

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE EM MATEMÁTICA

WALLACE COELHO RAMOS JUNIOR

Sistemas de Timoshenko com dissipações friccionais: boa colocação e estabilidade exponencial

Belém - Pará
2023

WALLACE COELHO RAMOS JUNIOR

Sistemas de Timoshenko com dissipações friccionais: boa colocação e estabilidade exponencial

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará, como requisito básico para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva de Almeida Junior.

Coorientador: Prof. Dr. Eduardo Henrique Gomes Tavares.

Belém - Pará
2023

WALLACE COELHO RAMOS JUNIOR

Sistemas de Timoshenko com dissipações friccionais: boa colocação e estabilidade exponencial

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará, como requisito básico para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Prof. Dr. Dilberto Da Silva Almeida Junior (Orientador)
Faculdade de Matemática, UFPA

Eduardo H. G. Tavares

Prof. Dr. Eduardo Henrique Gomes Tavares (Coorientador)
Faculdade de Matemática, UFPA

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (Membro)
Faculdade de Matemática, UFPA

Anderson de Jesus Araújo Ramos

Prof. Dr. Anderson de Jesus Araujo Ramos (Membro)
Faculdade de Matemática, UFPA

DATA DA DEFESA: 20/11/2023

Conceito: Excelente

Belém - Pará
2023

Dedico esse trabalho a todos que compartilham a vida comigo.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente as minhas mães Andréa Santos, Nilza Sousa e Silvana Ramalho. A primeira, minha mãe de sangue, por todo seu amor infinito e dedicação durante todo meu desenvolvimento. A segunda, mãe de criação, por todos os ensinamentos e suportes desde a maternidade. Por fim, a mãezinha que ganhei no ensino fundamental, a qual me sinto orgulhoso de ouvir que represento sua história na educação.

Também ressalto a importância da minha família no processo: meus irmãos Iago, Larissa e Lorena, meu padrasto Edilson Sena, meu tio José Pereira, meus sobrinhos Isis, Isaac e minha prima Joice Sousa. Aproveito para pedir desculpa pela ausência no período, mas antecipo que só vai piorar. Aos meus vizinhos Herbti e Wallan pela carona diária na madrugada para universidade.

Aos meus amigos de longa data Jorge Augusto, David Rafael, Bruna Fonseca, Marcos Gabriel, Rebeca Alencar, Priscila Ramalho, Ítalo Pinto, Renan Cardoso e Aryana Farias.

Aos meus grandes amigos que fiz na graduação: Thatiana, Lidiane, Monique, Emerson, Fabíola, Felipe Baia, Jennyfer, Vinícios, Jeanne, Railane, Adriano, Rafael, Celso, Bryane, Luiz Guilherme, Vagner, Antônio, Glêssa, Marcel, Michele e Maurício. Aos integrantes da Faculdade de Matemática. Conhecer e compartilhar suas diferentes histórias contribuíram de maneira enorme tornar-me um melhor profissional.

Em especial, gostaria de agradecer a Maridilce e sua família por disponibilizar seu sábado para estudarmos, fato fundamental para meu desenvolvimento acadêmico. Aos meus amigos de estudos diários Felipe Quaresma, Alisson Arias e Williams da Silva e Augusto Cezar.

Agradecer imensamente ao meu orientador Profº Eduardo Tavares, por todo ensinamento, mas principalmente, por impulsionar a alegria que é estudar Matemática e mostrar que sou capaz de crescer academicamente. Ao Profº João Rodrigues pelo acompanhamento de 4 anos de iniciação científica, que contribuíram enormemente para meu desenvolvimento. A profª Amanda Corrêa por acreditar no meu potencial no início da graduação.

Agradeço a banca examinadora por aceitar o convite e contribuir, com suas devidas considerações, a confecção do presente trabalho.

Sou uma pessoa privilegiada por possuir um grande número de pessoas incríveis ao meu redor. Caso alguém não esteja citado no texto, peço perdão e afirmo não significa que esqueci de você, mas apenas que é somente uma folha pra agradecer a presença de todos na minha vida. Por fim, e não menos importante, agradecer ao Corinthians por motivar-me diariamente na busca de realizar meus sonhos.

With shortness of breath, i'll explain the infinite. How rare and beautiful it truly is that we exist.

Sleeping at last.

RESUMO

Neste trabalho analisamos, sob o ponto de vista matemático, acerca do sistema de vigas de Timoshenko com dissipações do tipo friccionais. Garantimos, utilizando a teoria de semigrupo, a boa colocação do problema e o decaimento exponencial para os casos em que os amortecimentos estão agindo simultaneamente na força de cisalhamento e no momento fletor e também para o caso que está presente somente em uma delas.

Palavras-chave: Boa colocação, estabilidade exponencial, sistemas de Timoshenko, teoria de semigrupo.

ABSTRACT

In this work we analyze, from a mathematical point of view, a Timoshenko system with frictional dissipations. We guarantee, using the semigroup theory, the well-posedness of the problem and the exponential decay for the case in which the dampings are acting simultaneously on the shear force and the bending moment and also for the cases that it is present only in one of the forces.

Keywords: Well-posedness, exponential stability, Timoshenko systems, semigroup theory

Sumário

Sumário 9

1 INTRODUÇÃO 10

2 RESULTADOS PRELIMINARES 13
2.1 Análise funcional 13
2.2 Espaços de Sobolev unidimensional 15
2.3 Teoria de semigrupos 17
2.4 Desigualdades notáveis 19

3 SISTEMA DE TIMOSHENKO COM DUAS DISSIPAÇÕES FRICCIONAIS 22
3.1 O semigrupo solução 22
3.2 Estabilidade exponencial 28
3.2.1 Estimativas técnicas 29
3.2.2 Prova do Teorema 3.2 33

4 SISTEMA DE TIMOSHENKO PARCIALMENTE DISSIPATIVO $(\alpha > 0$ **e** $\beta = 0)$ 36
4.1 Estabilidade exponencial 37
4.1.1 Estimativas técnicas 37
4.1.2 Prova do Teorema 4.2 43

5 SISTEMA DE TIMOSHENKO PARCIALMENTE DISSIPATIVO $(\alpha = 0$ **e** $\beta > 0)$ 47
5.1 Estabilidade exponencial 48
5.1.1 Estimativas técnicas 48
5.1.2 Prova do Teorema 5.2 53

A CÁLCULOS MOTIVADORES 58
A.1 Encontrando o espaço de fase 58
A.2 Definindo a forma sesquilinear e o funcional anti-linear 60

REFERÊNCIAS 62

1 Introdução

Desde os primórdios a humanidade buscar entender e explicar, sob diversas ópticas e ferramentas, fenômenos presentes na natureza. Atualmente, graças a herança da matemática desenvolvida entre séculos XIX e XX, as equações diferencias são uma peça fundamental para a compreensão de tais fenômenos. Sua teoria é empregada em diversas áreas do conhecimento, como a física, química, biologia, e engenharia. Dentre essas, iremos explorar mais detalhadamente a interação entre a matemática e engenharia no estudo sobre vigas, desenvolvido no século passado pelo engenheiro ucraniano Stephen Prokofievich Timoshenko [1].

O modelo proposto por Timoshenko é dado por um sistema de equações diferenciais parciais que descrevem a vibração de vigas com comprimento $L > 0$, levando em consideração o deslocamento transversal $\varphi(x,t)$ e o ângulo de rotação $\psi(x,t)$. Segundo ele, as equações que governam para as variáveis φ e ψ são

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = S_x \\ \rho_2 \psi_{tt} = M_x - S, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que S é a força de cisalhamento, M é o momento fletor e $\rho_1, \rho_2 > 0$ são constantes relacionadas a densidade da massa, a área e ao momento de inércia de uma transversal da viga [2]. Em termos da sua versão elástica ou conservativa, as leis construtivas para a força de cisalhamento e momento fletor são dadas por

$$S = \kappa(\varphi_x + \psi) \quad \text{e} \quad M = b\psi_x, \tag{1.2}$$

onde $\kappa > 0$ e $b > 0$ são constantes que dependem, respectivamente, do cisalhamento e o módulo de elasticidade de Young. Substituindo (1.2) em (1.1), obtemos o *modelo elástico de Timoshenko*

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em} \quad (0,L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0 & \text{em} \quad (0,L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{1.3}$$

É possível mostrar que o sistema (1.3) não dissipa energia, isto é, a soma da energia cinética com a energia potencial é igual a uma constante, logo a energia associado ao sistema nunca decai. Assim, para obter um comportamento não-trivial, acrescenta-se termos dissipativos ao sistema. Neste trabalho, em particular, consideramos dissipações friccionais $\alpha\varphi_t$ e $\beta\psi_t$, obtendo assim o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \alpha\varphi_t = 0 & \text{em} \quad (0,L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta\psi_t = 0 & \text{em} \quad (0,L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{1.4}$$

O sistema (1.4) foi abordado por Almeida Junior, Santos e Muñoz Rivera [3] para o caso em que $\alpha > 0$ e $\beta = 0$. O caso em que $\alpha = 0$ e $\beta > 0$ foi tratado por Muñoz Rivera e Racke [4]. Além disso, em sua dissertação, Brito [5] explorou detalhadamente os trabalhos anteriores. Nos três trabalhos acima, explorou-se acerca da estabilidade do sistema.

Sob os primórdios de Soufyane [6], verificou-se nos trabalhos acima que a estabilidade exponencial dos sistemas estão condicionada a igualdade de velocidade de propagação de ondas

$$\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}. \tag{1.5}$$

Para garantir que o semigrupo é exponencialmente estável, em [3] foi utilizado o método do Funcional de Lyapunov, enquanto que nos trabalhos [4] e [5] foram utilizados técnicas de Semigrupos. Neste trabalho, iremos utilizar técnicas de semigrupos para garantir a estabilidade exponencial. Aqui, iremos também utilizar a teoria de semigrupos, porém de forma alternativa. De fato, a abordagem apresentada neste trabalho foca no uso do espectro aproximado do gerador do semigrupo solução como ferramenta principal. Esta abordagem contorna possível faltas de compacidade para problemas mais complexos.

Objetivo do trabalho

O principal objetivo do trabalho é investigar sobre a boa colocação e a estabilidade exponencial do sistema 1.4. Por outro lado, do ponto de vista do discente, a finalidade primária por trás do trabalho é aprender técnicas modernas que poderão ser utilizadas futuramente em pesquisas. Daí a justificativa da escolha do sistema (1.4).

Organização do Trabalho

O trabalho está organizado da seguinte forma:

- No Capítulo 2 exibiremos resultados preliminares para o desenvolvimento do trabalho. Neste, adicionamos resultados de Análise Funcional, teoria de Semigrupos e desigualdades notáveis.

- Seguimos para o Capítulo 3, onde exploramos o sistema (1.4) em que $\alpha, \beta \geq 0$. Neste apresentamos a boa colocação do problema, sob condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumamm e condições iniciais apropriadas, via teoria de Semigrupos. Em seguida, garantimos que o sistema é exponencialmente estável, quando $\alpha, \beta > 0$. Verificou-se que, devido haver dissipações agindo simultaneamente sobre a força de cisalhamento e o momento fletor, a estabilidade exponencial do sistema independentemente da igualdade (1.5).

- Outrossim, no Capítulo 4 abordamos sobre a estabilidade exponencial do problema (1.4) para $\alpha > 0$ e $\beta = 0$. Verificou-se, via teoria de semigrupos, que se vale a igualdade (1.5), então o semigrupo é exponencialmente estável.

- Finalmente, no Capítulo 5 exploramos o sistema (1.4) para o caso em que $\alpha = 0$ e $\beta > 0$. Também via teoria de Semigrupos, concluiu-se que o sistema é exponencialmente estável quando a igualdade (1.5) é satisfeita.

2 Resultados preliminares

Neste capítulo iremos apresentar resultados que irão sustentar o objetivo do trabalho. Mais especificamente, exibiremos resultados clássicos das teorias de Análise Funcional, da teoria de Semigrupos e citaremos desigualdades notáveis. Grande parte dos resultados do presente capítulo não serão demonstrados, contudo indicaremos as referências na quais encontram-se suas comprovações, e motivamos o leitor a consultá-los.

2.1 Análise funcional

Ao buscarmos soluções para equações diferenciais, estamos atrás de funções que satisfaçam a igualdade apresentada. Desse modo, a teoria da Análise Funcional surge, com naturalidade, para alimentar e amparar o desenvolvimento da solução, desde a descrição de onde o problema faz sentido, até a comprovação de existência de soluções. Exibiremos alguns de seus resultados, em especial, àqueles que serão utilizados para atingir a finalidade do trabalho.

Definição 2.1. *Seja X um espaço vetorial normado. Dizemos que duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes (e denotamos $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$) se existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que*

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1, \quad \forall\, x \in X.$$

Lema 2.1. *Seja X um espaço vetorial normado. Suponha que $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são normas equivalentes. Então*

$$(X, \|\cdot\|_1) \quad \textit{é Banach} \iff (X, \|\cdot\|_2) \quad \textit{é Banach.}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $(X, \|\cdot\|_2)$, então

$$\|x_n - x_m\|_2 \to 0 \quad \text{quando } m, n \to \infty.$$

Por hipótese, existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2\|x\|_2 \quad \forall\, x \in X. \tag{2.1}$$

Assim,

$$\|x_n - x_m\|_1 \leq c_2\|x_n - x_m\|_2 \to 0 \quad \text{quando } n, m \to \infty.$$

Desse modo, (x_n) é uma sequência de Cauchy em $(E, \|\cdot\|_1)$, que é um espaço de Banach. Logo, existe $x \in X$ tal que

$$\|x_n - x\|_1 \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Novamente por (2.1), temos

$$c_2\|x_n - x\|_2 \leq \|x_n - x\|_1 \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Logo, (x_n) é convergente em $(X, \|\cdot\|_2)$. Portanto, $(X, \|\cdot\|_2)$ é um espaço de Banach. ($\Leftarrow$) Análogo. □

De agora em diante, consideremos X um espaço de Banach, com norma $\|\cdot\|_X$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear, com domínio $D(A)$. Em particular, quando X for um espaço de Hilbert, denotaremos seu produto interno por $(\cdot,\cdot)_X$.

Definição 2.2. *Dizemos que X é reflexivo quando o funcional*

$$\begin{aligned} J : X &\to X'' \\ x &\mapsto J_x(f) = f(x) \end{aligned}$$

é sobrejetor.

Proposição 2.1. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Veja [7, Teorema 4.6-6] □

Definição 2.3. *Um funcional $F : X \to \mathbb{C}$ é dito anti-linear se*

$$F(\alpha u + \beta v) = \overline{\alpha}F(u) + \overline{\beta}F(v), \quad \forall\ x, y \in X, \quad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Ademais, uma forma $B : X \times X \to \mathbb{C}$ é denominada sesquilinear se

- $B(\lambda u + v, w) = \lambda B(u, w) + B(v, w)$;
- $B(u, \lambda v + w) = \overline{\lambda}B(u, v) + B(u, w)$,

para todo $u, v, w \in X$ e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.1. *(Lax-Milgram para formas sesquilineares) Sejam X um espaço de Hilbert, $B : X \times X \to \mathbb{C}$ um funcional sesquilinear e $F : X \to \mathbb{C}$ um funcional anti-linear, que satisfazem as seguintes condições*

(i) B é contínuo, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$|B(u, v)| \leq C\|u\|_X\|v\|_X, \ \forall\ u, v \in X;$$

(ii) B é coercivo, isto é, existe $C > 0$ tal que $|B(u, u)| \geq C\|u\|_X^2$, $\forall\ u \in X$;

(iii) F é contínuo, ou seja, existe $C > 0$ tal que

$$|F(u)| \leq C\|u\|_X \ \forall\ u \in X.$$

Então existe um único $u \in X$ tal que

$$B(u, v) = F(v), \ \forall \ v \in X.$$

Demonstração. Veja [8, Corolário 6.2.2]. □

Definição 2.4. *Seja X um espaço de Hilbert. Um operador linear A é dito dissipativo se,*

$$\mathrm{Re}(Ax, x) \leq 0, \quad \forall \ x \in D(A).$$

Definição 2.5. *Seja A um operador não limitado, densamente definido em X. O conjunto resolvente de A, o qual denotamos por $\rho(A)$, é o conjunto formado por todos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que*

(R1) $(\lambda I - A)^{-1}$ existe;

(R2) $(\lambda I - A)^{-1}$ é limitado;

(R3) $(\lambda I - A)^{-1}$ é densamente definido.

Em adição, define-se o espectro de A, denotado por $\sigma(A)$, por $\sigma(A) = \mathbb{C}/\rho(A)$.

Definição 2.6. *Sob as hipóteses da definição 2.5, definimos os conjuntos*

$$\begin{aligned}
\sigma_p(A) &:= \left\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, (\lambda I - A)^{-1} \text{ não existe}\right\};\\
\sigma_c(A) &:= \left\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe, satisfaz (R3), mas não vale (R2)}\right\};\\
\sigma_r(A) &:= \left\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe, mas não vale (R3)}\right\}.
\end{aligned}$$

Os conjuntos $\sigma_p(A), \sigma_c(A)$ e $\sigma_r(A)$ são chamados espectro pontual, espectro contínuo e espectro residual de A, respectivamente.

Definição 2.7. *O espectro pontual aproximado de A é o subconjunto de $\sigma(A)$ definido por*

$$\sigma_{ap}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C};\ \text{existe } (x_n) \in D(A), \|x_n\|_X = 1 \ \text{e} \ (I\lambda - A)x_n \to 0 \ \text{em} \ X\}.$$

2.2 Espaços de Sobolev unidimensional

Nesta seção, iremos denotar por $I = (a, b)$ com $a < b$, um intervalo aberto da reta.

Definição 2.8. *Seja $1 \leq p < \infty$. Denotaremos por $L^p(I)$ o conjunto de todas as classes de funções mensuráveis $u : I \to \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável em I, no sentido de Lebesgue. O conjunto $L^p(I)$ é um espaço de Banach, com a norma*

$$\|u\|_p = \left(\int_I |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Em particular, quando $p = 2$, o espaço $L^2(I)$ é um espaço de Hilbert, com produto interno

$$(u, v) = \int_I u\bar{v}dx \ , \qquad \|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Definição 2.9. *Denotaremos por $C_0^\infty(I)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis que possuem suporte compacto. Em outras palavras, é o conjunto de todas as funções $\phi \in C^\infty(I)$ tais que o conjunto*

$$supp\,(\phi) := \overline{\{x \in I; \phi(x) \neq 0\}}^I$$

é compacto.

Definição 2.10. *Sejam $u, v \in L^p(I)$. Dizemos que v é derivada fraca de u quando*

$$\int_I u\varphi_x = -\int_I v\varphi, \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Nesse caso, denotamos por $v = u_x$.

Definição 2.11. *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$ é definido por*

$$W^{1,p}(I) := \{u \in L^p(I);\ existe\ u_x \in L^p(I)\}\,.$$

Em especial, quando $p = 2$, escrevemos $H^1(I)$.

O espaço $W^{1,p}(I)$ é um espaço de Banach, com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u_x\|_{L^p}.$$

Por fim, o espaço $H^1(I)$ é um espaço de Hilbert, quando munido do produto interno $(u, v)_{H^1} = (u, v) + (u_x, v_x)$, que induz a norma $\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|^2 + \|u_x\|^2$.

Proposição 2.2. *(Densidade) Seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p < \infty$. Então existe uma sequência $(u_n) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_{n|I} \to u$ em $W^{1,p}(I)$.*

Demonstração. Disponível em [9, Teorema 8.7]. □

Definição 2.12. *Dado $1 \leq p < \infty$, definimos $W_0^{1,p}(I)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(I)$ em $W^{1,p}(I)$. Além disso, denotamos $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.*

Proposição 2.3. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$. Então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se, e somente se, $u = 0$ em ∂I.*

Demonstração. Veja [9, Teorema 8.12]. □

Definição 2.13. *Dado um inteiro $m \geq 2$ e um numero real $1 \leq p \leq \infty$, definimos por indução o espaço*

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I);\ u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

Também definimos

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

2.3 Teoria de semigrupos

Definição 2.14. *Uma família de operadores lineares limitados $T(t) : X \to X$, é denominada semigrupo de operadores lineares limitados em X se*

i) $T(0) = I$ (I é o operador identidade em X);

ii) $T(t+s) = T(t) \circ T(S)$ para todo $t, s \geq 0$ (Propriedade de semigrupos).

Além disso, $T(t)$ é um semigrupo de classe C_0, ou um C_0-semigrupo se

$$\lim_{t \to 0^+} T(t)x = x, \quad \forall \ x \in X.$$

Por fim, dizemos que um C_0-semigrupo $T(t)$ é de contrações se

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq 1, \quad \forall\ t \geq 0,$$

em que $\mathscr{L}(X)$ é o espaço de operadores lineares limitados definidos em X.

Definição 2.15. *Seja $T(t)$ um semigrupo de operadores lineares limitados. O operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X;\ \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \ \text{existe} \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall\ x \in D(A)$$

é o gerador infinitesimal de $T(t)$. Nesse caso, denotamos $T(t) = e^{tA}$.

Teorema 2.2 (Lummer-Phillips)**.** *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Se*

i) A é dissipativo,

ii) A densamente definido em X,

iii) existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda_0 I - A$ é sobrejetor,

então A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em X.

Demonstração. Consultar [10, Teorema 4.3]. □

Proposição 2.4. *Seja A um operador dissipativo tal que $I - A$ é sobrejetor. Se X é reflexivo, então A é densamente definido.*

Corolário 2.1. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear definido em um espaço de Hilbert X. Se*

i) A é dissipativo,

ii) $I - A$ *é sobrejetor,*

então A *é um gerador infinitesimal de um* C_0*-semigrupo de contrações em* X*.*

Demonstração. Segue do Teorema 2.2 e da Proposição 2.4. □

Lema 2.2. *Suponha que* A *seja um gerador infinitesimal de um* C_0*-semigrupo de contrações* $T(t)$ *definido em* X*, e seja* $x \in D(A)$*. Então* $T(t)x \in C^1([0,\infty), X)$ *e, em adição, para todo* $t \geq 0$*,*

$$x - T(t)x = \int_0^t AT(\tau)x d\tau = \int_0^t T(\tau)Ax d\tau,$$

e

$$\frac{d}{dt}[T(t)x] + A(T(t)x) = 0.$$

Demonstração. Veja [11, Lema 2.1.1]. □

Observação 1. *Segue do Lema 2.2 que, se* A *é um gerador infinitesimal de um* C_0*-semigrupo de contrações, então para cada* $x \in D(A)$*,* $U(t) = T(t)x$ *é uma solução clássica para o seguinte problema abstrato de valor inicial (conhecido como problema abstrato de Cauchy)*

$$\begin{cases} U_t = AU, \quad t > 0, \\ U(0) = x. \end{cases} \tag{2.2}$$

No entanto, se $x \notin D(A)$*, o problema (2.2) não possui uma solução no sentido clássico. Neste caso, pode-se definir uma solução generalizada de (2.2).*

Definição 2.16. *Uma função* $U \in C([0,\infty), X)$ *é uma solução generalizada de (2.2) se existe* $x_n \in D(A)$ *tal que* $x_n \to U(0)$ *e* $T(t)x_n \to U(t)$ *uniformemente em intervalos limitados, quando* $n \to \infty$*.*

Observação 2. *A solução generalizada definida independentemente da sequência* $x_n \in D(A)$ *é única e se* $U(0) \in D(A)$*, a solução generalizada é a solução clássica de (2.2). Com isso, se* A *é um gerador infinitesimal de um* C_0*-semigrupo de contrações e* $x \in X$*, então* $U(t) = T(t)x$ *é a única solução generalizada de (2.2).*

Proposição 2.5. *Para todo* $x \in X$*, o problema (2.2) admite uma única solução generalizada* $U \in C(0,\infty,X)$*. Em adição, se* $x \in D(A)$*, então* U *é a solução clássica de (2.2) e*

$$U \in C^1(0,\infty,X) \cap C(0,\infty,D(A)).$$

Demonstração. Segue das Observações 1 e 2. □

Definição 2.17. *Seja* $T(t) : X \to X$ *um semigrupo. Dizemos que* $T(t)$ *é exponencialmente estável se existe* $M \geq 1$ *e* $\gamma > 0$ *tais que*

$$\|T(t)x\|_X \leq Me^{-\gamma t}\|x\|_X, \quad \forall\ x \in X.$$

Teorema 2.3 (Gearhart-Pruss)**.** *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração, ou seja $T(t) = e^{tA}$. Então, $T(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se,*

i) $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$;

ii) $\limsup_{|\lambda|\to\infty} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} < \infty$.

Demonstração. Veja [12, 13]. □

Teorema 2.4. *Seja $T(t)$ um semigrupo de operadores limitados em X e A seu gerador infinitesimal. Se X é reflexivo, então*

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \sigma_{ap}(A) \cap i\mathbb{R}.$$

Demonstração. Por um lado, da [14, Seção 5] temos

$$\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subset \sigma_{ap}(A). \tag{2.3}$$

Por outro lado, da [15, Proposição 2.2], temos

$$\sigma_r(A) \cap i\mathbb{R} = \sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Logo, combinando (2.3) e (2.4)

$$i\mathbb{R} \cap \underbrace{(\sigma_c(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A))}_{=\sigma(A)} = i\mathbb{R} \cap (\sigma_c(A) \cup \sigma_p(A)) \subseteq i\mathbb{R} \cap \sigma_{ap}(A) \subseteq i\mathbb{R} \cap \sigma(A),$$

e o resultado segue. □

2.4 Desigualdades notáveis

Destinamos essa seção para apresentar desigualdades clássicas que serão utilizadas no decorrer do texto. Mais precisamente, exibir as conhecidas desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young, Poincaré e das potências. Além disso, iremos citar um lema que propõe uma alternativa para garantir equivalências entre normas.

Lema 2.3 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja X um espaço vetorial com produto interno $(\cdot,\cdot)_X$, então*

$$|(u,v)_X| \leq \|u\|_X \|v\|_X \ \forall\ u, v \in X,$$

onde $\|u\|_X = \sqrt{(u,u)_X}$.

Demonstração. Consultar [16, Teorema 8.2.1]. □

Lema 2.4 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $a, b \geq 0$ e $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Em adição, para todo $\varepsilon > 0$

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q,$$

onde $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}$.

Demonstração. Veja [17, Apêndice B.2, Proposições c e d]. □

Definição 2.18. *Seja I um intervalo aberto da reta. Definimos os seguintes espaços*

$$L^2_*(I) = \{f \in L^2(I) \ ; \ \int_I f(x)dx = 0\} \quad e \quad H^1_*(I) = H^1(I) \cap L^2_*(I).$$

Lema 2.5 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $I = (a, b)$, então existe $C = C(b - a) > 0$ tal que*

$$\|u\| \leq C\|u_x\|,$$

para toda função $u \in H^1_0(I)$ ou $u \in H^1_*(I)$

Demonstração. Disponível em [9, Proposição 8.13] e [17, Teorema 5.8.2]. □

Lema 2.6. *Se $1 \leq p < \infty$ e $a, b \geq 0$, então*

$$a^p + b^p \leq (a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{2.5}$$

Demonstração. Note que para $a = 0$ a desigualdade (2.5) é verificada, pois

$$b^p \leq b^p \leq b^p + b^p \leq 2^{p-1} b^p.$$

Agora, se $a > 0$, podemos definir $x = \frac{b}{a} \geq 0$. Assim, (2.5) é equivalente a

$$1 + x^p \leq (1 + x)^p \leq 2^{p-1}(1 + x^p),$$

ou ainda

$$1 \leq \frac{(1 + x)^p}{1 + x^p} \leq 2^{p-1}. \tag{2.6}$$

No que segue, vamos provar (2.6). De fato, definimos a função $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada por

$$f(x) = \frac{(1 + x)^p}{1 + x^p}.$$

Observe que $f(x) \geq 1$, para todo $x \in [0, \infty)$ e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{p(x + 1)^{p-1}(1 + x^p) - px^{p-1}(x + 1)^p}{(1 + x^p)^2} = \frac{p(x + 1)^{p-1}(1 - x^{p-1})}{(1 + x^p)^2}.$$

Logo,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = 0 \iff 1 - x^{p-1} = 0 \iff x = 1.$$

Pelo teste da primeira derivada, segue que f é crescente em $(0,1)$, decrescente em $(1,+\infty)$, sendo $x = 1$ o candidato a ser ponto de máximo. Antes de determinarmos a segunda derivada de f, observamos que o sinal da futura expressão dependerá somente do numerador, haja vista que seu denominador é sempre positivo. Assim, iremos nos preocupar somente com a expressão resultante no numerador, que é dada por

$$p(p-1)(1+x)^{p-2}(1-x^{p-2}-2x^{p-1})(1+x^p)^2 - 2p(1+x)^{p-1}(1-x^{p-1})(1+x^p)x^{p-1},$$

que é negativa, quando avaliada no ponto $x = 1$. Daí, o teste da segunda derivada garante que, de fato, $x = 1$ é ponto de máximo. Por fim, pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^p}{1+x^p} = \lim_{x\to\infty}\frac{p(1+x)^{p-1}}{px^{p-1}} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)\right]^{p-1} = 1.$$

Por tudo acima, chegamos a seguinte análise: f atinge seu valor máximo em $x = 1$ e $f(1) = 2^{p-1}$. Logo, concluímos que

$$1 \leq \frac{(1+x)^p}{1+x^p} \leq 2^{p-1}, \quad \forall\, x \in [0,\infty),$$

o que garante (2.6). Portanto, (2.5) é válida, comprovando o afirmado. □

Lema 2.7. *O funcional*

$$\begin{aligned} I : L^2_*(0,L) &\to H^1_0(0,L) \\ \theta &\mapsto I(\theta) = I_\theta, \end{aligned}$$

definido por

$$I_\theta(x) = \int_0^x \theta(s)ds$$

satisfaz

$$\|I_\theta\| \leq L\|\theta\|. \tag{2.7}$$

Demonstração. Seja $\theta \in L^2_*(0,L)$. Da desigualdade de Hölder, note que

$$\int_0^L \left[\int_0^x (\theta(s))\,ds\right]^2 dx \leq \int_0^L \left(\int_0^x ds\right)\left(\int \theta(s)^2 ds\right)dx \leq L^2\|\theta\|^2,$$

ou seja, $I_\theta \in L^2(0,L)$ e (2.7) é válido. Por outro lado, pela Regra de Leibniz para integrais [18], temos

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \theta(s)ds\right] = \theta(x), \quad \forall\, x \in (0,L).$$

Logo, $I_\theta \in H^1(0,L)$. Finalmente, pelo fato de $\theta \in L^1_*(0,L)$

$$I_\theta(0) = \int_0^0 \theta(s)ds = 0 \quad \text{e} \quad I_\theta(L) = \int_0^L \theta(s)ds = 0.$$

Portanto, temos que $I_\theta \in H^1_0(0,L)$. □

3 Sistema de Timoshenko com duas dissipações friccionais

Dado $L > 0$, considere o seguinte sistema de Timoshenko

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \alpha\varphi_t = 0, & \text{em } (0,L)\times\mathbb{R}^+ \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta\psi_t = 0, & \text{em } (0,L)\times\mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{3.1}$$

com condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) = 0, \quad \forall\ t > 0, \tag{3.2}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad \forall\ x \in (0,L) \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \quad \forall\ x \in (0,L). \end{cases} \tag{3.3}$$

Para estudarmos a boa colocação do problema (3.1)-(3.3), vamos explorar o fato de que o mesmo é linear e autônomo. Isto nos permite utilizar a teoria de Semigrupo de Operadores Lineares [10, 11] para obtermos os resultados desejados. Além disso, para não sobrecarregar a notação do trabalho, de agora em diante denotaremos por c todas as constantes positivas que depende de $\rho_1, \rho_2, b, \kappa, \alpha, \beta$ e L.

3.1 O semigrupo solução

Para contemplar parte das condições de fronteira, consideramos o espaço de fase

$$\mathscr{H} = H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times H_*^1(0,L)\times L_*^2(0,L)$$

munido do produto interno

$$(U_1,U_2)_{\mathscr{H}} \;=\; \rho_1(\Phi_1,\Phi_2) + \rho_2(\Psi_1,\Psi_2) + b(\psi_{1x},\psi_{2x}) + \kappa(\varphi_{1x}+\psi_1,\varphi_{2x}+\psi_2),$$

e norma

$$\|U\|_{\mathscr{H}}^2 = \rho_1\|\Phi_1\|^2 + \rho_2\|\Psi_1\|^2 + b\|\psi_{1x}\|^2 + \kappa\|\varphi_{1x}+\psi_1\|^2,$$

em que $U_1 = (\varphi_1,\Phi_1,\psi_1,\Psi_1)$, $U_2 = (\varphi_2,\Phi_2,\psi_2,\Psi_2) \in \mathscr{H}$. Aqui, $(\cdot,\cdot)$ e $\|\cdot\|$ representam o produto interno e a norma usual do espaço $L^2(0,L)$, isto é,

$$(u,v) = \int_0^L u(x)\overline{v}(x)\,\mathrm{d}x, \quad \|u\|^2 = \int_0^L |u(x)|^2\,\mathrm{d}x, \quad \forall\ u,v \in L^2(0,L).$$

Veja que a norma definida acima é equivalente a norma usual do espaço $\mathscr{H}$, a qual é dada por

$$|U|^2_{\mathscr{H}} = \|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2.$$

Com efeito, basta analisar a seguinte equivalência

$$\|\varphi_x + \psi\|^2 + \|\psi_x\|^2 \sim \|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2.$$

Aplicando a desigualdade triangular, a desigualdade da potência e a desigualdade de Poincaré, temos

$$\begin{aligned}
\|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 &= \|\varphi_x + \psi - \psi\|^2 + \|\psi_x\|^2 \\
&\leq [\|\varphi_x + \psi\| + \|\psi\|]^2 + \|\psi_x\|^2 \\
&\leq c[\|\varphi_x + \psi\|^2 + \|\psi_x\|^2] \\
&\leq c[(\|\varphi_x\| + \|\psi\|)^2 + \|\psi_x\|^2] \\
&\leq c[\|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2].
\end{aligned}$$

Portanto, como $\mathscr{H}$ equipado com a norma $|\cdot|_{\mathscr{H}}$ é um espaço de Banach, então pelo Lema 2.1, $\langle \mathscr{H}, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|_{\mathscr{H}} \rangle$ é um espaço de Hilbert.

Agora, denotando $\Phi = \varphi_t$, $\Psi = \psi_t$ e $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi)^T$, reescrevemos o problema (3.1) - (3.3) na forma abstrata

$$\begin{cases} U_t = AU, \ t > 0 \\ U(0) = U_0 := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)^T \end{cases} \tag{3.4}$$

em que $A : D(A) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ é dado por

$$AU = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{1}{\rho_1}[\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \alpha\Phi] \\ \Psi \\ \frac{1}{\rho_2}[b\psi_{xx} - \kappa(\varphi_x + \psi) - \beta\Psi] \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

e seu domínio, $D(A)$, é formado por todas as quádruplas $(\varphi, \Phi, \psi, \Psi)^T$ pertencentes ao espaço

$$[H^2(0,L) \cap H^1_0(0,L)] \times H^1_0(0,L) \times [H^2(0,L) \cap H^1_*(0,L)] \times H^1_*(0,L),$$

tal que $\psi_x \in H^1_0(0,L)$.

A fim de obtermos resultados de existência e unicidade para o problema (3.1)-(3.3), de agora em diante, investigaremos propriedades acerca do operador A advento do problema (3.5). De fato, visando aplicar o Corolário 2.1, mostraremos que A é um operador dissipativo e $I - A$ é sobrejetor.

Lema 3.1. *O operador A satisfaz*

$$\mathrm{Re}(AU,U)_{\mathscr{H}} = -\alpha\|\Phi\|^2 - \beta\|\Psi\|^2, \quad \forall\, U \in D(A).$$

Consequentemente, se $\alpha, \beta \geq 0$, então A é um operador dissipativo.

Demonstração. Seja $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi) \in D(A)$ qualquer, utilizando integração por partes e as condições do domínio de A, obtém-se

$$\begin{aligned}
(AU,U)_{\mathscr{H}} &= \rho_1(1/\rho_1[\kappa(\varphi_x+\psi)_x - \alpha\Phi], \Phi) + \rho_2(1/\rho_2[b\psi_{xx} - \kappa(\varphi_x+\psi) - \beta\Psi, \Psi]) + \\
&\quad + b(\Psi_x, \psi_x) + \kappa(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi) \\
&= \kappa((\varphi_x+\psi)_x, \Phi) - \alpha(\Phi,\Phi) + b(\psi_{xx}, \Psi) - \kappa(\varphi_x+\psi, \Psi) - \beta(\Psi,\Psi) + \\
&\quad + b(\Psi_x, \psi_x) + \kappa(\Phi_x, \varphi_x+\psi) + \kappa(\Psi, \varphi_x+\psi) \\
&= \kappa[((\varphi+\psi)_x, \Phi) + (\Phi_x, \varphi_x+\psi)] + \kappa[(\Psi, \varphi_x+\psi) - (\varphi_x+\psi, \Psi)] + \\
&\quad + b[(\psi_{xx}, \Psi) + (\Psi_x, \psi_x)] - \alpha\|\Phi\|^2 - \beta\|\Psi\|^2 \\
&= \kappa[(\varphi+\psi)\phi|_0^L - (\varphi_x+\psi, \Phi_x) + \overline{(\varphi_x+\psi, \Phi_x)}] + \kappa[(\Psi, \varphi_x+\psi) + \\
&\quad - \overline{(\Psi, \varphi_x+\psi)}] + b[\psi_x\Psi|_0^L - (\psi_x, \Psi_x) + \overline{(\psi_x, \Psi_x)}] - \alpha\|\Phi\|^2 - \beta\|\Psi\|^2 \\
&= 2i\kappa\,\mathrm{Im}(\Phi_x, \varphi_x+\psi) + 2i\kappa\,\mathrm{Im}(\Psi, \varphi_x+\psi) + 2ib\,\mathrm{Im}(\Psi_x, \psi_x) + \\
&\quad - \alpha\|\Phi\|^2 - \beta\|\Psi\|^2.
\end{aligned}$$

Extraindo a parte real em ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\mathrm{Re}(AU,U)_{\mathscr{H}} = -\alpha\|\Phi\|^2 - \beta\|\Psi\|^2.$$

Portanto, pela arbitrariedade de $U \in D(A)$, concluímos o desejado. □

Lema 3.2. *Se $\alpha, \beta \geq 0$, então $I - A$ é sobrejetor.*

Demonstração. Dada $f = (f^1, f^2, f^3, f^4) \in \mathscr{H}$, para garantir a sobrejetividade, precisamos exibir um vetor $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi) \in D(A)$ tal que

$$\begin{cases}
\varphi - \Phi = f^1 \\
\rho_1\Phi - \kappa(\varphi_x+\psi)_x - \alpha\Phi = \rho_1 f^2 \\
\phi - \Psi = f^3 \\
\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x+\psi) + \beta\Psi = \rho_2 f^4.
\end{cases} \tag{3.6}$$

Para construir uma solução de (3.6) com as regularidades desejadas, iremos seguir o seguinte algoritmo:

Passo 1. Construir uma dupla $(\varphi, \psi) \in H_0^1(0,L) \times H_*^1(0,L)$ utilizando o Teorema de Lax-Milgram;

Passo 2. Construir um par $(\Phi, \Psi) \in H_0^1(0,L) \times H_*^1(0,L)$ satisfazendo as equações $(3.6)_1$ e $(3.6)_3$;

Passo 3. Mostrar que $\varphi \in H^2(0,L)$ e que a igualdade $(3.6)_2$ é satisfeita;

Passo 4. Garantir que $\psi \in H^2(0,L)$, $\psi_x \in H_0^1(0,L)$ e que a equação $(3.6)_4$ é válida.

De agora em diante, denotaremos por $W = H_0^1(0,L) \times H_*^1(0,L)$ com norma

$$\|(u,v)\|_W = \|u_x + v\| + \|v_x\|.$$

Passo 1. Definimos a forma sesquilinear $\Gamma : W \times W \to \mathbb{C}$ dada por

$$\Gamma((\varphi,\psi),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})) = (\rho_1+\alpha)(\varphi,\tilde{\varphi}) + (\rho_2+\beta)(\psi,\tilde{\psi}) + b(\psi_x,\tilde{\psi}_x) + \kappa(\varphi_x+\psi,\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}) \quad (3.7)$$

e o funcional antilinear $F : W \to \mathbb{C}$ dado por

$$F((\tilde{\varphi},\tilde{\psi})) = (\rho_1+\alpha)(f^1,\tilde{\varphi}) + \rho_1(f^2,\tilde{\varphi}) + (\rho_2+\beta)(f^3,\tilde{\psi}_x) + \rho_2(f^4,\tilde{\psi}). \quad (3.8)$$

No Apêndice A.2 encontra-se a motivação de escolhermos as funções expressas nas igualdades (3.7) e (3.8). No que segue, vamos mostrar que as funções Γ e F satisfazem as hipóteses do Teorema 2.1.

Γ *é contínua.* Pela desigualdade triangular, desigualdade de Cauchy-Schwarz e desigualdade Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
|\Gamma((\varphi,\psi),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}))| &\leq (\rho_1+\alpha)|(\varphi,\tilde{\varphi})| + (\rho_2+\beta)|(\psi,\tilde{\psi})| + b|(\psi_x,\tilde{\psi}_x)| \\
&\quad +\kappa|(\varphi_x+\psi,\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi})| \\
&\leq (\rho_1+\alpha)\|\varphi\|\|\tilde{\varphi}\| + (\rho_2+\beta)\|\psi\|\|\tilde{\psi}\| + b\|\psi_x\|\|\tilde{\psi}_x\| \\
&\quad +\kappa\|\varphi_x+\psi\|\|\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}\| \\
&\leq c[\|\varphi_x+\psi\|\|\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}\| + \|\varphi_x+\psi\|\|\tilde{\psi}_x\| + \|\psi_x\|\|\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}\|] \\
&\quad +c\|\psi_x\|\|\tilde{\psi}_x\| \\
&= c\left[\|\varphi_x+\psi\|(\|\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}\| + \|\tilde{\psi}_x\|) + \|\psi_x\|(\|\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}\| + \|\tilde{\psi}_x\|)\right] \\
&= c\|(\varphi,\psi)\|_W\|(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\|_W,
\end{aligned}$$

para todo vetor $(\varphi,\psi),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) \in W$. Pela arbitrariedade dos elementos no domínio, segue que Γ é contínuo.

Γ *é coercivo.* Note que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\Gamma((\varphi,\psi),(\varphi,\psi))) &= (\rho_1+\alpha)\|\varphi\|^2 + (\rho_2+\beta)\|\psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \kappa\|\varphi_x+\psi\|^2 \\
&\geq \min\{b,\kappa\}[\|\psi_x\|^2 + \|\varphi_x+\psi\|^2] \\
&\geq \frac{1}{2}\min\{b,\kappa\}(\|\psi_x\| + \|\varphi_x+\psi\|)^2 \\
&= \frac{1}{2}\min\{b,\kappa\}\|(\varphi,\psi)\|_W^2,
\end{aligned}$$

para todo $(\varphi,\psi)\in W$. Portanto, Γ é coerciva.

F é contínua. Pela desigualdade triangular, desigualdade de Cauchy-Schwarz e desigualdade Poincaré,

$$\begin{aligned}
|F(\varphi,\psi)| &\leq (\rho_1+\alpha)|(f^1,\varphi)|+\rho_1|(f^2,\varphi)|+(\rho_2+\beta)|(f^3,\psi)|+\rho_2|(f^4,\psi)|\\
&\leq (\rho_1+\alpha)\|f^1\|\|\varphi\|+\rho_1\|f^2\|\|\varphi\|+(\rho_2+\beta)\|f^3\|\|\psi\|+\rho_2\|f^4\|\|\psi\|\\
&\leq c[\|\varphi_x\|+\|\psi_x\|]\\
&\leq c[\|\varphi_x+\psi\|+\|\psi\|+\|\psi_x\|]\\
&\leq c[\|\varphi_x+\psi\|+\|\psi_x\|]\\
&= c\|(\varphi,\psi)\|_W,
\end{aligned}$$

para todo $(\varphi,\psi)\in W$. Portanto, F é contínua.

Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $(\varphi,\psi)\in W$ tal que

$$\Gamma((\varphi,\psi),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}))=F((\tilde{\varphi},\tilde{\psi})),\ \forall\ (\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\in W. \tag{3.9}$$

Isso conclui o Passo 1.

Passo 2. De posse do vetor $(\varphi,\psi)\in W$ satisfazendo (3.9), definimos $\Phi:=\varphi-f^1\in H_0^1(0,L)$ e $\Psi:=\psi-f^3\in H_*^1(0,L)$. Por construção, as igualdades $(3.6)_1$ e $(3.6)_3$ são satisfeitas, finalizando o Passo 2.

Passo 3. Seja $\tilde{\varphi}\in H_0^1(0,L)$. Considerando o vetor $(\tilde{\varphi},0)\in W$ na equação (3.9) e, tendo em conta as expressões (3.7) e (3.8), temos

$$(\rho_1+\alpha)(\varphi,\tilde{\varphi})+\kappa(\varphi_x+\psi,\tilde{\varphi}_x)=(\rho_1+\alpha)(f^1,\tilde{\varphi})+\rho_1(f^2,\tilde{\varphi}),$$

que pode ser reescrita como

$$(\rho_1+\alpha)(\overbrace{\varphi-f^1}^{:=\Phi},\tilde{\varphi})+\kappa(\varphi_x+\psi,\tilde{\varphi}_x)=\rho_1(f^2,\tilde{\varphi}),$$

ou ainda,

$$(\varphi_x+\psi,\tilde{\varphi}_x)=-\frac{1}{\kappa}([(\rho_1+\alpha)\Phi-\rho_1 f^2],\tilde{\varphi}).$$

Pela arbitrariedade de $\varphi\in H_0^1(0,L)$, segue da definição de derivada fraca que

$$(\varphi_x+\psi)_x=\frac{1}{\kappa}[(\rho_1+\alpha)\Phi-\rho_1 f^2],$$

o que implica que,

$$\varphi_{xx}=\frac{1}{\kappa}[(\rho_1+\alpha)\Phi-\rho_1 f^2]-\psi_x\in L^2(0,L).$$

Portanto, $\varphi\in H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L)$ e satisfaz a igualdade $(3.6)_2$.

Passo 4. Seja $\tilde{\psi} \in H^1_*(0,L)$. Considerando o vetor $(0,\tilde{\psi}) \in W$ na igualdade (3.9) e, tendo em conta as expressões (3.7) e (3.8), temos

$$(\rho_2+\beta)(\psi,\tilde{\psi}) + b(\psi_x,\tilde{\psi}_x) + \kappa(\varphi_x+\psi,\tilde{\psi}) = (\rho_2+\beta)(f^3,\tilde{\psi}) + \rho_2(f^4,\tilde{\psi}).$$

Assim,

$$(\rho_2+\beta)(\Psi,\tilde{\psi}) + b(\psi_x,\tilde{\psi}_x) + \kappa(\varphi_x+\psi,\tilde{\psi}) = \rho_2(f^4,\tilde{\psi}), \quad \forall\ \tilde{\psi} \in H^1_*(0,L). \tag{3.10}$$

Observe que não podemos utilizar diretamente a definição de derivada fraca, similar ao anterior, pois não sabermos se $C_0^\infty(0,L)$ é denso em $H^1_*(0,L)$. Contudo, com intuito de utilizarmos a definição de derivada fraca, vejamos que a igualdade (3.10) é válida para toda $\tilde{\psi} \in H^1(0,L)$. De fato, para toda $\tilde{\psi} \in H^1(0,L)$, defina

$$w = \tilde{\psi} - \frac{1}{L}\int_0^L \tilde{\psi}(x)\ \mathrm{d}x \in H^1_*(0,L).$$

Agora, veja que

- $(\psi_x, w_x) = (\psi_x,\tilde{\psi}_x) - \dfrac{1}{L}\underbrace{\overline{\left(\displaystyle\int_0^L \tilde{\psi}(x)\ \mathrm{d}x\right)}_{x}}_{=0}\left(\displaystyle\int_0^L \psi_x(x)\ \mathrm{d}x\right) = (\psi_x,\tilde{\psi}_x).$
- $(\Psi, w) = (\Psi,\tilde{\psi}) - \dfrac{1}{L}\overline{\left(\displaystyle\int_0^L \tilde{\psi}(x)\ \mathrm{d}x\right)}\underbrace{\left(\displaystyle\int_0^L \Psi(x)\ \mathrm{d}x\right)}_{=0} = (\Psi,\tilde{\psi}).$
- $(\varphi_x+\psi, w) = (\varphi_x+\psi,\tilde{\psi}) - \dfrac{1}{L}\overline{\left(\displaystyle\int_0^L \tilde{\psi}(x)\ \mathrm{d}x\right)}\underbrace{\left(\displaystyle\int_0^L (\varphi_x+\psi)(x)\ \mathrm{d}x\right)}_{=0} = (\varphi_x+\psi,\tilde{\psi}).$
- $(f^4, w) = (f^4,\tilde{\psi}) - \dfrac{1}{L}\overline{\left(\displaystyle\int_0^L \tilde{\psi}(x)\ \mathrm{d}x\right)}\underbrace{\left(\displaystyle\int_0^L f^4(x)\ \mathrm{d}x\right)}_{=0} = (f^4,\tilde{\psi}).$

Das igualdades acima, chegamos a

$$(\rho_2+\beta)(\Psi,\tilde{\psi}) + b(\psi_x,\tilde{\psi}_x) + \kappa(\varphi_x+\psi,\tilde{\psi}) = \rho_2(f^4,\tilde{\psi}), \quad \forall\ \tilde{\psi} \in H^1(0,L),$$

ou ainda,

$$(\psi_x,\tilde{\psi}_x) = -\frac{1}{b}([(\rho_2+\beta)\Psi + \kappa(\varphi_x+\psi) - \rho_2 f^4],\tilde{\psi}), \quad \forall\ \tilde{\psi} \in H^1(0,L).$$

Pela definição de derivada fraca, obtemos

$$\psi_{xx} = \frac{1}{b}[(\rho_2+\beta)\Psi + \kappa(\varphi_x+\psi) - \rho_2 f^4] \in L^2(0,L). \tag{3.11}$$

Portanto, $\psi \in H^2(0,L) \cap H^1_*(0,L)$ e a igualdade $(3.6)_4$ é satisfeita. Resta mostrar que a condição de fronteira $\psi_x(0) = \psi_x(L) = 0$ é válida. Para isso, consideremos uma função

$v \in C([0,L])$ tal que $v(0)=0$ e $v(L)=1$. De um lado, utilizando a integração por partes, temos

$$\int_0^L \psi_x(x)\overline{v_x}(x)\,\mathrm{d}x = \psi_x(x)\overline{v(x)}|_0^L - \int_0^L \psi_{xx}(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x = \psi_x(L) - \int_0^L \psi_{xx}(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Por outro lado, a definição de derivada fraca nos diz que

$$\int_0^L \psi_x(x)\overline{v_x}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^L \psi_{xx}(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Das duas igualdade anteriores, concluí-se que $\psi_x(L)=0$. Ademais, utilizando a igualdade (3.11), as regularidades de $(\varphi,\psi)\in W$ e o fato de $f^4 \in L^2_*(0,L)$, segue que

$$\begin{aligned} b(\psi_x(L)-\psi_x(0)) &= b\int_0^L \psi_{xx}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (\rho_1+\beta)\underbrace{\int_0^L \Psi(x)\,\mathrm{d}x}_{=0} + \kappa\underbrace{\int_0^L (\varphi_x+\psi)(x)\,\mathrm{d}x}_{=0} - \rho_2\underbrace{\int_0^L f^4(x)\,\mathrm{d}x}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $\psi_x(0)=\psi_x(L)=0$, finalizando o Passo 4.

Uma vez comprovados os passos acima, concluímos que $I-A$ é sobrejetor. □

Portanto, uma vez que $\mathscr{H}$ é reflexivo, A é dissipativo e $I-A$ é sobrejetor, o Corolário 2.1 garante que o operador A é gerador infinitesimal de um C_0-Semigrupo de contrações $S(t)=e^{tA}$. Mais ainda, somado ao exposto anterior, a Proposição 2.5 garante a validade do seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Para todo $U_0 \in \mathscr{H}$, o problema (3.4) admite uma única solução generalizada $U \in C(0,\infty,\mathscr{H})$. Em adição, se $U_0 \in D(A)$, então U é a solução clássica de (3.4) e*

$$U \in C^1(0,\infty,\mathscr{H}) \cap C(0,\infty,D(A)).$$

□

Na próxima seção, estudaremos a estabilidade do semigrupo $S(t)=e^{tA}$.

3.2 Estabilidade exponencial

Nesta seção iremos abordar a estabilidade exponencial do semigrupo $S(t)=e^{tA}$.

Teorema 3.2. *Se $\alpha>0$ e $\beta>0$, então $S(t)$ é exponencialmente estável.*

Para provar o Teorema 3.2, vamos verificar que o gerador A satisfaz as hipóteses do Teorema 2.3, as quais podem ser obtidas por meio de estimativas provenientes da equação resolvente associada.

3.2.1 Estimativas técnicas

Dados $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $f = (f^1, f^2, f^3, f^3) \in \mathscr{H}$, suponhamos que exista $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi) \in D(A)$ tal que

$$(i\lambda I - A)U = f,$$

isto é,

$$\begin{cases} i\lambda\varphi - \Phi = f^1 \\ i\lambda\rho_1\Phi - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \alpha\Phi = \rho_1 f^2 \\ i\lambda\psi - \Psi = f^3 \\ i\lambda\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta\Psi = \rho_2 f^4. \end{cases} \tag{3.12}$$

A partir de agora, apresentaremos as estimativas envolvendo a solução de (3.12) por meio de lemas.

Lema 3.3. *Se $\alpha, \beta \geq 0$, temos*

$$\alpha\|\Phi\|^2 + \beta\|\Psi\|^2 \leq \|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.1 sabemos que

$$\mathrm{Re}(AU, U) = \alpha\|\Phi\|^2 + \beta\|\Psi\|^2.$$

Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\mathrm{Re}(AU, U) = \mathrm{Re}(i\lambda U - AU, U) \leq \|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Portanto,

$$\alpha\|\Phi\|^2 + \beta\|\Psi\|^2 \leq \|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}},$$

como queríamos. □

No que segue, iremos apresentar dois lemas nos quais buscamos torná-los independentes entre si. A motivação dessa estratégia tem como objetivo a reutilização das estimativas geradas por eles nos próximos capítulos. Vejamos que, para os próximos dois lemas, o primeiro depende exclusivamente de $\alpha > 0$, enquanto o segundo somente de $\beta > 0$.

Lema 3.4. *Existe $c > 0$ tal que*

$$\frac{\kappa}{2}\|\varphi_x + \psi\|^2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + \varepsilon_1\|\psi_x\|^2, \quad \forall\ \varepsilon_1 \in (0, 1).$$

Demonstração. Tomando o produto interno em $L^2(0, L)$ de $(3.12)_2$ com $\varphi + I_\psi$, tem-se

$$i\lambda\rho_1(\Phi, \varphi + I_\psi) - \kappa((\varphi_x + \psi)_x, \varphi + I_\psi) + \alpha(\Phi, \varphi + I_\psi) = \rho_1(f^2, \varphi + I_\psi).$$

Utilizando integração por partes e a regularidade das funções φ e I_ψ, a igualdade acima pode ser reescrita como

$$i\lambda\rho_1(\Phi,\varphi+I_\psi)+\kappa\|\varphi_x+\psi\|^2+\alpha(\Phi,\varphi+I_\psi)=\rho_1(f^2,\varphi+I_\psi).$$

Isolado $\kappa\|\varphi_x+\psi\|^2$, utilizando a desigualdade triangular e as igualdades $(3.12)_1$ e $(3.12)_3$, obtêm-se

$$\begin{aligned}\kappa\|\varphi_x+\psi\|^2 &= -i\lambda\rho_1(\Phi,\varphi+I_\psi)-\alpha(\Phi,\varphi+I_\psi)+\rho_1(f^2,\varphi+I_\psi)\\ &= \rho_1(\Phi,i\lambda\varphi)+\rho_1(\Phi,i\lambda I_\psi)-\alpha(\Phi,\varphi+I_\psi)+\rho_1(f^2,\varphi+I_\psi)\\ &= \rho_1(\Phi,\Phi+f^1)+\rho_1(\Phi,I_\Psi+I_{f^3})-\alpha(\Phi,\varphi+I_\psi)+\rho_1(f^2,\varphi+I_\psi)\\ &= \sum_{i=1}^{6}P_i\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}P_1&:=\rho_1\|\Phi\|^2, & P_2&:=\rho_1(\Phi,f^1), & P_3&:=\rho_1(\Phi,I_\Psi),\\ P_4&:=\rho_1(\Phi,I_{f^3}), & P_5&:=-\alpha(\Phi,\varphi+I_\psi), & P_6&:=\rho_1(f^2,\varphi+I_\psi).\end{aligned}$$

No que segue, estimaremos os termos P_i, $i\in\{1,\dots,6\}$. Para isso, vamos aplicar sucessivas vezes as desigualdade de Cauchy-Schwarz, desigualdade de Young, desigualdade de Poincaré e a desigualdade da potência.

- Para primeira parcela, segue como consequência do Lema 3.3 que,

$$P_1:=\rho_1\|\Phi\|^2\le c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

- Para segunda parcela, observa-se que

$$\begin{aligned}|P_2|^2 &\le \rho_1^2\|\Phi\|^2\|f^1\|^2\\ &\le c\|\Phi\|^2\|f_x^1+f^3-f^3\|^2\\ &\le c\|\Phi\|^2\left[\|f_x^1+f^3\|^2+\|f_x^3\|^2\right]\\ &\le c\left[\|\Phi\|^2\|f_x^1+f^3\|^2+\|\Phi\|^2\|f_x^3\|^2\right]\\ &\le c\|f\|_{\mathscr{H}}^2\|U\|_{\mathscr{H}}^2.\end{aligned}$$

  Portanto,

$$|P_2|\le c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

- Já na terceira parcela, aplicamos o Lema 2.7 para obter

$$|P_3|\le\rho_1\|\Phi\|\|I_\psi\|\le c\|\Phi\|\|\psi_x\|\le\frac{c}{\varepsilon}\|\Phi\|^2+\varepsilon\|\psi_x\|^2\le\frac{c}{\varepsilon_1}\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}+\varepsilon_1\|\psi_x\|^2.$$

- Novamente aplicando o Lema 2.7, a quarta parcela pode ser vista como

$$|P_4|^2 \leq c\|\Phi\|^2\|\tilde{f}^3\|^2 \leq c\|\Phi\|^2\|f_x^3\|^2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}^2\|U\|_{\mathscr{H}}^2,$$

  ou seja,

$$|P_4| \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}$$

- Em consequência do Lema 3.3, obtêm-se

$$\begin{aligned} |P_5| &\leq c\|\Phi\|\|\varphi_x + \psi\| \\ &\leq c\|\Phi\|^2 + \frac{\kappa}{2}\|\varphi_x + \psi\|^2 \\ &\leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + \frac{\kappa}{2}\|\varphi_x + \psi\|^2. \end{aligned}$$

- Para sexta parcela, ver-se que

$$|P_6|^2 \leq c\|f^2\|^2\|\varphi_x + \psi\|^2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}^2\|U\|_{\mathscr{H}}^2.$$

  Dessa forma,

$$|P_6| \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Desse modo, das parcelas acima, concluímos que

$$\frac{\kappa}{2}\|\varphi_x + \psi\|^2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + \varepsilon_1\|\psi_x\|^2.$$

□

Lema 3.5. *Existe $c > 0$ tal que*

$$b\|\psi_x\|^2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_2|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + c\varepsilon_2\|\varphi_x + \psi\|^2, \quad \forall\ \varepsilon_2 \in (0,1).$$

Demonstração. Inicialmente, tomamos o produto interno em $L^2(0,L)$ de $(3.12)_4$ com $\Psi \in H_*^1(0,L)$, obtendo a expressão

$$i\lambda\rho_2(\Psi,\Psi) - b(\psi_{xx},\Psi) + \kappa(\varphi_x + \psi,\Psi) + \beta(\Psi,\Psi) = \rho_2(f^4,\Psi).$$

Integrando por partes, utilizando a regularidade de Ψ e a equação $(3.12)_3$, a equação acima pode ser reescrita como

$$i\lambda\rho_2\|\Psi\|^2 + b(\psi_x, i\lambda\psi_x - f_x^3) + \kappa(\varphi_x + \psi,\Psi) + \beta\|\Psi\|^2 = \rho_2(f^4,\Psi).$$

Pela bilinearidade do produto interno, temos

$$i\lambda(\rho_2\|\Psi\|^2 - b\|\psi_x\|^2) - b(\psi_x, f_x^3) + \kappa(\varphi_x + \psi,\Psi) + \beta\|\Psi\|^2 = \rho_2(f^4,\Psi),$$

ou ainda,

$$b\|\psi_x\|^2 = -\frac{1}{i\lambda}\left[b(\psi_x, f_x^3) - \kappa(\varphi_x + \psi, \Psi) - \beta\|\Psi\|^2 + \rho_2(f^4, \Psi)\right] + \rho_2\|\Psi\|^2.$$

Pela desigualdade triangular,

$$b\|\psi_x\|^2 \leq \frac{1}{|\lambda|}\left[b|(\psi_x, f_x^3)| + \kappa|(\varphi_x + \psi, \Psi)| + \beta\|\Psi\|^2 + \rho_2|(f^4, \Psi)|\right] + \rho_2\|\Psi\|^2.$$

Assim,

$$b\|\psi_x\|^2 \leq \sum_{i=3}^{4}\frac{Q_i}{|\lambda|} + \left(\frac{\beta}{|\lambda|} + \rho_2\right)\|\Psi\|^2,$$

onde

$$Q_1 := b|(\psi_x, f_x^3)|, \qquad Q_2 := \kappa|(\varphi_x + \psi, \Psi)|, \qquad Q_3 := \rho_2|(f^4, \Psi)|.$$

No que segue, estimaremos parcela presente no somatório. Para isso, vamos aplicar sucessivas vezes as desigualdade de Cauchy-Schwarz, desigualdade de Young, desigualdade de Poincaré e a desigualdade da potência.

- Para primeira parcela,

$$\frac{b^2}{|\lambda|^2}|(\psi_x, f_x^3)|^2 \leq \frac{c}{|\lambda|^2}\|\psi_x\|^2\|f_x^3\|^2 \leq \frac{c}{|\lambda|^2}\|f\|_{\mathscr{H}}^2\|U\|_{\mathscr{H}}^2.$$

  Portanto,

$$\frac{Q_1}{|\lambda|} \leq \frac{c}{|\lambda|}\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

- Pelo Lema 3.3, tem-se na segunda parcela

$$\begin{aligned}\frac{Q_2}{|\lambda|} &\leq \kappa\|\varphi_x + \psi\|\frac{1}{|\lambda|}\|\Psi\| \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon_2|\lambda|^2}\|\Psi\|^2 + \varepsilon_2\|\varphi_x + \psi\|^2 \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon_2|\lambda|^2}\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + \varepsilon_2\|\varphi_x + \psi\|.\end{aligned}$$

- Já para terceira parcela, observe que

$$\rho_2\|f^4\|^2\|\Psi\|^2 \leq c\|f^4\|^2\|\Psi\|^2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}^2\|U\|_{\mathscr{H}}^2.$$

  Logo,

$$Q_4 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Além disso, em consequência do Lema 3.3, veja que

$$\left(\frac{\beta}{|\lambda|} + \rho_2\right)\|\Psi\|^2 \leq \frac{c}{|\lambda|}\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Por tudo acima, segue que

$$b\|\psi_x\|^2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_2|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + c\varepsilon_2\|\varphi_x + \psi\|^2.$$

□

Lema 3.6. *Existe $c > 0$ tal que*

$$\|U\|_{\mathscr{H}} \leq c\left(\frac{1}{|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}.$$

Demonstração. Pelos Lemas 3.3, 3.4 e 3.5, temos que

$$\begin{aligned}
\|U\|^2_{\mathscr{H}} &= \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + \kappa\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 \\
&\leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_2|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{\varepsilon_1} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + c(\varepsilon_1\|\psi_x\|^2 + \varepsilon_2\|\varphi_x + \psi\|^2) \\
&\leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_2|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{\varepsilon_1} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + c(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\|U\|^2_{\mathscr{H}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(1 - c(\varepsilon_1 + \varepsilon_2))\|U\|^2_{\mathscr{H}} \leq \left(\frac{1}{\varepsilon_2|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{\varepsilon_1} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Escolhendo ε_1 e ε_2 de tal forma que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \dfrac{1}{2c} > 0$ e aplicando a desigualdade de Young com $\varepsilon = 1$, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|U\|^2_{\mathscr{H}} &\leq c\left(\frac{1}{|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} \\
&\leq c\left(\frac{1}{|\lambda^2|} + \frac{1}{|\lambda|} + 1\right)^2\|f\|^2_{\mathscr{H}} + \frac{1}{4}\|U\|^2_{\mathscr{H}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{4}\|U\|^2_{\mathscr{H}} \leq c\left(\frac{1}{|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + 1\right)^2\|f\|^2_{\mathscr{H}}.$$

Portanto, extraindo a raiz em ambos os lados, chegamos a estimativa

$$\|U\|_{\mathscr{H}} \leq c\left(\frac{1}{|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}.$$

□

3.2.2 Prova do Teorema 3.2

No intuito de provar o Teorema 3.2, mostraremos que as hipóteses do Teorema de Gearhart-Pruss 2.3 são satisfeitas.

Suponhamos, por contradição, a existência de $\lambda_* \in \mathbb{R}$ tal que $i\lambda_* \notin \rho(A)$. Pelo Teorema 2.4

$$i\lambda_* \in i\mathbb{R} \cap \sigma(A) = i\mathbb{R} \cap \sigma_{ap}(A).$$

Logo, existe $U_n = (\varphi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n) \in D(A)$ tal que $\|U_n\|_{\mathscr{H}} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$f_n = i\lambda_* U_n - AU_n \to 0 \quad \text{em } \mathscr{H}. \tag{3.13}$$

Escrevendo $f_n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4)$, (3.13) pode ser expressa por

$$\begin{cases} f_n^1 = i\lambda_*\varphi_n - \Phi_n \ \to 0 \quad \text{em } H_0^1(0,L) \\ f_n^2 = i\lambda_*\rho_1\Phi_n - \kappa(\varphi_{nx}+\psi_n)_x + \alpha\Phi_n \ \to 0 \quad \text{em } L^2(0,L) \\ f_n^3 = i\lambda_*\psi_n - \Psi_n \ \to 0 \quad \text{em } H_*^1(0,L) \\ f_n^4 = i\lambda_*\rho_2\Psi_n - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_{nx}+\psi_n) + \beta\Psi_n \ \to 0 \quad \text{em } L_*^2(0,L) \end{cases} \tag{3.14}$$

Agora, vamos dividir a prova em dois casos:

Caso 1: $\lambda_* = 0$. Nessa suposição, segue diretamente das igualdades $(3.14)_1$ e $(3.14)_3$ que

$$\Phi_n \to 0 \quad \text{em } H_0^1(0,L) \quad \text{e} \quad \Psi_n \to 0 \quad \text{em } H_*^1(0,L). \tag{3.15}$$

Por outro lado, calculando o produto interno em $L^2(0,L)$ de φ_n com $(3.14)_2$, tem-se

$$-\kappa((\varphi_{nx}+\psi_n)_x, \varphi_n) + \alpha(\Phi_n, \varphi_n) = (f_n^2, \varphi_n),$$

que também pode ser vista como

$$\kappa(\varphi_{nx}+\psi_n, \varphi_{nx}) = (f_n^2, \varphi_n) - \alpha(\Phi_n, \varphi_n). \tag{3.16}$$

Ademais, tomando o produto interno em $L^2(0,L)$ de ψ_n com $(3.14)_4$, teremos

$$-b(\psi_{nxx}, \psi_n) + \kappa(\varphi_{nx}+\psi_n, \psi_n) + \beta(\Psi_n, \psi_n) = \rho_2(f_n^4, \psi_n),$$

ou ainda,

$$b\|\psi_{nx}\|^2 + \kappa(\varphi_{nx}+\psi_n, \psi_n) = \rho_2(f_n^4, \psi_n) - \beta(\Psi_n, \psi_n). \tag{3.17}$$

Somando as equações (3.16) e (3.17), utilizando a desigualdade triangular e desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\begin{aligned} b\|\psi_x\|^2 + \kappa\|\varphi_{nx}+\psi_n\|^2 &\leq |(f_n^2, \varphi_n)| + \alpha|(\Phi_n, \varphi_n)| + \rho_2|(f_n^4, \psi_n)| + \beta|(\Psi_n, \psi_n)| \\ &\leq \|f_n^2\|\|\varphi_n\| + \alpha\|\Phi_n\|\|\varphi_n\| + \rho_2\|f_n^4\|\|\psi_n\| + \beta\|\Psi_n\|\|\psi_n\|. \end{aligned}$$

Das convergências $(3.14)_2$, $(3.14)_4$, (3.15) e da limitação de U_n, segue que

$$b\|\psi_{nx}\|^2 + \kappa\|\varphi_{nx}+\psi_n\|^2 \to 0.$$

Logo, $\|U_n\|_{\mathscr{H}} \to 0$, contradizendo o fato de $\|U_n\|_{\mathscr{H}} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso 2: $\lambda_* \neq 0$. Como $\lambda_* \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f_n \in \mathscr{H}$ e $U_n \in D(A)$ é uma solução de (3.14), temos pelo Lema 3.6

$$\|U_n\|_{\mathscr{H}} \leq c\left(\frac{1}{|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + 1\right)\|f_n\|_{\mathscr{H}} \to 0,$$

o que contradiz o fato de $\|U_n\|_{\mathscr{H}} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, em ambos os casos é gerado uma contradição. Portanto, $i\mathbb{R} \in \rho(A)$.

Agora, afirmamos que

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} < \infty.$$

De fato, seja $f \in \mathscr{H}$ tal que $\|f\|_{\mathscr{H}} = 1$. Como $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, existe $U \in D(A)$ tal que

$$i\lambda U - AU = f.$$

Do Lema 3.6 e do fato de que $U = (i\lambda I - A)^{-1} f$, temos

$$\|(i\lambda I - A)^{-1} f\|_{\mathscr{H}} = \|U\|_{\mathscr{H}} \leq c \left(\frac{1}{|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + 1 \right) \|f\|_{\mathscr{H}} = c \left(\frac{1}{|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + 1 \right).$$

Como o lado direito da desigualdade acima não depende de f,

$$\limsup_{|\lambda|\to+\infty} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} \leq \limsup_{|\lambda|\to+\infty} c \left(\frac{1}{|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + 1 \right) = c < \infty.$$

Portanto, todas as condições do Teorema 2.3 são satisfeitas e consequentemente, $S(t) = e^{tA}$ é exponencialmente estável. □

Nota-se que, para o sistema totalmente dissipativo com termos de amortecimento friccionais, ou seja, quando $\alpha, \beta > 0$, a estabilidade exponencial é garantida sem a necessidade de impor outras condições sobre o problema. Por outro lado, também é de interesse verificar seu comportamento assintótico quando temos o sistema parcialmente dissipativo, isto é, quando $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Esta será a dedicação dos próximos dois capítulos, onde retiraremos a dissipação em um das equações e verifiquemos sob quais condições o sistema será exponencialmente estável.

4 Sistema de Timoshenko parcialmente dissipativo ($\alpha > 0$ e $\beta = 0$)

Dado $L > 0$, considere o seguinte sistema de Timoshenko

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \alpha \varphi_t = 0, & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{4.1}$$

com condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0, \quad \forall\ t > 0, \tag{4.2}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \forall\ x \in (0, L) \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad \forall\ x \in (0, L). \end{cases} \tag{4.3}$$

Observe que o problema (4.1)-(4.3) pode ser reescrito como problema de Cauchy,

$$\begin{cases} U_t = A_\alpha U, \ t > 0 \\ U(0) = U_0 := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)^T \end{cases} \tag{4.4}$$

em que $A_\alpha : D(A_\alpha) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ é dado por

$$A_\alpha U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{1}{\rho_1}[\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \alpha\Phi] \\ \Psi \\ \frac{1}{\rho_2}[b\psi_{xx} - \kappa(\varphi_x + \psi)] \end{pmatrix}, \quad U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi)^T \in D(A_\alpha) = D(A).$$

Com mínimas adaptações, a boa colocação do problema (4.4) é herdada do Teorema 3.1. Aqui, por completude, enunciamos o resultado de boa colocação.

Teorema 4.1. *Para todo $U_0 \in \mathscr{H}$, o problema (4.4) admite uma única solução generalizada $U \in C(0, \infty, \mathscr{H})$. Em adição, se $U_0 \in D(A_\alpha)$, então U é a solução clássica de (4.4) e*

$$U \in C^1(0, \infty, \mathscr{H}) \cap C(0, \infty, D(A_\alpha)).$$

□

Sendo assim, o principal objetivo do presente capítulo consiste em investigar a estabilidade exponencial do semigrupo solução $S(t) = e^{tA_\alpha}$ associado ao problema original.

4.1 Estabilidade exponencial

Para garantir que o semigrupo $S(t) = e^{tA_\alpha}$ é exponencialmente estável, iremos verificar que as hipóteses do Teorema 2.3 são contempladas. Vejamos que, pelo fato do sistema ser parcialmente dissipativo, o decaimento exponencial está condicionado a igualdade de velocidade

$$\chi_0 = \frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} = 0. \tag{4.5}$$

Teorema 4.2. *$S(t) = e^{tA_\alpha}$ é exponencialmente estável se, e somente se, (4.5) é satisfeito.*

Para provar o Teorema 4.2, vamos verificar que o gerador A_α satisfaz as condições do Teorema 2.3, as quais podem ser obtidas através de estimativas provenientes da equação resolvente associada.

4.1.1 Estimativas técnicas

Nesta subseção, iremos propor uma estimativa técnica, oriunda da equação resolvente, a qual irá auxiliar a demonstração do Teorema 4.2. Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f = (f^1, f^2, f^3, f^4) \in \mathscr{H}$, suponhamos que exista $U \in D(A_\alpha)$ tal que

$$(i\lambda I - A_\alpha)U = f,$$

isto é,

$$\begin{cases} i\lambda\varphi - \Phi = f^1 \\ i\lambda\rho_1\Phi - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \alpha\Phi = \rho_1 f^2 \\ i\lambda\psi - \Psi = f^3 \\ i\lambda\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = \rho_2 f^4. \end{cases} \tag{4.6}$$

A partir de agora iremos exibir estimativas envolvendo a solução de (4.6). Para isso, inicialmente, nota-se que os Lemas 3.3 e 3.4 já garantem a existência de $c > 0$ tal que

$$\rho_1\|\Phi\|^2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} \tag{4.7}$$

e

$$\frac{\kappa}{2}\|\varphi_x + \psi\|^2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + \varepsilon_1\|\psi_x\|^2, \tag{4.8}$$

para todo $\varepsilon_1 \in (0, 1)$. Resta majorar dois termos da norma $\|U\|^2_{\mathscr{H}}$, os quais serão garantidos pelos lemas enunciados a seguir.

Lema 4.1. *Se (4.5) é satisfeito, então existe $c > 0$ tal que*

$$b\|\psi_x\| \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Demonstração. De início, dividimos a equação $(4.6)_2$ por ρ_1 e a equação $(4.6)_4$ por ρ_2, obtendo

$$\begin{cases} i\lambda\Phi - \kappa/\rho_1(\varphi_x+\psi)_x + \alpha/\rho_1\Phi = f^2 \\ i\lambda\Psi - b/\rho_2\psi_{xx} + \kappa/\rho_2(\varphi_x+\psi) = f^4. \end{cases} \tag{4.9}$$

Calculando o produto interno em $L^2(0,L)$ de $(4.9)_1$ com $\psi_x \in H_0^1(0,L)$, tem-se

$$i\lambda(\Phi,\psi_x) - \frac{\kappa}{\rho_1}((\varphi_x+\psi)_x,\psi_x) + \frac{\alpha}{\rho_1}(\Phi,\psi_x) = (f^2,\psi_x).$$

Integrando por partes e utilizando as condições de fronteira de ψ_x teremos

$$-(\Phi,i\lambda\psi_x) + \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x+\psi,\psi_{xx}) + \frac{\alpha}{\rho_1}(\Phi,\psi_x) = (f^2,\psi_x).$$

Utilizando a equação $(4.6)_3$, segue

$$-(\Phi,(\Psi+f^3)_x) + \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x+\psi,\psi_{xx}) + \frac{\alpha}{\rho_1}(\Phi,\psi_x) = (f^2,\psi_x),$$

ou ainda,

$$-(\Phi,\Psi_x) - (\Phi,f_x^3) + \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x+\psi,\psi_{xx}) + \frac{\alpha}{\rho_1}(\Phi,\psi_x) = (f^2,\psi_x). \tag{4.10}$$

Por outro lado, tomando o produto interno em $L^2(0,L)$ de $(4.9)_2$ com $\psi \in H_*^1(0,L)$ teremos

$$i\lambda(\Psi,\psi) - \frac{b}{\rho_2}(\psi_{xx},\psi) + \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x+\psi,\psi) = (f^4,\psi).$$

Utilizando as condições do domínio do operador, temos

$$-(\Psi,i\lambda\psi) + \frac{b}{\rho_2}\|\psi_x\|^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}((\varphi_x+\psi),\psi) = (f^4,\psi).$$

Da equação $(4.6)_3$ teremos

$$-(\Psi,\Psi+f^3) + \frac{b}{\rho_2}\|\psi_x\|^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}((\varphi_x+\psi),\psi) = (f^4,\psi),$$

ou seja,

$$-(\Psi,\Psi) - (\Psi,f^3) + \frac{b}{\rho_2}\|\psi_x\| + \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x+\psi,\psi) = (f^4,\psi). \tag{4.11}$$

Fazendo a diferença entre a equação (4.10) e (4.11), teremos

$$\begin{aligned}(\Phi_x+\Psi,\Psi) - \frac{b}{\rho_2}\|\psi_x\|^2 \;=\; & (\Phi,f_x^3) - \frac{\alpha}{\rho_1}(\Phi,\psi_x) + \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x+\psi,\psi) \\ & +(f^2,\psi_x) - (f^4,\psi) - \frac{\kappa}{\rho_1}\underbrace{(\varphi_x+\psi,\psi_{xx})}_{:=J_1}.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Por outro lado, de $(4.6)_4$,

$$\psi_{xx} = \frac{i\lambda\rho_2}{b}\Psi + \frac{\kappa}{b}(\varphi_x+\psi) - \frac{\rho_2}{b}f^4.$$

Substituindo em J_1 e utilizando $(4.6)_1$ e $(4.6)_3$, teremos

$$\begin{aligned}
J_1 &= -\frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x+\psi, i\lambda\frac{\rho_2}{b}\Psi+\frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x+\psi)-\frac{\rho_2}{b}f^4)\\
&= \frac{i\lambda\rho_2\kappa}{b\rho_1}(\varphi_x+\psi,\Psi)-\frac{\kappa^2}{\rho_1 b}\|\varphi_x+\psi\|^2+\frac{\kappa\rho_2}{\rho_1 b}(\varphi_x+\psi,f^4)\\
&= \frac{\rho_2\kappa}{b\rho_1}(i\lambda\varphi_x+i\lambda\psi,\Psi)-\frac{\kappa^2}{\rho_1 b}\|\varphi_x+\psi\|^2+\frac{\kappa\rho_2}{\rho_1 b}(\varphi_x+\psi,f^4)\\
&= \frac{\rho_2\kappa}{b\rho_1}(\Phi_x+f_x^1+\Psi+f^3,\Psi)-\frac{\kappa^2}{\rho_1 b}\|\varphi_x+\psi\|^2+\frac{\kappa\rho_2}{\rho_1 b}(\varphi_x+\psi,f^4)\\
&= \frac{\rho_2\kappa}{b\rho_1}(\Phi_x+\Psi,\Psi)+\frac{\rho_2\kappa}{b\rho_1}(f_x^1+f^3,\Psi)-\frac{\kappa^2}{\rho_1 b}\|\varphi_x+\psi\|^2+\frac{\kappa\rho_2}{\rho_1 b}(\varphi_x+\psi,f^4).
\end{aligned}$$

Daí, a equação (4.12) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
(\Phi_x+\Psi,\Psi)-\frac{b}{\rho_2}\|\psi_x\|^2 &= (\Phi,f_x^3)-\frac{\alpha}{\rho_1}(\Phi,\psi_x)+\frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x+\psi,\psi)+(f^2,\psi_x)+\\
&\quad -(f^4,\psi)-\frac{\rho_2\kappa}{b\rho_1}(\Phi_x+\Psi,\Psi)+\frac{\rho_2\kappa}{b\rho_1}(f_x^1+f^3,\Psi)+\\
&\quad -\frac{\kappa^2}{\rho_1 b}\|\varphi_x+\psi\|^2+\frac{\kappa\rho_2}{\rho_1 b}(\varphi_x+\psi,f^4).
\end{aligned}$$

Logo, reorganizando os termos acima e aplicando a desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
\frac{b}{\rho_2}\|\psi_x\|^2 &= \frac{\rho_2}{b}\left[\frac{b}{\rho_2}-\frac{\kappa}{\rho_1}\right](\Phi_x+\Psi,\Psi)-(\Phi,f_x^3)+\frac{\alpha}{\rho_1}(\Phi,\psi_x)+\\
&\quad +(\Psi,f^3)-\frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x+\psi,\psi)-(f^2,\psi)+(f^4,\psi)+\\
&\quad -\frac{\kappa\rho_2}{\rho_1 b}(f_x^1+f^3,\Psi)+\frac{\kappa^2}{\rho_1 b}\|\varphi_x+\psi\|^2-\frac{\rho_2\kappa}{\rho_1 b}(\varphi_x+\psi,f^4)\\
&\leq \frac{\rho_2}{b}|\chi_0||(\Phi_x+\Psi,\Psi)|+|(\Phi,f_x^3)|+\frac{\alpha}{\rho_1}|(\Phi,\psi_x)|+|(\Psi,f^3)|\\
&\quad +\frac{\kappa}{\rho_2}|(\varphi_x+\psi,\psi)|+|(f^2,\psi)|+|(f^4,\psi)|+\frac{\kappa\rho_2}{\rho_1 b}|(f_x^1+f^3,\Psi)|+\\
&\quad +\frac{\kappa^2}{\rho_1 b}\|\varphi_x+\psi\|^2+\frac{\rho_2\kappa}{\rho_1 b}|(\varphi_x+\psi,f^4)|.\\
&= c|\chi_0||(\Phi_x+\Psi,\Psi)|+\sum_{i=1}^{9}M_i,
\end{aligned}$$

onde

$$M_1 := |(\Phi,f_x^3)|,\qquad M_2 := \frac{\alpha}{\rho_1}|(\Phi,\psi_x)|,\qquad M_3 := |(\Psi,f^3)|,$$
$$M_4 := \frac{\kappa}{\rho_2}|(\varphi_x+\psi,\psi)|,\qquad M_5 := |(f^2,\psi)|,\qquad M_6 := |(f^4,\psi)|$$
$$M_7 := \frac{\kappa\rho_2}{\rho_1 b}|(f_x^1+f^3,\Psi)|,\qquad M_8 := \frac{\kappa^2}{\rho_1 b}\|\varphi_x+\psi\|^2,\quad M_9 := \frac{\rho_2\kappa}{\rho_1 b}|(\varphi_x+\psi,f^4)|.$$

No que segue, estimaremos cada parcela do somatório acima. Para isso, aplicaremos, quantas vezes necessário, a desigualdade de Cauchy-Schwarz,a desigualdade de Poincaré, a desigualdade de Young, e a desigualdade da potência.

- Para primeira parcela, note que

$$|(\Phi, f_x^3)|^2 \leq \|\Phi\|^2 \|f_x^3\|^2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}^2 \|U\|_{\mathscr{H}}^2.$$

  Desse modo,

$$M_1 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}} \|U\|_{\mathscr{H}}.$$

- Utilizando o Lema 3.3 com $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, a segunda parcela pode ser majorada da seguinte forma

$$M_2 \leq c\|\Phi\|\|\psi_x\| \leq \frac{c}{\varepsilon_2}\|\Phi\|^2 + \varepsilon_2\|\psi_x\|^2 \leq \frac{c}{\varepsilon_2}\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + \varepsilon_2\|\psi_x\|^2.$$

- Na terceira parcela, nota-se que

$$|(\Psi, f^3)|^2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}^2 \|U\|_{\mathscr{H}}^2.$$

  Logo,

$$M_3 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}} \|U\|_{\mathscr{H}}.$$

- Pelo Lema 3.4 com $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^2$, a quarta parcela pode ser vista como

$$\begin{aligned} M_4 &\leq c\|\varphi_x + \psi\|\|\psi_x\| \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon_2}\|\varphi_x + \psi\|^2 + \varepsilon_2\|\psi_x\|^2 \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2^2} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + c\varepsilon_2\|\psi_x\|^2 + \varepsilon_2\|\psi_x\|^2 \\ &= c\left(\frac{1}{\varepsilon_2^3} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + (c+1)\,\varepsilon_2\|\psi_x\|^2. \end{aligned}$$

- Para quinta parcela, Observa-se que

$$|(f^2, \psi)|^2 \leq c\|f^2\|^2\|\psi_x\|^2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}^2\|U\|_{\mathscr{H}}^2.$$

  Portanto,

$$M_5 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

- Na sexta parcela, tem-se

$$|(f^4, \psi)|^2 \leq c\|f^4\|^2\|\psi_x\|^2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}^2\|U\|_{\mathscr{H}}^2.$$

  Assim,

$$M_6 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

- Para sétima parcela, veja que

$$\frac{\kappa\rho_2}{\rho_1 b}|(f_x^1 + f^3, \Psi)|^2 \leq c\|f_x^1 + f^3\|^2\|\Psi\|^2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}^2\|U\|_{\mathscr{H}}^2.$$

  Dessa forma,

$$M_7 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

- Novamente, pelo Lema 3.4 com $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, a oitava parcela pode ser majorada por

$$M_8 \leq \frac{c}{\varepsilon_2}\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + \varepsilon_2\|\psi_x\|^2.$$

- Na nona parcela, nota-se que

$$\frac{\rho_2\kappa}{b\rho_1}|(\varphi_x + \psi, f^4)|^2 \leq c\|\varphi_x + \psi\|^2\|f^4\|^2 \leq c\|f\|^2_{\mathscr{H}}\|U\|^2_{\mathscr{H}}.$$

  Daí,

$$M_9 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Além disso, pela condição (4.5)

$$c|\chi_0||(\Phi_x + \Psi, \Psi)| = 0.$$

Logo,

$$b\|\psi_x\|^2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_2^3} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + c\varepsilon_2\|\psi_x\|^2,$$

ou ainda,

$$(b - c\varepsilon_2)\|\psi_x\|^2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_2^3} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Tomando $\varepsilon_2 = \dfrac{b}{2c}$, segue que

$$b\|\psi_x\| \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

□

Lema 4.2. *Se (4.5) é válido, então existe $c > 0$ tal que*

$$\rho_2\|\Psi\|^2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_2^3} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + c\varepsilon_2\|\psi_x\|^2, \quad \forall\ \varepsilon_2 \in (0,1).$$

Demonstração. Iniciamos calculando o produto interno em $L^2(0,L)$ de $(4.6)_4$ com $\psi \in H^1_*(0,L)$, obtendo

$$i\lambda(\Psi,\psi) - b(\psi_{xx},\psi) + \kappa(\varphi_x + \psi, \psi) = \rho_2(f^4,\psi).$$

Utilizando as condições do domínio e a equação $(4.6)_3$, a equação acima pode ser reescrita como

$$-\rho_2(\Psi, \Psi + f^3) + b\|\psi\|^2 + \kappa(\varphi_x + \psi) = \rho_2(f^4,\psi),$$

ou ainda,

$$\rho_2\|\Psi\|^2 = -\rho_2(\Psi, f^3) + b\|\psi_x\|^2 + \kappa(\varphi_x + \psi, \psi) - \rho_2(f^4,\psi).$$

Então, pela desigualdade triangular,

$$\rho_2\|\Psi\|^2 \leq \rho_2|(\Psi, f^3)| + b\|\psi_x\|^2 + \kappa|(\varphi_x + \psi, \psi)| + \rho_2|(f^4,\psi)| = \sum_{i=1}^{4} N_i,$$

onde

$$N_1 := \rho_2|(\Psi, f^3)|, \qquad N_2 := b\|\psi_x\|^2,$$
$$N_3 := \kappa|(\varphi_x + \psi, \psi)|, \qquad N_4 := \rho_2|f^4, \psi_x|.$$

No que segue, estimaremos cada N_i acima. Para isso, utilizaremos, quantas vezes necessário, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, desigualdade de Young e desigualdade de Poincaré.

- Na primeira parcela

$$\rho_2|(\Psi, f^3)|^2 \leq c\|\Psi\|^2\|f_x^3\|^2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}^2\|U\|_{\mathscr{H}}^2.$$

  Assim,

$$N_1 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

- Diretamente do Lema 4.1, a segunda parcela pode ser majorada, pois

$$N_2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

- Utilizando o Lema 3.4 com $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^2$ na terceira parcela, tem-se

$$\begin{aligned} N_3 &\leq c\|\varphi_x + \psi\|\|\psi_x\| \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon_2}\|\varphi_x + \psi\|^2 + \varepsilon_2\|\psi_x\|^2 \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2^2} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + c\varepsilon_2\|\psi_x\|^2 + \varepsilon_2\|\psi_x\|^2 \\ &= c\left(\frac{1}{\varepsilon_2^3} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + c\varepsilon_2\|\psi_x\|^2. \end{aligned}$$

- Para quarta parcela, veja que

$$\rho_2|(f^4, \psi)|^2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}^2\|U\|_{\mathscr{H}}^2.$$

  Logo,

$$N_4 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Portanto,

$$\rho_2\|\Psi\|^2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_2^3} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + c\varepsilon_2\|\psi_x\|^2.$$

□

Lema 4.3. *Se (4.5) é válido, então existe $c > 0$ tal que*

$$\|U\|_{\mathscr{H}} \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}.$$

Demonstração. Pelas desigualdades (4.7),(4.8) com $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, e pelos Lemas 4.1 e 4.2, temos que

$$\begin{aligned}\|U\|^2_{\mathscr{H}} &= \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + \kappa\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 \\ &\leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_2^3} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + c\varepsilon_2\|\psi_x\|^2 \\ &\leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_2^3} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + c\varepsilon_2\|U\|^2_{\mathscr{H}}.\end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2c} > 0$, obtemos

$$\frac{1}{2}\|U\|^2_{\mathscr{H}} \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} \leq c\|f\| + \frac{1}{4}\|U\|^2_{\mathscr{H}}.$$

Portanto,

$$\|U\|_{\mathscr{H}} \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}.$$

□

4.1.2 Prova do Teorema 4.2

Com a finalidade de provar o Teorema 4.2, mostraremos que as hipóteses do Teorema de Gearhart-Pruss 2.3 são satisfeitas.

Suponhamos, por contradição, a existência de $\lambda_* \in \mathbb{R}$ tal que $i\lambda_* \notin \rho(A_\alpha)$. Pelo Teorema 2.4

$$i\lambda_* \in i\mathbb{R} \cap \sigma(A_\alpha) = i\mathbb{R} \cap \sigma_{ap}(A_\alpha).$$

Logo, existe $U_n = (\varphi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n) \in D(A_\alpha)$ tal que $\|U_n\|_{\mathscr{H}} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$f_n = i\lambda_* U_n - A_\alpha U_n \to 0 \quad \text{em } \mathscr{H}.$$

Pelo Lema 4.3, sabemos que

$$\|U_n\| \leq c\|f_n\|_{\mathscr{H}} \to 0.$$

Mas isso contradiz o fato de $\|U_n\|_{\mathscr{H}} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, devemos ter $i\mathbb{R} \in \rho(A)$.

Agora, afirmamos que

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \|(i\lambda I - A_\alpha)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} < \infty.$$

De fato, seja $f \in \mathscr{H}$ tal que $\|f\|_{\mathscr{H}} = 1$. Como $i\mathbb{R} \subset \rho(A_\alpha)$, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, existe $U \in D(A_\alpha)$ tal que

$$i\lambda U - A_\alpha U_\alpha = f.$$

Do Lema 4.3 e do fato de que $U = (i\lambda I - A)^{-1}f$, temos

$$\|(i\lambda I - A)^{-1}f\|_{\mathscr{H}} = \|U\|_{\mathscr{H}} \leq c\|f\|_{\mathscr{H}} = c.$$

Como o lado direito da desigualdade acima não depende de f,

$$\limsup_{|\lambda|\to+\infty} \|(i\lambda I - A_\alpha)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} \leq \limsup_{|\lambda|\to+\infty} c = c < \infty.$$

Portanto, todas as condições do Teorema 2.3 são satisfeitas e, consequentemente, $S(t) = e^{tA_\alpha}$ é exponencialmente estável.

Agora, vejamos que, se $\chi_0 \neq 0$, então $S(t) = e^{tA_\alpha}$ não é exponencialmente estável. Para isso, é suficiente exibimos uma sequência de números reais, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{H}$ tais que

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \|(i\lambda - A)^{-1} f_n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} = +\infty.$$

Lema 4.4. *Se $\chi_0 \neq 0$, então existem $\lambda_n > 0$ e $f_n \in \mathscr{H}$ tais que*

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \|(i\lambda_n - A_\alpha)^{-1} f_n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} = +\infty.$$

Demonstração. Baseado nas ideias de Almeida Júnior, Santos e Rivera [3], consideremos $\gamma_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ e

$$\begin{cases} e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\sqrt{\gamma_n} x\right) \\ e_n^*(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\sqrt{\gamma_n} x\right). \end{cases}$$

Definimos $f_n = \left(0, 0, 0, \frac{e_n^*}{\rho_2}\right) \in \mathscr{H}$ e tomamos a equação resolvente associada a ela, nas variáveis $(\varphi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n)$, isto é,

$$\begin{cases} i\lambda_n \varphi_n - \Phi_n = 0 \\ \rho_1 i\lambda_n \Phi_n - \kappa(\varphi_{nx} + \psi_n)_x + \alpha\Phi_n = 0 \\ i\lambda_n \psi_n - \Psi_n = 0 \\ \rho_2 i\lambda_n \Psi_n - \psi_{nxx} + \kappa(\varphi_{nx} + \psi_n) = e_n^*. \end{cases} \tag{4.13}$$

De $(4.13)_1$ e $(4.13)_3$ temos $\Phi_n = i\lambda_n\varphi_n$ e $\Psi_n = i\lambda_n\psi_n$. Daí, obtemos

$$\begin{cases} -\rho_1\lambda_n^2\varphi_n - \kappa(\varphi_{nx} + \psi_n)_x + i\alpha\lambda_n\varphi_n = 0 \\ -\rho_2\lambda_n^2\psi_n - b\psi_{nxx} + \kappa(\varphi_{nx} + \psi_n) = e_n^*. \end{cases} \tag{4.14}$$

Buscamos soluções da forma $\varphi_n = \tilde{a}e_n$ e $\psi_n = \tilde{b}e_n^*$. Substituindo em (4.14) obtemos

$$\begin{cases} -\rho_1\tilde{a}\lambda_n^2\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\sqrt{\gamma_n}x) + \kappa\tilde{a}\sqrt{\frac{2}{L}}\gamma_n\sin(\sqrt{\gamma_n}x) \\ \qquad\qquad +\kappa\tilde{b}\sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\gamma_n}\sin(\sqrt{\gamma_n}x) + \alpha i\tilde{a}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\sqrt{\gamma_n}x) = 0 \\ -\rho_2\tilde{b}\lambda_n^2\sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\sqrt{\gamma_n}x) + b\tilde{b}\sqrt{\frac{2}{L}}\gamma_n\cos(\sqrt{\gamma_n}x) \\ \qquad\qquad +\kappa\tilde{a}\sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\gamma_n}\sin(\sqrt{\gamma_n}x) + \kappa\tilde{b}\sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\sqrt{\gamma_n}x) = e_n^*, \end{cases}$$

a qual implica

$$\begin{cases} \tilde{a}(-\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n + i\alpha\lambda_n) + \tilde{b}\kappa\sqrt{\gamma_n} = 0 \\ \tilde{a}\kappa\sqrt{\gamma_n} + \tilde{b}(-\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa) = 1. \end{cases}$$

Em sua forma matricial, o sistema acima é dado por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n + i\alpha\lambda_n & k\sqrt{\gamma_n} \\ k\sqrt{\gamma_n} & -\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa \end{bmatrix}}_{M_n} \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

No que segue, utilizaremos a regra de Cramer para determinar $\tilde{b}$. Inicialmente, tem-se que

$$\begin{aligned} \det[M_n] &= (-\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n + i\alpha\lambda_n)(-\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa) - \kappa^2\gamma_n \\ &= (-\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n)(-\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa) - \kappa^2\gamma_n + i\alpha\lambda_n(-\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa). \end{aligned}$$

Ademais,

$$\det \begin{bmatrix} -\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n + i\alpha\lambda_n & 0 \\ k\sqrt{\gamma_n} & 1 \end{bmatrix} = -(-\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n + i\alpha\lambda_n).$$

Nesse sentido, iremos determinar constantes d_1 e d_2 de tais forma que

$$\begin{cases} d_1 = -\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa \\ d_2 = (-\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n)(-\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa) - \kappa^2\gamma_n \end{cases} \tag{4.15}$$

De $(4.15)_1$ temos

$$\lambda_n^2 = \frac{1}{\rho_2}[b\gamma_n + \kappa - d_1].$$

Substituindo em $(4.15)_2$, tem-se

$$\begin{aligned} d_2 &= \left(-\frac{\rho_1}{\rho_2}(b\gamma_n + \kappa - d_1) + \kappa\gamma_n\right) d_1 - \kappa^2\gamma_n \\ &= \left(\rho_1 \underbrace{\left(\frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2}\right)}_{\chi_0} d_1 - \kappa^2\right) \gamma_n - \frac{\rho_1}{\rho_2} d_1(\kappa - d_1). \end{aligned}$$

Queremos d_1 de tal forma que $\rho_1\chi_0 d_1 - \kappa^2 = 0$, ou seja,

$$d_1 = \frac{\kappa^2}{\rho_1\chi_0}.$$

Assim, também obtemos d_2, que é dada por

$$d_2 = \frac{\kappa^3}{\rho_2}\left(1 - \frac{\kappa}{\rho_1\chi_0}\right).$$

Agora, temos condições de explicitar, para quais $n \in \mathbb{N}$, λ_n é bem definida. De fato,

$$\frac{1}{\rho_2}[b\gamma_n + \kappa - \frac{\kappa^2}{\rho_1\chi_0}] > 0 \iff n > \frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{b}\left[\frac{k}{\rho_1\chi_0} - 1\right]}$$

Assim, pela regra de Cramer,

$$\begin{aligned}\tilde{b} &= \frac{-(-\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n + i\alpha\lambda_n)}{(-\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n)(-\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa) - \kappa^2\gamma_n + i\alpha\lambda_n(-\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa)} \\ &= \frac{-(-\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n + i\alpha\lambda_n)}{d_2 + i\alpha d_1\lambda_n}.\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\frac{\tilde{b}}{\lambda_n^2} = \frac{\rho_1\dfrac{\lambda_n^2}{\lambda_n^2} - \kappa\dfrac{\gamma_n}{\lambda_n^2} - i\alpha\dfrac{\lambda_n}{\lambda_n^2}}{\dfrac{d_2}{\lambda_n^2} + i\alpha d_1\dfrac{\lambda_n}{\lambda_n^2}}.$$

Observamos que o denominador tende a zero, enquanto o numerador tende a uma constante, pois

$$\kappa\frac{\gamma_n}{\lambda_n^2} = \frac{\kappa\gamma_n}{\dfrac{\kappa}{\rho_2}\left[1 - \dfrac{\kappa}{\rho_1\chi_0} + \dfrac{b}{\kappa}\gamma_n\right]} = \frac{\kappa}{\dfrac{\kappa}{\rho_2\gamma_n} - \dfrac{\kappa^2}{\rho_1\rho_2\chi_0\gamma_n} + \dfrac{b}{\rho_2}} \to \frac{\rho_2\kappa}{b}.$$

Dessa forma,

$$\frac{\tilde{b}}{\lambda_n^2} \to +\infty, \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

Como consequência, $\tilde{b} \to +\infty$, pois caso contrário, $\tilde{b}/\lambda_n^2 \to 0$, haja vista que $\lambda_n \to +\infty$, quando $n \to +\infty$. Daí,

$$\|\psi_{nx}\|^2 = \int_0^L |\psi_{nx}(x)|^2 dx = \int_0^L \tilde{b}^2\gamma_n \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L\tilde{b}^2\gamma_n}{2} \to +\infty, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Logo,

$$\|(i\lambda_n I - A_\alpha)^{-1} f_n\|_{\mathscr{H}}^2 \geq b\|\psi_{nx}\|^2 \to +\infty.$$

Portanto, a condição $ii)$ do Teorema 2.3 não é satisfeita, isto é, $S(t) = e^{tA_\alpha}$ não é exponencialmente estável. □

5 Sistema de Timoshenko parcialmente dissipativo ($\alpha = 0$ e $\beta > 0$)

Dado $L > 0$, considere o seguinte sistema de Timoshenko

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta\psi_t = 0, & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{5.1}$$

com condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0, \quad \forall\ t > 0, \tag{5.2}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \forall\ x \in (0, L) \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad \forall\ x \in (0, L). \end{cases} \tag{5.3}$$

Nota-se que o problema (5.1)-(5.3) pode ser reescrito como problema de Cauchy,

$$\begin{cases} U_t = A_\beta U, \ t > 0 \\ U(0) = U_0 := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)^T \end{cases} \tag{5.4}$$

em que $A_\beta : D(A_\beta) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ é dado por

$$A_\beta U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{1}{\rho_1}[\kappa(\varphi_x + \psi)_x] \\ \Psi \\ \frac{1}{\rho_2}[b\psi_{xx} - \kappa(\varphi_x + \psi) - \beta\Psi] \end{pmatrix}, \quad U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi)^T \in D(A_\beta) = D(A).$$

Efetuando pequenas adequações, a boa colocação do problema (5.4) é obtida do Teorema 3.1. Assim, por integridade, enunciamos o resultado de boa colocação.

Teorema 5.1. *Para todo $U_0 \in \mathscr{H}$, o problema (5.4) admite uma única solução generalizada $U \in C(0, \infty, \mathscr{H})$. Em adição, se $U_0 \in D(A_\beta)$, então U é a solução clássica de (5.4) e*

$$U \in C^1(0, \infty, \mathscr{H}) \cap C(0, \infty, D(A_\beta)).$$

□

Desse modo, o principal propósito do capítulo atual consiste em investigar a estabilidade exponencial do semigrupo solução $S(t) = e^{tA_\beta}$ associado ao problema (5.1)-(5.3).

5.1 Estabilidade exponencial

Com finalidade de garantir que o semigrupo $S(t) = e^{tA_\beta}$ é exponencialmente estável, iremos verificar que as hipóteses do Teorema 2.3 são atestadas. Vejamos que, pelo fato do sistema ser parcialmente dissipativo, a estabilidade exponencial está subordinada a igualdade de velocidade

$$\chi_0 = \frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} = 0. \tag{5.5}$$

Teorema 5.2. *$S(t) = e^{tA_\beta}$ é exponencialmente estável se, e somente se, (5.5) é válida.*

Buscando provar o Teorema 5.2, iremos verificar que o gerador A_β contempla as condições do Teorema 2.3. Para isso, utilizaremos como auxílio uma estimativa proveniente da equação resolvente associada ao problema.

5.1.1 Estimativas técnicas

No intuito de garantir o decaimento exponencial do problema, na presente subseção iremos exibir uma estimativa técnica, a qual auxiliará da demonstração do Teorema 5.2. Inicialmente, dados $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $f = (f^1, f^2, f^3, f^4) \in \mathscr{H}$, suponhamos a existência de $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi) \in D(A_\beta)$, tal que

$$(i\lambda I - A_\beta)U = f$$

isto é,

$$\begin{cases} i\lambda\varphi - \Phi = f^1 \\ i\lambda\rho_1\Phi - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = \rho_1 f^2 \\ i\lambda\psi - \Psi = f^3 \\ i\lambda\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta\Psi = \rho_2 f^4. \end{cases} \tag{5.6}$$

Vejamos uma estimativa técnica proveniente da solução do sistema (5.6). A princípio, nota-se que os Lemas 3.3 e 3.5 já garantem a existência de $c > 0$ tal que

$$\rho_2\|\Psi\|^2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} \tag{5.7}$$

e

$$b\|\psi_x\|^2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_2|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + c\varepsilon_2\|\varphi_x + \psi\|^2, \tag{5.8}$$

para todo $\varepsilon_2 \in (0, 1)$. Assim, resta mostrar a majoração para os dois termos restantes de $\|U\|_{\mathscr{H}}$, os quais serão garantidas pelos lemas abaixo.

Lema 5.1. *Desde que (5.5), existe $c > 0$ tal que*

$$\kappa\|\varphi_x + \psi\| \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Demonstração. Inicialmente, dividimos a equação $(5.6)_2$ por ρ_1 e $(5.6)_3$ por ρ_2, obtendo

$$\begin{cases} i\lambda\Phi - \dfrac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x & = f^2 \\ i\lambda\Psi - \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \dfrac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x+\psi) + \dfrac{\beta}{\rho_2}\Psi & = f^4. \end{cases} \tag{5.9}$$

Calculamos o produto interno em $L^2(0,L)$ de $(5.9)_2$ com $\varphi_x+\psi$, temos

$$i\lambda(\Psi,\varphi_x+\psi) - \frac{b}{\rho_2}(\psi_{xx},\varphi_x+\psi) + \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x+\psi,\varphi_x+\psi) + \frac{\beta}{\rho_2}(\Psi,\varphi_x+\psi) = \rho_2(f^4,\varphi_x+\psi).$$

Integrando por partes e utilizando as condições de fronteiras de φ e ψ_x, a igualdade acima pode ser vista como

$$i\lambda\rho_2(\Psi,\varphi_x+\psi) + \frac{b}{\rho_2}(\psi_x,(\varphi_x+\psi)_x) + \frac{\kappa}{\rho_2}\|\varphi_x+\psi\|^2 + \frac{\beta}{\rho_2}(\Psi,\varphi_x+\psi) = \rho_2(f^4,\varphi_x+\psi),$$

ou ainda,

$$-\rho_2(\Psi,i\lambda\varphi_x+i\lambda\psi) + \frac{b}{\rho_2}(\psi_x,(\varphi_x+\psi)_x) + \frac{\kappa}{\rho_2}\|\varphi_x+\psi\|^2 + \frac{\beta}{\rho_2}(\Psi,\varphi_x+\psi) = \rho_2(f^4,\varphi_x+\psi).$$

Utilizando as equações $(5.6)_1$ e $(5.6)_3$, teremos

$$-\rho_2(\Psi,\Phi_x-f^1_x+\Psi-f^3)+\frac{b}{\rho_2}(\psi_x,(\varphi_x+\psi)_x)+\frac{\kappa}{\rho_2}\|\varphi_x+\psi\|^2+\frac{\beta}{\rho_2}(\Psi,\varphi_x+\psi) = \rho_2(f^4,\varphi_x+\psi).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{\rho_2}\|\varphi_x+\psi\|^2 &= \rho_2(\Psi,\Phi_x)+\rho_2\|\Psi\|^2+\rho_2(\Psi,f^1_x+f^3)-\frac{\beta}{\rho_2}(\Psi,\varphi_x+\psi)+\rho_2(f^4,\varphi_x+\psi) \\ &\quad -\frac{b}{\rho_2}(\psi_x,(\varphi_x+\psi)_x). \end{aligned}$$

Por outro lado, pela igualdade $(5.6)_2$,

$$(\varphi_x+\psi)_x = \frac{i\lambda\rho_1}{\kappa}\Phi - \frac{\rho_1}{\kappa}f^2.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{\rho_2}\|\varphi_x+\psi\|^2 &= \rho_2(\Psi,\Phi_x)+\rho_2\|\Psi\|^2+\rho_2(\Psi,f^1_x+f^3)-\frac{\beta}{\rho_2}(\Psi,\varphi_x+\psi)+\rho_2(f^4,\varphi_x+\psi) \\ &\quad -\frac{b}{\kappa\rho_2}(\psi_x,i\lambda\rho_1\Phi-\rho_1 f^2). \end{aligned}$$

Analisando a última parcela, pela equação $(5.6)_3$

$$\begin{aligned} -\frac{b}{\kappa\rho_2}(\psi_x,i\lambda\rho_1\Phi-\rho_1f^2) &= \frac{i\lambda b\rho_1}{\rho_2\kappa}(\psi_x,\Phi)+\frac{b\rho_1}{\kappa\rho_2}(\psi_x,f^2) \\ &= -\frac{b\rho_1}{\rho_2\kappa}(i\lambda\psi,\Phi_x)+\frac{b\rho_1}{\kappa\rho_2}(\psi_x,f^2) \\ &= -\frac{b\rho_1}{\rho_2\kappa}(\Psi+f^3,\Phi_x)+\frac{b\rho_1}{\kappa\rho_2}(\psi_x,f^2) \\ &= -\frac{b\rho_1}{\rho_2\kappa}(\Psi,\Phi_x)-\frac{b\rho_1}{\rho_2\kappa}(f^3,\Phi_x)+\frac{b\rho_1}{\kappa\rho_2}(\psi_x,f^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\kappa}{\rho_2}\|\varphi_x+\psi\|^2 &= \rho_2(\Psi,\Phi_x)+\rho_2\|\Psi\|^2+\rho_2(\Psi,f_x^1+f^3)-\frac{\beta}{\rho_2}(\Psi,\varphi_x+\psi)+\rho_2(f^4,\varphi_x+\psi)\\ &\quad -\frac{b\rho_1}{\rho_2\kappa}(\Psi,\Phi_x)-\frac{b\rho_1}{\rho_2\kappa}(f^3,\Phi_x)+\frac{b\rho_1}{\kappa\rho_2}(\psi_x,f^2)\\ &= \frac{\rho_1}{\kappa}\left[\frac{\kappa}{\rho_1}-\frac{b}{\rho_2}\right](\Psi,\Phi_x)+\rho_2\|\Psi\|^2+\rho_2(\Psi,f_x^1+f^3)-\frac{\beta}{\rho_2}(\Psi,\varphi_x+\psi)\\ &\quad \rho_2(f^4,\varphi_x+\psi)+\frac{b\rho_1}{\rho_2\kappa}(f_x^3,\Phi)+\frac{b\rho_1}{\kappa\rho_2}(\psi_x,f^2)\\ &= \frac{\rho_1}{\kappa}\chi_0(\Psi,\Phi_x)+\sum_{i=1}^{6}J_i,\end{aligned}$$

onde

$$J_1:=\rho_2\|\Psi\|^2,\qquad J_2:=\rho_2(\Psi,f_x^1+f^3),\qquad J_3:=-\frac{\beta}{\rho_2}(\Psi,\varphi_x+\psi),$$
$$J_4:=\rho_2(f^4,\varphi_x+\psi),\qquad J_5:=\frac{b\rho_1}{\rho_2\kappa}(f_x^3,\Phi),\qquad J_6:=\frac{b\rho_1}{\kappa\rho_2}(\psi_x,f^2).$$

No que segue, estimaremos cada parcela do somatório acima. Para isso, aplicaremos sucessivas vezes a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Poincaré, a desigualdade de Young, e a desigualdade da potência.

- A primeira parcela pode ser majorada pelo Lema 3.3, já que

$$J_1=\rho_2\|\Psi\|^2\leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

- Para segunda parcela, veja que

$$J_2\leq c\|\Psi\|\|f_x^1+f^3\|\leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

- Na terceira parcela, veja que

$$J_4\leq c\|\Psi\|\|\varphi_x+\psi\|\leq\frac{c}{\varepsilon_2}\|\Psi\|^2+\varepsilon_2\|\varphi_x+\psi\|^2\leq\frac{c}{\varepsilon_2}\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}+\varepsilon_2\|\varphi_x+\psi\|^2.$$

- Para quarta parcela, tem-se

$$J_4\leq c\|f^4\|\|\varphi_x+\psi\|\leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

- Na quinta parcela, veja que

$$J_5\leq c\|f_x^3\|\|\Phi\|\leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

- Na sexta parcela, veja que

$$J_6\leq c\|\psi_x\|\|f^2\|\leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Além disso, por (5.5),

$$\frac{\rho_1}{\kappa}\chi_0(\Psi, \Phi_x) = 0.$$

Logo,

$$\kappa\|\varphi_x + \psi\|^2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + c\varepsilon_1\|\varphi_x + \psi\|^2,$$

isto é,

$$(\kappa - c\varepsilon_1)\|\varphi_x + \psi\|^2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Escolhendo $\varepsilon_1 = \dfrac{\kappa}{2c}$, segue que

$$\frac{\kappa}{2}\|\varphi_x + \psi\|^2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Portanto,

$$\kappa\|\varphi_x + \psi\| \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

□

Lema 5.2. *Se (5.5) ocorre, então existe $c > 0$ tal que*

$$\rho_1\|\Phi\|^2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Demonstração. Tomemos o produto interno em $L^2(0, L)$ de $\varphi + I_\psi$ com $(5.6)_2$, obtendo

$$i\lambda\rho_1(\Phi, \varphi + I_\psi) - \kappa((\varphi_x + \psi)_x, \varphi + I_\psi) = \rho_1(f^2, \varphi + I_\psi).$$

Integrando por partes e utilizando as condições de fronteira de φ e I_ψ, a igualdade acima pode ser reescrita como

$$-\rho_1(\Phi, i\lambda\varphi) - \rho_1(\Phi, i\lambda I_\psi) + \kappa\|\varphi_x + \psi\|^2 = \rho_1(f^2, \varphi + I_\psi).$$

Utilizando as equações $(5.6)_1$ e $(5.6)_3$, tem-se

$$\begin{aligned}\rho_1\|\Phi\|^2 &= -(\Phi, f^1) - \rho_1(\Phi, I_\Psi) - \rho_1(\Phi, I_{f^3}) + \kappa\|\varphi_x + \psi\|^2 - \rho_1(f^2, \varphi + I_\psi).\\ &= \sum_{i=1}^{5} K_i,\end{aligned}$$

onde

$$K_1 := -(\Phi, f^1), \qquad K_2 := -\rho_1(\Phi, I_\Psi), \qquad K_3 := -\rho_1(\Phi, I_{f^3}),$$
$$K_4 := \kappa\|\varphi_x + \psi\|^2, \qquad K_5 := -\rho_1(f^2, \varphi + I_\psi).$$

Agora, vamos majorar cada parcela presente no somatório, aplicando sucessivas vezes, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Poincaré, a desigualdade de Young e a desigualdade da Potência.

- Para primeira parcela, temos que

$$\begin{aligned} K_1^2 &\leq c[\|\Phi\|^2\|f_x^1\|^2] \\ &\leq c[\|\Phi\|^2[\|f_x^1 + f^3\|^2 + \|f_x^3\|]^2] \\ &\leq c\|\Phi\|^2\|f_x^1 + f^3\|^2 + c\|\Phi\|^2\|f_x^3\|^2 \\ &\leq c\|f\|_{\mathscr{H}}^2\|U\|_{\mathscr{H}}^2 \end{aligned}$$

  Logo,

$$K_1 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

- Na segunda parcela, veja que

$$K_2 \leq \rho_1\|\Phi\|\|I_\Psi\| \leq c\|\Phi\|\|\Psi\| \leq \frac{c}{\varepsilon_1}\|\Psi\|^2 + \varepsilon_1\|\Phi\|^2 \leq \frac{c}{\varepsilon_1}\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + \varepsilon_1\|\Phi\|^2.$$

- A terceira parcela pode ser majorada da seguinte forma

$$K_3 \leq \rho_1\|\Phi\|\|I_{f_3}\| \leq c\|\Phi\|\|f_x^3\| \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

- A quarta parcela é majorada diretamente do Lema 5.1, pois

$$\kappa\|\varphi_x + \psi\|^2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

- Na quinta parcela, tem-se que

$$K_5 \leq \|f_2\|\|I_\psi\| \leq c\|f_2\|\|\psi_x\| \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Por tudo descrito acima, segue que

$$\rho_1\|\Phi\|^2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}} + \varepsilon_1\|\Phi\|^2,$$

ou ainda,

$$(\rho_1 - \varepsilon_1)\|\Phi\|^2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Escolhendo $\varepsilon_1 = \dfrac{\rho_1}{2}$, temos

$$\frac{\rho_1}{2}\|\Phi\|^2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Portanto,

$$\rho_1\|\Phi\|^2 \leq c\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

□

Lema 5.3. *Existe $c > 0$ tal que*

$$\|U\|_{\mathscr{H}} \leq c\left(\frac{1}{|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}.$$

Demonstração. Segue das desigualdades (5.7) e (5.8) e dos Lemas 5.1 e 5.2, que

$$\begin{aligned}\|U\|^2_{\mathscr{H}} &\leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_2|\lambda|^2}+\frac{1}{|\lambda|}+1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}+c\varepsilon_2\|\varphi_x+\psi\|^2\\ &\leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_2|\lambda|^2}+\frac{1}{|\lambda|}+1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}+c\varepsilon_2\|U\|^2_{\mathscr{H}}.\end{aligned}$$

Daí,

$$(1-c\varepsilon_2)\|U\|^2_{\mathscr{H}}\leq c\left(\frac{1}{\varepsilon_2|\lambda|^2}+\frac{1}{|\lambda|}+1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}.$$

Escolhendo $\varepsilon_2=\dfrac{1}{2c}$ e aplicando a desigualdade de Young com $\varepsilon=1$, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|U\|^2_{\mathscr{H}} &\leq c\left(\frac{1}{|\lambda|^2}+\frac{1}{|\lambda|}+1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}\|U\|_{\mathscr{H}}\\ &\leq c\left(\frac{1}{|\lambda|^2}+\frac{1}{|\lambda|}+1\right)^2\|f\|^2_{\mathscr{H}}+\frac{1}{4}\|U\|^2_{\mathscr{H}},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{4}\|U\|^2_{\mathscr{H}}\leq c\left(\frac{1}{|\lambda|^2}+\frac{1}{|\lambda|}+1\right)^2\|f\|^2_{\mathscr{H}}.$$

Portanto, extraindo a raíz em ambos os lados da desigualdade,

$$\|U\|_{\mathscr{H}}\leq c\left(\frac{1}{|\lambda|^2}+\frac{1}{|\lambda|}+1\right)\|f\|_{\mathscr{H}}.$$

□

5.1.2 Prova do Teorema 5.2

Com objetivo de provar o Teorema 5.2, mostraremos que as hipóteses do Teorema de Gearhart-Pruss 2.3 são satisfeitas.

Suponhamos, por contradição, a existência de $\lambda_*\in\mathbb{R}$ tal que $i\lambda_*\notin\rho(A_\beta)$. Pelo Teorema 2.4

$$i\lambda_*\in i\mathbb{R}\cap\sigma(A_\beta)=i\mathbb{R}\cap\sigma_{ap}(A_\beta).$$

Logo, existe $U_n=(\varphi_n,\Phi_n,\psi,\Psi_n)\in D(A)$ tal que $\|U_n\|_{\mathscr{H}}=1$, para todo $n\in\mathbb{N}$ e

$$f_n=i\lambda_*U_n-A_\beta U_n\to 0\quad\text{em }\mathscr{H}. \tag{5.10}$$

Escrevendo $f_n=(f_n^1,f_n^2,f_n^3,f_n^4)$, (5.10) pode ser expressa por

$$\begin{cases} f_n^1=i\lambda_*\varphi_n-\Phi_n\ \to 0\quad\text{em } H_0^1(0,L)\\ f_n^2=i\lambda_*\rho_1\Phi_n-\kappa(\varphi_{nx}+\psi_n)_x\ \to 0\quad\text{em } L^2(0,L)\\ f_n^3=i\lambda_*\psi_n-\Psi_n\ \to 0\quad\text{em } H_*^1(0,L)\\ f_n^4=i\lambda_*\rho_2\Psi_n-b\psi_{xx}+\kappa(\varphi_{nx}+\psi_n)+\beta\Psi_n\ \to 0\quad\text{em } L_*^2(0,L)\end{cases} \tag{5.11}$$

Agora, vamos dividir a prova em dois casos:

Caso 1: $\lambda_* = 0$. Nessa suposição, segue diretamente das igualdades $(5.11)_1$ e $(5.11)_3$ que

$$\Phi_n \to 0 \quad \text{em } H_0^1(0,L) \quad \text{e} \quad \Psi_n \to 0 \quad \text{em } H_*^1(0,L). \tag{5.12}$$

Por outro lado, calculando o produto interno em $L^2(0,L)$ de φ_n com $(5.11)_2$, tem-se

$$-\kappa((\varphi_{nx}+\psi_n)_x, \varphi_n) = (f_n^2, \varphi_n),$$

que também pode ser vista como

$$\kappa(\varphi_{nx}+\psi_n, \varphi_{nx}) = (f_n^2, \varphi_n). \tag{5.13}$$

Ademais, tomando o produto interno em $L^2(0,L)$ de ψ_n com $(5.11)_4$, teremos

$$-b(\psi_{nxx}, \psi_n) + \kappa(\varphi_{nx}+\psi_n, \psi_n) + \beta(\Psi_n, \psi_n) = \rho_2(f_n^4, \psi_n),$$

ou ainda,

$$b\|\psi_{nx}\|^2 + \kappa(\varphi_{nx}+\psi_n, \psi_n) = \rho_2(f_n^4, \psi_n) - \beta(\Psi_n, \psi_n). \tag{5.14}$$

Somando as equações (5.13) e (5.14), utilizando a desigualdade triangular e desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\begin{aligned} b\|\psi_x\|^2 + \kappa\|\varphi_{nx}+\psi_n\|^2 &\leq |(f_n^2, \varphi_n)| + |\rho_2(f_n^4, \psi_n)| + \beta|(\Psi_n, \psi_n)| \\ &\leq \|f_n^2\|\|\varphi_n\| + \rho_2\|f_n^4\|\|\psi_n\| + \beta\|\Psi_n\|\|\psi_n\|. \end{aligned}$$

Das convergências $(5.11)_2$, $(5.11)_4$, (5.12) , e da limitação de U_n, segue que

$$b\|\psi_x\|^2 + \kappa\|\varphi_x + \psi\|^2 \to 0.$$

Logo, $\|U_n\|_{\mathscr{H}} \to 0$, contradizendo o fato de $\|U_n\|_{\mathscr{H}} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso 2: $\lambda_* \neq 0$. Como $\lambda_* \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f_n \in \mathscr{H}$ e $U_n \in D(A_\beta)$ é uma solução de (5.11), temos pelo Lema5.3

$$\|U_n\|_{\mathscr{H}} \leq c\left(\frac{1}{|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + 1\right)\|f_n\|_{\mathscr{H}} \to 0,$$

o que contradiz o fato de $\|U_n\|_{\mathscr{H}} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, em ambos os casos é gerado uma contradição. Portanto, $i\mathbb{R} \in \rho(A_\beta)$.

Agora, afirmamos que

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \|(i\lambda I - A_\beta)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} < \infty.$$

De fato, seja $f \in \mathscr{H}$ tal que $\|f\|_{\mathscr{H}} = 1$. Como $i\mathbb{R} \subset \rho(A_\beta)$, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, existe $U \in D(A_\beta)$ tal que

$$i\lambda U - A_\beta U = f.$$

Do Lema 5.3 e do fato de que $U = (i\lambda I - A_\beta)^{-1} f$, temos

$$\|(i\lambda I - A_\beta)^{-1} f\|_{\mathscr{H}} \leq \|U\|_{\mathscr{H}} \leq c\left(\frac{1}{|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + 1\right)\|f\|_{\mathscr{H}} = c\left(\frac{1}{|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + 1\right).$$

Como o lado direito da desigualdade acima não depende de f,

$$\limsup_{|\lambda|\to+\infty} \|(i\lambda I - A_\beta)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} \leq \limsup_{|\lambda|\to+\infty} c\left(\frac{1}{|\lambda|^2} + \frac{1}{|\lambda|} + 1\right) = c < \infty.$$

Portanto, todas as condições do Teorema 2.3 são satisfeitas e, consequentemente, $S(t) = e^{tA_\beta}$ é exponencialmente estável.

Agora, vejamos que, se $\chi_0 \neq 0$, então $S(t) = e^{tA_\beta}$ não é exponencialmente estável. Para tal objetivo, é suficiente exibimos uma sequência de números reais, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{H}$ tais que

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \|(i\lambda - A_\beta)^{-1} f_n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} = +\infty.$$

Lema 5.4. *Se $\chi_0 \neq 0$, então existem $\lambda_n > 0$ e $f_n \in \mathscr{H}$ tais que*

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \|(i\lambda_n - A_\beta)^{-1} f_n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} = +\infty.$$

Demonstração. Seguindo as ideias de Almeida Júnior, Santos e Rivera [3], consideremos $\gamma_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ e

$$\begin{cases} e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\sqrt{\gamma_n}x\right) \\ e_n^*(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\sqrt{\gamma_n}x\right). \end{cases}$$

Denotando $f_n = \left(0, \frac{e_n}{\rho_1}, 0, 0\right) \in \mathscr{H}$ e tomamos a equação resolvente associada a ela, nas variáveis $(\varphi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n)$, isto é,

$$\begin{cases} i\lambda_n\varphi_n - \Phi_n = 0 \\ \rho_1 i\lambda_n\Phi_n - \kappa(\varphi_{nx} + \psi_n)_x = e_n \\ i\lambda_n\psi_n - \Psi_n = 0 \\ \rho_2 i\lambda_n\Psi_n - \psi_{nxx} + \kappa(\varphi_{nx} + \psi_n) + \beta\Psi_n = 0. \end{cases} \tag{5.15}$$

De $(5.15)_1$ e $(5.15)_3$ temos $\Phi_n = i\lambda_n\varphi_n$ e $\Psi_n = i\lambda_n\psi_n$. Daí, segue que

$$\begin{cases} -\rho_1\lambda_n^2\varphi_n - \kappa(\varphi_{nx} + \psi_n)_x + i\alpha\lambda_n\varphi_n = 0 \\ -\rho_2\lambda_n^2\psi_n - b\psi_{nxx} + \kappa(\varphi_{nx} + \psi_n) = e_n^*. \end{cases} \tag{5.16}$$

Queremos soluções da forma $\varphi_n = \tilde{a}e_n$ e $\psi_n = \tilde{b}e_n^*$. Substituindo em (5.16) obtemos

$$\begin{cases} -\rho_1\tilde{a}\lambda_n^2\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\sqrt{\gamma_n}x) + \kappa\tilde{a}\sqrt{\frac{2}{L}}\gamma_n\sin(\sqrt{\gamma_n}x) + \kappa\tilde{b}\sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\gamma_n}\sin(\sqrt{\gamma_n}x) = e_n \\ -\rho_2\tilde{b}\lambda_n^2\sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\sqrt{\gamma_n}x) + b\tilde{b}\sqrt{\frac{2}{L}}\gamma_n\cos(\sqrt{\gamma_n}x) + \kappa\tilde{a}\sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\gamma_n}\sin(\sqrt{\gamma_n}x) \\ \qquad\qquad + \kappa\tilde{b}\sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\sqrt{\gamma_n}x) + i\beta\lambda_n\sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\sqrt{\gamma_n}x) = 0, \end{cases}$$

a qual resulta em

$$\begin{cases} \tilde{a}(-\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n) + \tilde{b}\kappa\sqrt{\gamma_n} = 1 \\ \tilde{a}\kappa\sqrt{\gamma_n} + \tilde{b}(-\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa + i\beta\lambda_n) = 0. \end{cases}$$

Em sua forma matricial, o sistema acima é dado por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n & k\sqrt{\gamma_n} \\ k\sqrt{\gamma_n} & -\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa + i\beta\lambda_n \end{bmatrix}}_{M_n} \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Empregaremos a regra de Cramer para determinar $\tilde{a}$. Inicialmente, tem-se que

$$\begin{aligned} \det[M_n] &= (-\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n)(-\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa + i\beta\lambda_n) - \kappa^2\gamma_n \\ &= (-\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n)(-\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa) - \kappa^2\gamma_n + i\beta\lambda_n(-\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\det\begin{bmatrix} 1 & k\sqrt{\gamma_n} \\ 0 & -\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa + i\beta\lambda_n \end{bmatrix} = -(-\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa + i\beta\lambda_n).$$

Nesse sentido, iremos determinar constantes d_1 e d_2 de tais forma que

$$\begin{cases} d_1 = -\rho_1\lambda_n^2 + k\gamma_n \\ d_2 = (-\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n)(-\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa + \kappa) - \kappa^2\gamma_n \end{cases} \tag{5.17}$$

De $(5.17)_1$ temos

$$\lambda_n^2 = \frac{1}{\rho_1}[\kappa\gamma_n - d_1].$$

Substituindo em $(5.17)_2$, tem-se

$$\begin{aligned} d_2 &= d_1\left(-\frac{\rho_2}{\rho_1}(\kappa\gamma_n - d_1) + \kappa\gamma_n + \kappa\right) - \kappa^2\gamma_n \\ &= \left(\rho_2\underbrace{\left(\frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2}\right)}_{\chi_0}d_1 - \kappa^2\right)\gamma_n - d_1\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \kappa\right). \end{aligned}$$

Queremos d_1 de tal forma que $\rho_2\chi_0 d_1 - \kappa^2 = 0$, ou seja,

$$d_1 = \frac{\kappa^2}{\rho_2\chi_0}.$$

Assim, também obtemos d_2, que é dada por

$$d_2 = -\frac{\kappa^2}{\rho_2\chi_0}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \kappa\right).$$

Então, temos condições de explicitar, para quais $n \in \mathbb{N}$, λ_n é bem definida. De fato,

$$\frac{1}{\rho_1}[\kappa\gamma_n - \frac{\kappa^2}{\rho_2\chi_0}] > 0 \iff n > \frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2\chi_0}}$$

Daí, pela regra de Cramer,

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= \frac{-(-\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa + i\beta\lambda_n)}{(-\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n)(-\rho_2\lambda_n^2 + b\gamma_n + \kappa) - \kappa^2\gamma_n + i\beta\lambda_n(-\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n)} \\ &= \frac{-(-\rho_1\lambda_n^2 + \kappa\gamma_n + \kappa + i\beta\lambda_n)}{d_2 + i\beta d_1\lambda_n}.\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\frac{\tilde{a}}{\lambda_n^2} = \frac{\rho_2\dfrac{\lambda_n^2}{\lambda_n^2} - b\dfrac{\gamma_n}{\lambda_n^2} - \dfrac{\kappa}{\lambda_n^2} - i\beta\dfrac{\lambda_n}{\lambda_n^2}}{\dfrac{d_2}{\lambda_n^2} + i\beta d_1\dfrac{\lambda_n}{\lambda_n^2}}.$$

Observamos que o denominador tende a zero, enquanto o numerador tende a uma constante, pois, quando $n \to +\infty$,

$$b\frac{\gamma_n}{\lambda_n^2} = \frac{b\gamma_n}{\dfrac{1}{\rho_1}\left[\kappa\gamma_n - \dfrac{\kappa^2}{\rho_2\chi_0}\right]} = \frac{b}{\dfrac{\kappa}{\rho_1} - \dfrac{\kappa^2}{\rho_1\rho_2\chi_0\gamma_n}} \to \frac{\rho_1 b}{\kappa}.$$

Dessa forma,

$$\frac{\tilde{a}}{\lambda_n^2} \to +\infty, \quad \text{quando } n \to +\infty.$$

Como consequência, $\tilde{a} \to +\infty$, pois caso contrário, $\tilde{a}/\lambda_n^2 \to 0$, haja vista que $\lambda_n \to +\infty$, quando $n \to +\infty$. Daí,

$$\|\Phi_n\|^2 = \int_0^L |i\lambda_n\varphi_n(x)|^2 dx = \int_0^L \left(\lambda_n\tilde{a}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)^2 dx = \frac{\lambda_n^2\tilde{a}^2 L}{2} \to +\infty, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Portanto,

$$\|(i\lambda_n I - A)^{-1} f_n\|_{\mathscr{H}}^2 \geq \rho_1\|\Phi_n\|^2 \to \infty.$$

□

A Cálculos motivadores

Neste apêndice apresentaremos cálculos, possivelmente informais, que motivaram definir certas igualdades presentes no trabalho.

A.1 Encontrando o espaço de fase

Calculando o produto interno em $L^2(0,L)$ de $(3.1)_1$ com φ_t obtemos

$$\underbrace{\rho_1(\varphi_{tt},\varphi_t)}_{:=I_1} - \underbrace{\kappa((\varphi_x-\psi)_x,\varphi_t)}_{:=I_2} + \underbrace{\alpha(\varphi_t,\varphi_t)}_{:=I_3} = 0. \tag{A.1}$$

Observe que

- Pela regra do produto para derivadas

$$I_1 = \rho_1(\varphi_{tt},\varphi_t) = \frac{\rho_1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varphi_t\|^2.$$

- Da integração por partes, tem-se que

$$\begin{aligned} I_2 &= -\kappa((\varphi_x+\psi)_x,\varphi_t) = -k\left[\varphi_t(\varphi_x+\psi)|_0^L - (\varphi_x+\psi,\varphi_{tx})\right] \\ &= \kappa(\varphi_x+\psi,\varphi_{tx}). \end{aligned}$$

- Na terceira parcela, temos

$$I_3 = \alpha(\varphi_t,\varphi_t) = \alpha\|\varphi_t\|^2.$$

Dessa forma, a equação (A.1) pode ser reescrita como

$$\frac{\rho_1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varphi_t\|^2 + \kappa(\varphi_x+\psi,\varphi_{tx}) + \alpha\|\varphi_t\|^2 = 0. \tag{A.2}$$

Ademais, tomando o produto interno em $L^2(0,L)$ de $(3.1)_2$ com ψ_t, segue que

$$\underbrace{\rho_2(\psi_{tt},\psi_t)}_{:=J_1} - \underbrace{b(\psi_{xx}\psi_t)}_{:=J_2} + \underbrace{\kappa(\varphi_x+\psi,\psi_t)}_{:=J_3} + \underbrace{\beta(\psi_t,\psi_t)}_{:=J_4} = 0. \tag{A.3}$$

Agora, observe que

- Para primeira parcela, veja que

$$J_1 = \rho_2(\psi_{tt},\psi_t) = \frac{\rho_2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi_t\|^2.$$

- Integrando por partes e utilizando a regra do produto para derivadas, temos que

$$J_2 = -b(\psi_{xx}, \psi_t) = -b\left[\psi_x\psi_t|_0^L - (\psi_x, \psi_t x)\right] = b(\psi_x, \psi_{tx}) = \frac{b}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi_x\|^2.$$

- Manteremos a parcela J_3.

- Na quarta parcela, tem-se

$$J_4 = \beta(\psi_t, \psi_t) = \beta\|\psi_t\|^2.$$

Daí, a equação (A.3) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\rho_2\|\psi_t\|^2 + b\|\psi_x\|^2\right\} + \kappa(\varphi_x + \psi, \psi_t) + \beta\|\psi_t\|^2 = 0. \tag{A.4}$$

Somando as equações (A.2) e (A.4) e observando que

$$\kappa(\varphi_x + \psi, \varphi_{tx}) + \kappa(\varphi_x + \psi, \psi_t) \quad = \quad \kappa(\varphi_x + \psi, (\varphi_x + \psi)_t) = \frac{\kappa}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varphi_x + \psi\|^2$$

obtém-se a igualdade

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\rho_1\|\varphi_t\|^2 + \rho_2\|\psi_t\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \kappa\|\varphi_x + \psi\|\right\} = -\alpha\|\varphi_t\|^2 - \beta\|\psi_t\|^2. \tag{A.5}$$

Integrando(A.5) em $(0, t)$ temos

$$\begin{aligned}\rho_1\|\varphi_t(t)\|^2 + \rho_2\|\psi_t(t)\|^2 + b\|\psi_x(t)\|^2 + \kappa\|(\varphi_x + \psi)(t)\| \\ = \rho_1\|\varphi_t(0)\|^2 + \rho_2\|\psi_t(0)\|^2 + b\|\psi_x(0)\|^2 + \kappa\|(\varphi_x + \psi)(0)\| \\ - \alpha\int_0^t \|\varphi_t(s)\|^2\,ds - \beta\int_0^t \|\psi_t(s)\|^2\,ds.\end{aligned} \tag{A.6}$$

A igualdade (A.6) nos motiva a utilizamos o seguinte espaço de fase:

$$\mathscr{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1 \times L_*^2(0, L)$$

munido do produto interno

$$(U, U')_{\mathscr{H}} \quad = \quad \rho_1(\Phi, \Phi') + \rho_2(\Psi, \Psi') + b(\psi_x, \psi_x') + \kappa(\varphi_x + \psi, \varphi_x' + \psi'),$$

e norma

$$\|U\|_{\mathscr{H}}^2 = \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \kappa\|\varphi_x + \psi\|^2,$$

em que $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi)$, $U' = (\varphi', \Phi', \psi', \Psi') \in \mathscr{H}$.

A.2 Definindo a forma sesquilinear e o funcional anti-linear

Agora vemos a motivação para definir a forma sesquilinear (3.7) e o funcional antilinear (3.8).

Seja $f = (f^1, f^2, f^3, f^4)^T \in \mathscr{H}$ e $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi)^T \in D(A)$ tal que

$$(I - A)U = f$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \Phi \\ \psi \\ \Psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{1}{\rho_1}[\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \alpha\Phi] \\ \Psi \\ \frac{1}{\rho_2}[b\psi_{xx} - \kappa(\varphi_x + \psi) - \beta\Psi] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \end{pmatrix}.$$

Pela soma e igualdade de matrizes, obtém-se

$$\begin{cases} \varphi - \Phi = f^1 \\ \rho_1\Phi - \kappa(\varphi_x + \psi)_x - \alpha\Phi = \rho_1 f^2 \\ \psi - \Psi = f^3 \\ \rho_2\Psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta\Psi = \rho_2 f^4. \end{cases} \tag{A.7}$$

Pelas igualdades $(A.7)_1$ e $(A.7)_3$ temos $\Phi = \varphi - f^1$ e $\Psi = \psi - f^3$. Substituindo em $(A.7)_2$ e $(A.7)_4$ segue

$$\begin{cases} (\rho_1 + \alpha)\varphi - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = (\rho_1 + \alpha)f^1 + \rho_1 f^2 \\ (\rho_2 + \beta)\psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = (\rho_2 + \beta)f^3 + \rho_2 f^4 \end{cases} \tag{A.8}$$

Calculando o produto interno em $L^2(0, L)$ de $(A.8)_1$ com $\tilde{\varphi} \in H_0^1(0, L)$, temos

$$(\rho_1 + \alpha)(\varphi, \tilde{\varphi}) - \kappa((\varphi_x + \psi)_x, \tilde{\varphi}) \quad = \quad (\rho_1 + \alpha)(f^1, \tilde{\varphi}) + \rho_1(f^2, \tilde{\varphi}).$$

Integrando por partes

$$(\rho_1 + \alpha)(\varphi, \tilde{\varphi}) - \kappa[(\varphi_x + \psi)\tilde{\varphi}|_0^L - ((\varphi_x + \psi), \tilde{\varphi}_x)] \quad = \quad (\rho_1 + \alpha)(f^1, \tilde{\varphi}) + \rho_1(f^2, \tilde{\varphi}).$$

Portanto, tem-se

$$(\rho_1 + \alpha)(\varphi, \tilde{\varphi}) + \kappa((\varphi_x + \psi), \tilde{\varphi}_x) = (\rho_1 + \alpha)(f^1, \tilde{\varphi}) + \rho_1(f^2, \tilde{\varphi}). \tag{A.9}$$

Por outro lado, calculando o produto interno em $L^2(0, L)$ de $(A.8)_2$ com $\tilde{\psi} \in H_*^1(0, L)$ teremos

$$(\rho_2 + \beta)(\psi, \tilde{\psi}) - b(\psi_{xx}, \tilde{\psi}) + \kappa(\varphi_x + \psi, \tilde{\psi}) = (\rho_2 + \beta)(f^3, \tilde{\psi}) + \rho_2(f^4, \tilde{\psi}).$$

Integrando por partes e utilizando as condições do domínio, obtemos

$$(\rho_2 + \beta)(\psi, \tilde{\psi}) - b\left[\psi_x\tilde{\psi}|_0^L - (\psi_x, \tilde{\psi}_x)\right] + \kappa(\varphi_x + \psi, \tilde{\psi}) = (\rho_2 + \beta)(f^3, \tilde{\psi}) + \rho_2(f^4, \tilde{\psi}).$$

Desse modo, tem-se a equação

$$(\rho_2+\beta)(\psi,\tilde{\psi})+b(\psi_x,\tilde{\psi}_x)+\kappa(\varphi_x+\psi,\tilde{\psi})=(\rho_2+\beta)(f^3,\tilde{\psi})+\rho_2(f^4,\tilde{\psi}). \tag{A.10}$$

Somando as equações (A.9) e (A.10), obtemos a igualdade

$$\Gamma((\varphi,\psi),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}))=F(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}),$$

em que

$$\Gamma((\varphi,\psi),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}))=(\rho_1+\alpha)(\varphi,\tilde{\varphi})+(\rho_2+\beta)(\psi,\tilde{\psi})+b(\psi_x,\tilde{\psi}_x)+\kappa(\varphi_x+\psi,\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi})$$

e

$$F(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})=(\rho_1+\alpha)(f^1,\tilde{\varphi})+\rho_1(f^2,\tilde{\varphi})+(\rho_2+\beta)(f^3,\tilde{\psi})+\rho_2(f^4,\tilde{\psi}).$$

Referências

1 TIMOSHENKO, S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Phil Mag Ser*, v. 41, p. 744–764, 1921.

2 TAVARES, T. S. Sobre a estabilidade exponencial de soluções de sistemas Timoshenko-Boltzmann-Fourier. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2022.

3 JÚNIOR, D. A.; SANTOS, M.; RIVERA, J. M. Stability to weakly dissipative Timoshenko systems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 36, n. 14, p. 1965–1976, 2013.

4 RIVERA, J. E. M.; RACKE, R. Global stability for damped Timoshenko systems. 2002.

5 BRITO, M. d. J. S. Estabilidade assintótica de sistemas fracamente dissipativos de Timoshenko.

6 SOUFYANE, A. Stabilisation de la poutre de Timoshenko. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, Elsevier, v. 328, n. 8, p. 731–734, 1999.

7 KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991. v. 17.

8 ODEN, J. T.; DEMKOWICZ, L. *Applied functional analysis*. [S.l.]: CRC press, 2017.

9 BREZIS, H.; BRÉZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. [S.l.]: Springer, 2011. v. 2.

10 PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 44.

11 ZHENG, S. *Nonlinear evolution equations*. [S.l.]: CRC Press, 2004.

12 GEARHART, L. Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert space. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 236, p. 385–394, 1978.

13 PRÜSS, J. On the spectrum of c_0-semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 284, n. 2, p. 847–857, 1984.

14 CONTI, M.; DELL'ORO, F.; PATA, V. Some unexplored questions arising in linear viscoelasticity. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, v. 282, n. 10, p. 109422, 2022.

15 ARENDT, W.; BATTY, C. J. Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 306, n. 2, p. 837–852, 1988.

16 HOFFMAN, K. *Linear algebra*. [S.l.: s.n.], 1971.

17 EVANS, L. C. *Partial differential equations*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2022. v. 19.

18 LIMA, E. L. *Curso de análise, volume 2-IMPA*. [S.l.]: CNPQ, 2000.