espaçamentos ou na própria estrutura.

Figura 22 — Desenho da estrutura do Parthenon.




Disponível em: https://share.google/9SndTWoIfpg0atRTX

Para Lívio não há, de fato, prova decisiva que há relação:

> É difícil dizer com certeza. Embora a maioria dos teoremas matemáticos referentes à Razão Áurea (ou "razão extrema e média") pareça ter sido formulada depois da construção do Partenon, existia um conhecimento considerável entre os pitagóricos antes disso. Assim, os arquitetos do Partenon podem ter decidido basear seu projeto em alguma noção predominante de padrão estético. No entanto, isto é bem menos certo do que muitos livros querem nos fazer crer, e não é uma teoria particularmente sustentada pelas dimensões reais do Partenon.(p. 92)

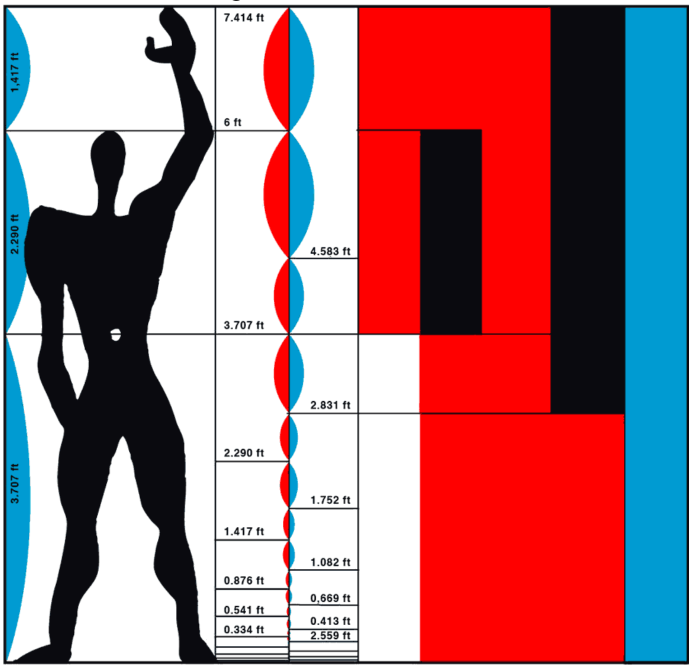
Porém, como dito antes, o famoso arquiteto e pintor, mais conhecido como Le Corbusier, foi um grande aliado da razão áurea. Ao buscar uma medida padronizada, criou um sistema proporcional que chamou de Modulor, esse sistema garantia que padrões harmoniosos a todas as necessidades da cidade moderna.

Lívio descreve em seu livro que:

> "Um homem medindo seis pés (cerca de 1,83 m), parecendo um pouco com o familiar logotipo do "Homem do Michelin", com seu braço erguido (até uma altura de 2,26 m), foi inserido em um quadrado [...]. A razão entre a altura do homem (183 cm) e a altura de seu umbigo (no ponto médio de 113 cm) foi escolhida precisamente em uma Razão Áurea. A altura total (dos pés até o braço levantado) também estava dividida em uma Razão Áurea (em 140 cm e 86 cm) no nível do pulso de um braço solto para baixo. Os dois quocientes ($\frac{113}{70}$) e ($\frac{140}{86}$) foram subdivididos em dimensões ainda menores de acordo com a série de Fibonacci (cada número sendo igual à soma dos dois anteriores). Na versão final do Modular [...], duas escalas de dimensões de Fibonacci interespiralantes foram, portanto, introduzidas (as "séries vermelha e azul")."(p. 198)

Essa medida de proporção é usada até os dias atuais para a criação de grandes estruturas. E claro, Mario Merz, que foi um dos mais importantes artistas a expressar a proporção. Por seu trabalho ser visual, porém, não serem quadros pintados, ele entra neste tópico. Segundo Lívio: "Merz começou a usar a sequência de Fibonacci em 1970, em uma série de trabalhos "conceituais" que incluíam os números na sequência ou várias espirais.

Figura 23 — o modulor




Disponível em
https://www.bricknbolt.com/blogs-and-articles/home-design-guide/anthropometry-in-architecture.

O desejo de Merz de utilizar números de Fibonacci se baseava no fato de que a sequência estava por trás de vários padrões de crescimento na natureza."(Lívio, 2006, p. 201).

Há dois trabalhos de Merz listados no livro de Lívio, um deles, intitulado “Fibonacci Nápoles”(1970) apresenta diversas fotografias de pessoas trabalhando enquanto compõem os números de Fibonacci.

### 5.5. Na literatura

Lívio descreve em seu livro que há duas formas de tratar da razão áurea dentro da literatura. Curiosamente, a primeira menção à ela foi feita a partir de contagem de versos como ilustrados no capítulo 1 deste trabalho. A segunda forma seria através de livros e dedicatórias associadas à razão áurea. Como mencionado nos capítulos anteriores, Fibonacci foi quem descreveu com detalhes seu problema dos coelhos em seu livro Liber abaci (1202). Euclides também o acompanha em Elementos. E então Pacioli em A divina proporção (1509). Muitos outros trabalhos foram desenvolvidos a partir das obras destacadas anteriormente.

Sejam para agregar ou, como diz Lívio, “criar malabarismos numéricos”, a proporção áurea teve grande participação e, por um período considerável, protagonismo na cabeça de grandes estudiosos do renascimento à era contemporânea.

## 6. A PROPORÇÃO ÁUREA NO ENSINO-APRENDIZAGEM

A razão áurea é, sem dúvidas, um dos assuntos mais interessantes a se tratar da matemática. Sendo assim, uma boa oportunidade para engajar os estudantes a reconhecerem o valor da disciplina além dos limites de sala de aula. Pensando nisso, este capítulo visa trazer algumas atividades que possam complementar e auxiliar os professores a trabalhar diferentes formas de atrair o olhar dos alunos para além do aprendizado cotidiano. A seguir estão listados algumas das atividades propostas por Rosania Maria Queiroz em seu trabalho intitulado "propostas de atividades: Razão áurea"(2007). E por fim, um pequeno desafio que pode ser imprimido e trabalhado em sala. As questões foram escolhidas por se tratarem de atividades simples que não necessitam de materiais manipuláveis além de papel e caneta.

### 6.1. Atividade 1: Relação áurea na biologia (flores).

Em resumo, os objetivos pedagógicos da atividade são: trabalhar em equipe, interação entre os alunos, observação e aplicação Matemática em uma perspectiva diferente, relacionar Matemática e biologia e incentivar a preservação ambiental.

Após explicação do assunto, com o uso da apostila ou outro meio de explicação sobre a sequência de Fibonacci, o professor deve dividir a sala em grupos de 4 a 6 pessoas. Cada grupo deve fazer uma breve pesquisa em sites, revistas, jornais, livros e etc, trazer recortes e fazer anotações em tabela como mostrado na tabela 2:

Tabela 2 — Tabela divertida das flores.

| Flor | Número de pétalas |
|---|---|
| **Íris** | |
| **Margarida** | |
| **Girassol** | |

Fonte: adaptada pela autora com o uso do Word

A partir das observações das tabelas, é possível perceber como várias das flores apresentam números de Fibonacci na quantidade de pétalas. Desse modo, os alunos podem discutir entre si as variações de quantidade, espécie e, consequentemente, pode-se trazer um debate sobre questões ambientais relacionadas às flores. favorecendo, assim, a interdisciplinaridade entre Biologia e Matemática

### 6.2. Atividade 2: Relação áurea na biologia (plantas)

A segunda atividade tem relação com a primeira. Ambas trabalham os mesmos objetivos com o acréscimo de estudar razão e proporção, observar que há padrões na disposição das folhas no caule e que até mesmo alunos com dificuldade no aprendizado são capazes de trabalhar e compreender a Matemática envolvida na atividade.

Esta atividade em questão, pode contar com apoio interdisciplinar de um professor de biologia que trará à sala imagens ou até mesmo plantas de pequeno porte para o estudo. Na falta de um segundo docente, o professor em sala pode trazer explicações sobre o porquê das disposições dos galhos e como a natureza se comporta seguindo um padrão necessário para a sobrevivência (no segundo capítulo deste trabalho há exemplos desta disposição).

Nas palavras de Rosania:

> Após observação de alguns exemplares, o professor poderá propor como pesquisa de campo um trabalho para ser realizado em pequenos grupos. Cada grupo deverá fazer a observação em outras plantas. Depois, tendo em mãos o resultado das pesquisas dos alunos, o professor poderá mostrar aos mesmos que a razão entre o número de voltas e a quantidade de folhas em muitas plantas são números da Seqüência de Fibonacci. Poderá aproveitar o momento para despertar nos alunos a apreciação da beleza e da estética nas plantas bem como a importância de preservar o Meio Ambiente (Queiroz, 2007, p. 14).

Assim como a atividade anterior, esta não necessita de muitos materiais manipuláveis. Sendo necessário somente papel e caneta.

### 6.3. Atividade 3: relação áurea na pintura

Os objetivos pedagógicos desta atividade são: relacionar Matemática e Artes, incentivar trabalho em grupo, trabalhar geometria com uso de materiais manipuláveis, razão e proporção e criar um bom relacionamento entre a Matemática e a criatividade dos alunos.

Criando grupos, o professor terá como objetivo encorajar os estudantes a produzirem Retângulos Áureos. Após a confecção e pintura dos retângulos, os alunos anotam em uma tabela os retângulos em ordem de preferência da seguinte forma:

Tabela 3 — Tabela divertida de comprimento.

| Retângulo | Comprimento (a) | Largura (b) | Perímetro | Área | Razão a/b |
|---|---|---|---|---|---|
| **N° 1** | | | | | |
| **N° 2** | | | | | |
| **N° 3** | | | | | |

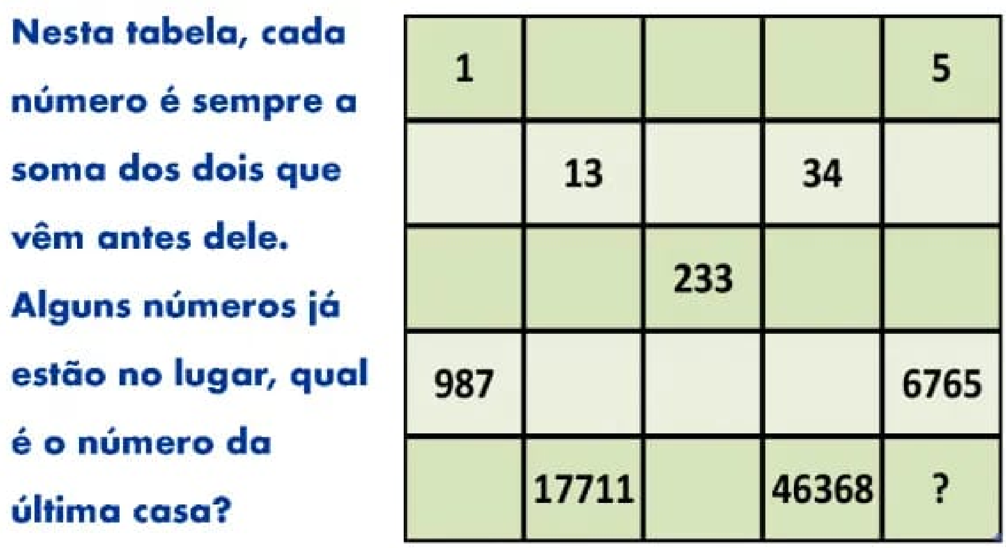
Fonte: adaptada pela autora com o uso do Word.

O objetivo da tabela, além de trabalhar matematicamente os pontos principais dos retângulos confeccionados, é demonstrar que, quanto mais próximo da razão áurea, mais esteticamente agradável aos olhos são.

### 6.4. Desafio: Resolver uma tabela áurea.

O desafio a seguir foi retirado do site Azup.com. Seu objetivo é trabalhar os números da sequência de Fibonacci de maneira a instigar os alunos a verificar quão grandes eles podem chegar em poucas somas.

Figura 23 — Desafio dos números de Fibonacci.




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | 5 |
| | 13 | | 34 | |
| | | 233 | | |
| 987 | | | | 6765 |
| | 17711 | | 46368 | ? |

Disponível em:
https://www.bricknbolt.com/blogs-and-articles/home-design-guide/anthropometry-in-architecture .

Conforme acompanham o crescimento acelerado dos números somados, o professor pode instigar a curiosidade dos alunos propondo que tentem fazer divisões de maneira decrescente a fim de demonstrar como os números de Fibonacci se aproximam de Phi gradualmente.

## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, pudemos observar como a sequência de Fibonacci e a razão áurea não são apenas conceitos matemáticos abstratos, mas elementos profundamente enraizados na história, na natureza e na expressão artística da humanidade. A partir dos estudos de Pingala na Índia antiga, que, mesmo sem o propósito explícito, anteciparam estruturas semelhantes à sequência de Fibonacci, até a formulação do problema dos coelhos por Leonardo de Pisa, ficou evidente que essas idéias atravessaram séculos e culturas, encontrando novas interpretações e aplicações ao longo do tempo.

A razão áurea, com seu valor irracional e harmônico, transcende a Matemática pura. Vimos como ela se manifesta tanto nas pétalas de uma flor quanto nas galáxias espirais, simbolizando a busca natural por equilíbrio e estética. O fascínio por essa proporção não passou despercebido pelos artistas renascentistas, arquitetos, músicos e cientistas, que viam nela uma chave para compreender e representar a beleza do mundo. Sua aparição em obras de arte, na arquitetura clássica e até mesmo em composições musicais ressalta como os números, longe de serem frios ou meramente utilitários, podem servir como linguagem universal da harmonia.

Contudo, o trabalho também procurou destacar que nem toda beleza segue padrões matemáticos, e nem toda manifestação da sequência ou da razão áurea é intencional ou plenamente comprovada. Há mitos e exageros, mas também há verdades fascinantes e conexões legítimas que revelam a profundidade e a onipresença desses conceitos. Além de, também, procurar maneiras de trabalhar dentro de sala de aula estratégias para incentivar a interação e participação dos discentes ao propor atividades que podem ser trabalhadas com pouca ou nenhuma estrutura, utilizando apenas papel e caneta.

Concluímos, portanto, que a sequência de Fibonacci e a proporção áurea representam não apenas avanços matemáticos, mas também pontes entre ciência, arte e natureza. São símbolos do eterno esforço humano de encontrar ordem, significado e beleza no caos do universo.

## REFERÊNCIAS


ALBERTSON, K. K. **Tesouros em julgamento:** a arte e a ciência de detectar falsificações. Disponível em: https://www.antiquesandthearts.com/treasures-on-trial-the-art-and-science-of-detecting-fakes/. Acesso em: 16 abr. 2025.

ASTH, R. C. **O que é e como calcular a Proporção Áurea.** Disponível em: https://www.todamateria.com.br/o-que-e-e-como-calcular-a-proporcao-aurea/#google_vignette. Acesso em: 21 jun. 2025.

BARBOSA, A. M. **Sequência de Fibonacci, razão áurea e o número de ouro**. Disponível em: https://matematicazup.com.br/sequencia-de-fibonacci/. Acesso em: 1 maio 2025.

BATISTA, M. F. **Sequência de Fibonacci**. Disponível em: https://azup.com.br/sequencia-de-fibonacci/. Acesso em: 17 maio 2025.

BYRD, D. **O que há de especial no formato da concha do Nautilus?** Disponível em: https://earthsky.org/human-world/nautilus-shell-fibonacci-logarithmic-spiral-golden-spiral/. Acesso em: 11 abr. 2025.

COCCARO, D. G. **A proporção áurea e sua presença na arte e na natureza**. Disponível em: https://www.jovenscientistasbrasil.com.br/post/a-propor%C3%A7%C3%A3o-%C3%A1urea-e-sua-presen%C3%A7a-na-arte-e-na-natureza. Acesso em: 15 abr. 2025.

DESCOMPLICANDO A MÚSICA. **Notas de teclado e piano**. Disponível em: https://www.descomplicandoamusica.com/notas-de-teclado-e-piano/. Acesso em: 16 abr. 2025.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

FALO DEMAIS. **O código da Vinci:** capítulo 20. Disponível em: http://falodemaiis.blogspot.com/2013/12/o-codigo-da-vinci-capitulo-20.html. Acesso em: 17 abr. 2025.

LIVIO, M. **Razão áurea:** a história de φ, um número surpreendente. Rio de Janeiro: Record, 2006.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. Fundamentos de metodologia científica. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2017.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013

QUEIROZ, R. M. **Razão áurea:** a beleza de uma razão surpreendente. Paraná: Governo do Paraná, 2007.

SALAZAR, J. **A sequência de Fibonacci**. Disponível em: https://souretardado.wordpress.com/2016/10/26/a-sequencia-fibonacci/. Acesso em: 11 abr. 2025.

SILVA, R. L.; ALMEIDA, R. L. S. **A fantástica sequência de Fibonacci e o enigmático número de ouro:** contexto histórico, definições, propriedades e aplicações. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, São Paulo, v. 18, p. 77–88, 2020.

WIKIART VISUAL ART ENCYCLOPEDIA. **Mulheres Bretãs, o encontro no Bosque Sagrado**. Disponível em: https://www.wikiart.org/en/paul-serusier/breton-women-the-meeting-in-the-sacred-grove. Acesso em: 1 maio 2025.