UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANA MARIA CORRÊA DOS SANTOS
FÉLIX JÚNIOR PANTOJA DE SOUSA

# MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA ESTIMAR A ÁREA E O VOLUME DE UM SÓLIDO DE REVOLUÇÃO

ABAETETUBA-PA
2025

ANA MARIA CORRÊA DOS SANTOS
FÉLIX JÚNIOR PANTOJA DE SOUSA

# MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA ESTIMAR A ÁREA E O VOLUME DE UM SÓLIDO DE REVOLUÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso, em formato de artigo, apresentado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia do Campus Universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará como requisito obrigatório para obtenção do grau de Licenciados em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Genivaldo dos Passos Corrêa

ABAETETUBA-PA
2025

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD**
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará**
**Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

S237m Santos, Ana Maria Corrêa dos.
Modelagem Matemática : uma proposta de atividade para estimar a área e o volume de um sólido de revolução / Ana Maria Corrêa dos Santos, Félix Júnior Pantoja De Sousa. — 2025.
28 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Genivaldo dos Passos Corrêa
Trabalho de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de Matemática, Abaetetuba, 2025.

1. Ensino e aprendizagem. 2. Modelagem matemática. 3. Geogebra. I. Sousa, Félix Júnior Pantoja De. II. Título.

CDD 370

ANA MARIA CORRÊA DOS SANTOS
FÉLIX JÚNIOR PANTOJA DE SOUSA

**MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA ESTIMAR A ÁREA E O VOLUME DE UM SÓLIDO DE REVOLUÇÃO**

Este trabalho de conclusão de curso foi julgado e aprovado, de forma online, pelo corpo docente da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba.

Aprovado em: 17/11/2025.

**BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr. Genivaldo dos Passos Corrêa (Orientador)
Orientador – FACET/UFPA

Prof. Dr. Rômulo Corrêa Lima
Membro interno – FACET/UFPA

Prof. Msc. Márcio José Silva
Membro externo – UEPA

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me guiado e sustentado até aqui, pois este trabalho é fruto de muito esforço e dedicação, mas também de muita colaboração e apoio de todos que me ajudaram a superar os desafios e a alcançar este objetivo. Agradeço aos professores do curso de Matemática da UFPA. Em especial, ao meu orientador, Genivaldo Corrêa dos Passos, pela sua sabedoria e paciência, e a minha família pelo amor e incentivo constantes. Quero expressar minha gratidão a minha mãe (in memoria), Anselma Corrêa dos Santos, pois foi quem muito me incentivou na vida acadêmica e ao meu esposo, Neemias Pinheiro dos Santos, e filhos, Amanda e Andrey Nahum, que foram e são o meu porto seguro. Também externo minha gratidão ao meu amigo e colega Félix Júnior pelo apoio e parceria desde o início do curso e aos demais colegas de curso em nome da minha querida amiga Maria Janaina que muito me motivou a prosseguir.

# AGRADECIMENTOS

A Deus por estar comigo sempre e por dar-me forças para vencer os obstáculos da vida.

À minha família pelo incentivo à realização de mais essa conquista profissional. Em especial, à Maria das Graças, minha mãe, que ao longo desse percurso nos deixou para morar no céu. E a meu pai, Félix Lagos, que todos os dias me ensina a ser um homem melhor.

Ao nosso orientador Prof. Genivaldo dos Passos Corrêa pelas sugestões, críticas, paciência e confiança.

Aos demais professores do curso de Matemática/ Campus – Abaetetuba pelos ensinamentos que muito contribuíram para a minha formação. Em espacial aos professores Dr. Manoel Lima, Dr. Manoel Jeremias, Dr. Sebastião Martins, Drª. Suellen Cristina, Drª. Laila Conceição e Msc. Lídia Sarges.

Aos colegas de classe pela amizade, compartilhamento de experiências e conhecimento. Em especial à minha parceira de trabalho Ana Maria. Sem ela quiçá não estivesse finalizando mais essa etapa da minha vida. Ao Marcelo Braga, um grande amigo de curso, que muito me desafiou com problemas matemáticos interessantes.

Por fim, estendo meus agradecimentos a todas pessoas que, direta ou indiretamente, incentivaram-me a não desistir ao longo do curso.

# MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA ESTIMAR A ÁREA E O VOLUME DE UM SÓLIDO DE REVOLUÇÃO

Félix Júnior Pantoja de Sousa [1]
Ana Maria Corrêa dos Santos [2]
Genivaldo dos Passos Corrêa[3]

**RESUMO:** A Matemática é uma ciência essencial no mundo contemporâneo, contribuindo para a pesquisa e o desenvolvimento de novas tecnologias em diversas áreas do conhecimento. Contudo, o ensino dessa disciplina nos níveis básico e superior ainda apresenta uma série de obstáculos. Entre os fatores que contribuem para isto está o excesso de abstração em sua apresentação e a falta de conexão com a realidade dos educandos. Diante disso, a Modelagem Matemática pode contribuir para a melhoria do ensino dessa disciplina, uma vez que desenvolve o pensamento crítico, o raciocínio lógico e coloca os estudantes como sujeitos ativos dentro do processo de ensino e aprendizagem. Este trabalho tem como objetivo propor uma atividade de modelagem sobre os conteúdos área e volume de sólidos geométricos de revolução, usando o software Geogebra. Metodologicamente, a proposta seguirá as etapas de Modelagem Matemática de Dionísio Burak (1992, 2008, 2024) e será destinada a docentes e discentes do curso de Matemática, e áreas afins, que buscam uma aplicação dos resultados teóricos do Cálculo Integral. Este estudo teórico pode vir a contribuir para desmistificar a matemática como uma disciplina difícil e orientar os professores a buscarem contextualizar a disciplina de Cálculo Integral à realidade dos estudantes, oportunizando a troca de conhecimento e experiências dos estudantes entre si e com o professor. O método utilizado na modelagem deve ser analisado à luz de sua funcionalidade e aplicabilidade, entendendo as vantagens e desvantagens de sua utilização no cálculo de área e volume de um sólido de revolução.

**PALAVRAS-CHAVE:** Ensino e Aprendizagem, Modelagem Matemática, Geogebra

**ABSTRACT:** Mathematics is an essential science in the contemporary world, contributing to research and the development of new technologies in various fields. However, teaching this discipline at both primary and higher education levels still presents a number of obstacles. Contributing factors include excessive abstraction in its presentation and a lack of connection with the students' realities. Therefore, Mathematical Modeling can contribute to improving the teaching of this subject, since it develops critical thinking, logical reasoning and places students as active subjects within the teaching and learning process. This work aims to propose a modeling activity on the contents of area and volume of geometric solids of revolution, using the Geogebra software. Methodologically, the proposal will follow the mathematical modeling steps according to Dionísio Burak (1992, 2008, 2024) and will be aimed at teachers and students of mathematics courses, and related areas, who seek an application of the theoretical results of Integral Calculus. This theoretical study may contribute to demystifying mathematics as a difficult subject and guide teachers to contextualize the subject of Integral Calculus to the reality of students, providing opportunities for the exchange of knowledge and experiences among students and with the teacher. The method used in the modeling should be analyzed in light of its functionality and applicability, understanding the advantages and disadvantages of its use in calculating the area and volume of a solid of revolution.

**KEYWORDS:** Teaching and Learning, Mathematical Modeling, Geogebra

[1]Graduando em Licenciatura em Matemática, Campus Universitário de Abaetetuba/UFPA. E-mail: felixjuniormecanica@gmail.com;
[2]Graduanda em Licenciatura em Matemática, Campus Universitário de Abaetetuba/UFPA. E-mail: ana.correa.santos@abaetetuba.ufpa.br;
[3]Doutor em Matemática, Campus Universitário de Abaetetuba/UFPA. E-mail: genivaldo@ufpa.br

# 1. INTRODUÇÃO

A Matemática é uma das ciências mais importante da atualidade. Ela contribui sobre maneira para a pesquisa e o desenvolvimento de novas tecnologias em todo o mundo. Por tamanha relevância, essa disciplina faz parte do currículo básico e superior de muitas instituições de ensino. Ao longo do tempo, o ensino da Matemática sofreu diversas mudanças na forma de ensinar e aprender.

Atualmente, de acordo com Lima e Burak (2024), essa disciplina ainda é percebida como difícil por muitos estudantes, o que ocasiona uma compreensão limitada dos conceitos matemáticos estudados e a falta de interesse. Para os autores isso acontece pela apresentação excessivamente formalizada da disciplina e pela falta de conexão com a realidade dos estudantes.

Diante desse cenário, faz-se necessário a inserção de novas metodologias no processo de ensino e aprendizagem da matemática, as quais devem colocar o aluno como autor da construção de seu conhecimento. Dentro dessa linha, a Modelagem Matemática, como tendência pedagógica, convida os estudantes a serem sujeitos ativos dentro do processo de ensino, ao mesmo tempo desenvolve habilidades essenciais como o pensamento crítico e o raciocínio lógico para a resolução de problemas (Lima e Burak, 2024).

Assim, este trabalho tem como objetivo propor uma atividade de modelagem sobre os assuntos área e volume de sólidos geométricos de revolução, utilizando o *software* Geogebra. Tal proposta seguirá as etapas de Modelagem Matemática de Dionísio Burak (1992, 2008, 2024) e será destinada a docentes e discentes do curso de Matemática, e áreas afins, que buscam uma aplicação dos resultados teóricos do Cálculo Integral.

# 2. REFERENCIAL TEÓRICO

## 2.1 Modelagem Matemática no Brasil: os precursores

Na primeira metade do século XX, nos cursos de Ciências Exatas, empregava-se o termo "Modelagem Matemática" ao processo de descrever, formular, modelar e resolver problema de alguma área do conhecimento. A partir 1950 esse termo também passa a ser empregado na Educação Matemática mundial, com destaque para o processo de ensino e aprendizagem.

No Brasil, ao menos três pesquisadores são considerados os precursores da Modelagem Matemática no país: Aristides Camargos Barreto, Ubiratan D' Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi (Biembengut, 2009; Silva, 2022; Neves, 2023). No final dos anos 70 e início dos anos 80 esses professores impulsionaram e consolidaram a Modelagem Matemática como metodologia de ensino. Suas experiências com a modelagem em sala de aula, ao serem divulgados em eventos, palestras e seminários, inspiraram professores de vários estados brasileiros a também utilizar essa estratégia de ensino em suas aulas e a pesquisar sobre a temática a partir de novos entendimentos.

## 2.2 Modelagem Matemática no Ensino de Matemática

No livro *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*, de Rodney C. Bassanezi, Ubiratan D' Ambrósio, ao escrever o prefácio da obra, afirma que as escolas brasileiras nos últimos séculos foram dominadas por ideias de um ensino teórico e abstrato, no qual a teoria é exposta sem nenhuma relação direta com fatos da realidade vivenciada pelos alunos. E ao analisar as causas disso, acrescenta que "a realidade é muita complexa" o que intimida professores e alunos, limitando sua abordagem no ensino. Segundo ele, essa situação está presente no ensino da matemática nos níveis básico (fundamental e médio) e superior (Bassanezi, 2002).

Diante desse cenário, faz-se necessário mudanças na forma de ensinar e aprender matemática. Essas novas maneiras devem colocar o aluno como autor da construção de seu conhecimento e a aprendizagem deve partir de situações reais vivenciadas pelos estudantes para que se torne significativa. Dentro dessa linha, a Modelagem Matemática pode ser útil, uma vez que essa estratégia de ensino convida os estudantes a serem sujeitos ativos dentro do processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com Bassanezi (2002), a Modelagem Matemática desenvolve competências e habilidades nos estudantes que os tornam sujeitos explorativos, críticos e habilidosos para resolver problemas da vida real. Além disso, os capacita a entender e interpretar a matemática como uma construção humana, ajudando-os a compreender conceitos matemáticos e a valorizar a própria disciplina.

## 2.3 Modelagem Matemática Segundo Dionísio Burak

O professor Dr. Dionísio Burak é um importante pesquisador brasileiro da área de Ensino e Aprendizagem em Matemática. Ao longo de suas pesquisas, Burak elaborou e aperfeiçoou sua compreensão sobre a Modelagem Matemática. Em sua tese, a compreende como um "conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões" (Burak, 1992, p. 62; Lima, Burak, 2024, p.4). Essa concepção de modelagem matemática possui influências das ciências humanas e das teorias de Piaget, Vygotsky e David Ausubel.

Burak considera dois princípios básicos em sua concepção de Modelagem Matemática, a saber: 1) o interesse do grupo; e 2) a obtenção de informações e dados do ambiente, onde se encontra o interesse do grupo. Esses princípios dão significado à aprendizagem e desenvolve a autonomia dos estudantes, tornando-os agentes do processo de ensino-aprendizagem (Klüber, Burak, 2008). Além disso, sugere cinco etapas, não rígidas, para o desenvolvimento com Modelagem Matemática em sala de aula: 1) escolha do tema; 2) pesquisa exploratória; 3) levantamento dos problemas; 4) resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema; e 5) análise crítica das soluções.

Na escolha do tema, o professor sugere aos estudantes temas que possam mobilizar interesse, ou os próprios discentes expressam seus interesses em estudar um determinado conteúdo. Esses temas não precisam estar ligados diretamente à matemática. Além disso, é fundamental nessa etapa que o professor assuma uma postura de mediador, dando os encaminhamentos necessários para a prática da modelagem (Klüber, Burak, 2008).

Na pesquisa exploratória, o professor encaminha os estudantes a buscar informações sobre o tema escolhido. Podem ser consultados, livros, revistas e sites da internet, ou até mesmo realizada uma pesquisa de campo, se for o caso. Nessa etapa, é fundamental verificar se as informações consultadas são verídicas, principalmente aquelas advindas da rede mundial de computadores, pois isso garante a confiabilidade da informação (Lima; Burak, 2024).

Na etapa de levantamento dos problemas, o professor incentiva os estudantes a formular problemas simples ou complexos sobre o tema escolhido – e já pesquisado na etapa anterior – que possam ser compreendidos ou solucionados mediante conhecimento matemático. (Klüber, Burak, 2008).

Na resolução dos problemas e no desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema, busca-se encontrar soluções para os problemas elaborados na etapa anterior mediante auxílio do conteúdo matemático, que pode ser ensinado para responder às perguntas surgidas na pesquisa e no levantamento dos problemas (Klüber, Burak, 2008). Nessa etapa pode ser utilizado modelos matemáticos, se for um dos objetivos determinado na modelagem. Depreende-se modelos matemáticos como sendo um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado.

Na análise crítica das soluções, faz-se uma reflexão das soluções encontradas, observando a sua viabilidade e adequabilidade dentro do contexto de estudo. Essa etapa contribui para a formação de cidadãos críticos e participativos, mediante a tomada de decisões baseadas em evidências (Lima; Burak, 2024).

## 2.4 O Geogebra no Ensino de Matemática

A tecnologia digital está presente na vida de todos os indivíduos. No que tange ao processo de ensino de matemática, a Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC) é vista como potencializadora da aprendizagem, quando articulada e pensada para alcançar objetivos educacionais pré-definidos pelo professor. De acordo Amancio e Sanzovo (2020, p.4):

> O uso das tecnologias em sala de aula é uma importante ferramenta para transformar de forma positiva o ambiente de aprendizagem, por meio da qual é possível desenvolver variadas atividades, investigar diferentes formas de resolução de problemas, debater possíveis resultados, isto é, ele permite que os alunos vivenciem novas experiências e apliquem conceitos matemáticos.

Assim, por meio das TIC's, os professores podem tornar o aprendizado mais dinâmico e motivador, colocando os alunos no centro do processo de ensino, permitindo e incentivando que desenvolvam, investiguem e debatam atividades com o auxílio da tecnologia.

Existem, na atualidade, diversos recursos tecnológicos que podem ser utilizados no Ensino da Matemática, entre eles está o *software* Geogebra. De acordo com Oliveira e Cunha (2021) essa ferramenta foi criada em 2001 por Markus Hohenwarter e uma equipe internacional de programadores, com o intuito de ensinar e aprender matemática. O diferencial desse *software* está na sua gama de funções relacionadas à Geometria e à Álgebra, possibilitando trabalhar nos espaços 2D e 3D, elaborar planilhas e gráficos e realizar cálculos básicos e avançados, tais como o cálculo diferencial. Tudo isso através de uma interface interativa e compreensível.

Segundo Pacheco (2019 *apud* Oliveira; Cunha, 2021, p. 3) o uso do Geogebra dinamiza e enriquece as atividades no processo de ensino e aprendizagem da matemática, pois sendo um *software* de Geometria dinâmica contempla as construções de ponto, vetores, segmentos, retas e seções cônicas. É possível também analisar equações, relacionar variáveis com números e encontrar raízes de funções. Permite ainda associar uma expressão algébrica à representação de um objeto da Geometria.

## 3. METODOLOGIA

Este artigo apresenta uma proposta de atividade que concilia Modelagem Matemática e Geogebra. Metodologicamente, a proposta seguirá as etapas de modelagem de Dionísio Burak (1992, 2008, 2024), e será destinada a docentes e discentes do curso de Matemática, e áreas afins, que buscam uma aplicação dos resultados teóricos do Cálculo Integral. Não se tem a pretensão de criar uma sequência rígida de passos a ser seguida durante a modelagem, visto que as realidades desses sujeitos são diversas. Assim, os professores podem e devem modificar a atividade para que seja viável as suas pretensões/objetivos.

## 4. PROPOSTA DE ATIVIDADE COM MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesta atividade será proposto uma Modelagem Matemática com a finalidade de orientar e incentivar os professores a utilizarem essa tendência pedagógica no ensino de matemática, facilitando a aprendizagem. Será utilizado o *software* Geogebra, uma vez que, além de gratuito, possui as ferramentas necessárias para a modelagem e pode ser acessado pelo computador ou celular, offline ou online. Vale ressaltar que essa atividade não tem uma duração pré-definida, podendo ser realizada e modificada para se enquadrar à realidade e à disponibilidade do professor.

### 4.1 Orientação para a Prática

Como definido, serão seguidas as etapas de Modelagem Matemática de Dionísio Burak (1992, 2008 e 2024), a saber: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema e análise crítica das soluções.

a) Escolha do tema: área e volume de sólido de revolução

O professor sugere o referido tema para a turma e busca informações prévias junto aos estudantes. É importante que o professor assuma a postura de mediador das tarefas e motive os grupos a participar da atividade, para isso podem ser feitos questionamentos sobre o tema, tais como: O que são sólidos de revolução? Existem fórmulas gerais para o cálculo de área e volume de um sólido de revolução? Como se calcula a área e o volume de um sólido de revolução, conhecendo a função f(x) que modela o sólido? Quais os dados necessários para efetivar o cálculo? Dado um sólido de revolução qualquer, é sempre possível encontrar sua área superficial e seu volume?

b) Pesquisa exploratória

Os estudantes podem consultar livros (de Geometria Espacial e de Cálculo Integral), revistas e sites na internet em busca de respostas para os questionamentos feitos na etapa anterior. O professor deve direcionar essas pesquisas para o objetivo de aprendizagem, a fim de que, ao final desta etapa, os estudantes sejam capazes de diferenciar um sólido de revolução de outro que não seja de revolução e compreendam as fórmulas pesquisadas.

Durante as pesquisas, os alunos encontrarão fórmulas básicas de área e volume de sólidos de revolução simples, tais como o cilindro, o cone, o tronco de cone e a esfera. No entanto, deve-se incentivar a busca pelas fórmulas de área e volume que apresentem em sua constituição o cálculo de integral, pois estas são mais gerais, possibilitando fazer esses cálculos conhecendo apenas a função f(x), que, ao ser rotacionada em torno do eixo OX, gera o sólido de revolução.

No livro Cálculo A, de Flemming e Gonçalves (2012, pp. 348, 357), essas fórmulas são apresentadas das seguintes maneiras: *(Definição) Seja C uma curva de equação y = f(x), onde f e f' são funções contínuas em [a, b] e f(x) ≥ 0, ∀ x ∈ [a, b]. A área da superfície de revolução S, gerada pela rotação da curva C ao redor do eixo dos x, é definida por:*

$$A = \lim_{máx\, \Delta x_i \to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\sqrt{1+[f'(d_i)]^2}\, \Delta x_i \qquad (i)$$

*A soma que aparece em (i) não é exatamente uma soma de Riemann da função* $f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}$*, pois aparecem dois pontos distintos* $c_i$ *e* $d_i$*. No entanto, é possível mostrar que o limite em (i) é a integral desta função. Temos, então:*

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx \qquad (1)$$

*(Definição) Seja y = f(x) uma função contínua não negativa em [a, b]. Seja R a região sob o gráfico de f de a até b. O volume do sólido T, gerado pela revolução de R em torno dos x, é definido por:*

$$V = \lim_{máx\, \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(c_i)]^2\, \Delta x_i \qquad (ii)$$

*A soma que aparece em (ii) é uma soma de Riemann da função* $[f(x)]^2$. *Como f é contínua, o limite em (ii) existe, e, então, pela definição da integral definida, temos:*

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \tag{2}$$

Observa-se que, sendo (1) e (2) fórmulas gerais, então, a partir delas é possível deduzir as fórmulas da área e do volume de sólidos de revolução simples (ver essas demonstrações no apêndice A). Note também que essas fórmulas possuem integrais em sua constituição. Isso pode ser um problema, se a função f(x) for difícil de ser estudada. Nesse caso, a solução analítica da integral pode até não existir. Para contornar essa dificuldade, pode-se utilizar o *software* Geogebra para estimar o valor das integrais. O *software* também pode ser usado para encontrar a própria função f(x), por meio de interpolação matemática.

c) Levantamento do problema

Nesta etapa, o professor pode enviar, por meio digital, uma imagem de um sólido de revolução aos estudantes e sugerir que, a partir da imagem, se estime a sua área lateral e o seu volume. Considere, por exemplo, que a imagem fornecida seja a figura 1 a seguir. A partir dela será mostrado o passo a passo para estimar a área lateral (A) e o volume (V).

Figura 1. Imagem de uma garrafa com formato de sólido de revolução.


Fonte: Acervo dos autores, 2025.

d) Resolução do problema e desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema

Passo a passo da resolução do problema:

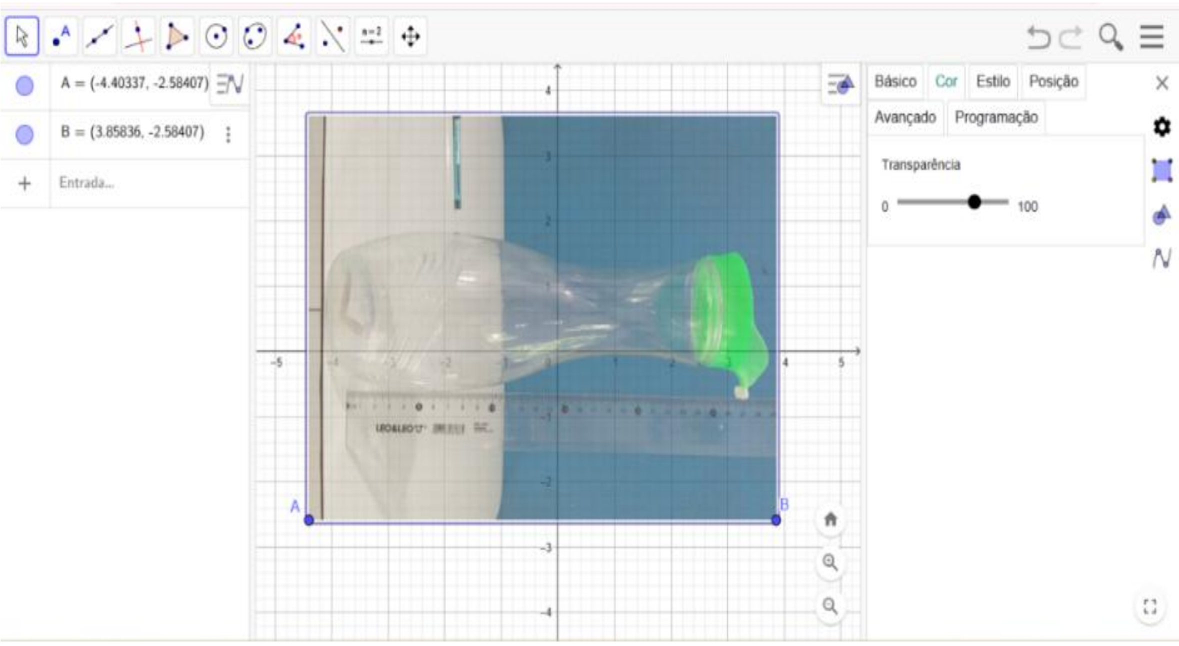
**1º passo:** Iniciar o *software* Geogebra e inserir a figura 1.

Clicar em: **INSERIR IMAGEM** => **NAVEGADOR** => (Escolher a foto) => **ABRIR**.

**2º passo:** Deixar a imagem transparente.

Clicar duas vezes na imagem => **CONFIGURAÇÕES** => **COR =>** (Escolher nível de transparência). A figura 2 mostra a imagem transparente e o ícone **COR** aberto.

Figura 2. Imagem transparente.



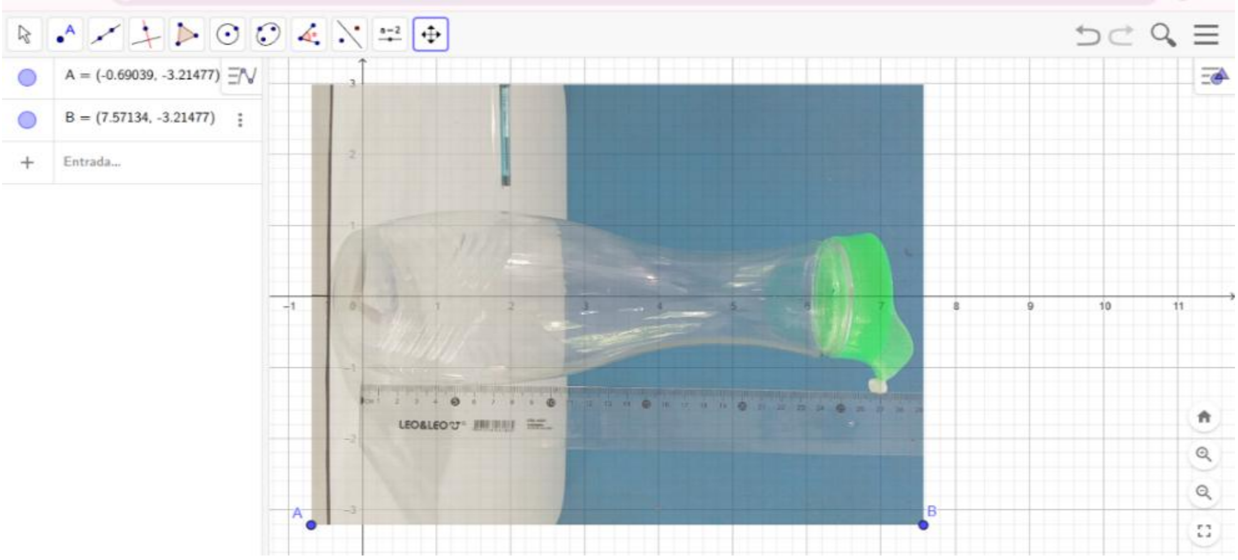

Fonte: Acervo dos autores, 2025.

Obs.: Os pontos A e B localizam a imagem no Geogebra. Eles aparecem de forma automática quando uma imagem é inserida no *software*.

**3º passo:** Centralizar a imagem**.**

Clicar na imagem e arrastá-la. Obs.: A garrafa deve ser centralizada em relação ao eixo OX, de acordo com a figura 3.

Figura 3. Imagem centralizada em relação ao eixo OX.

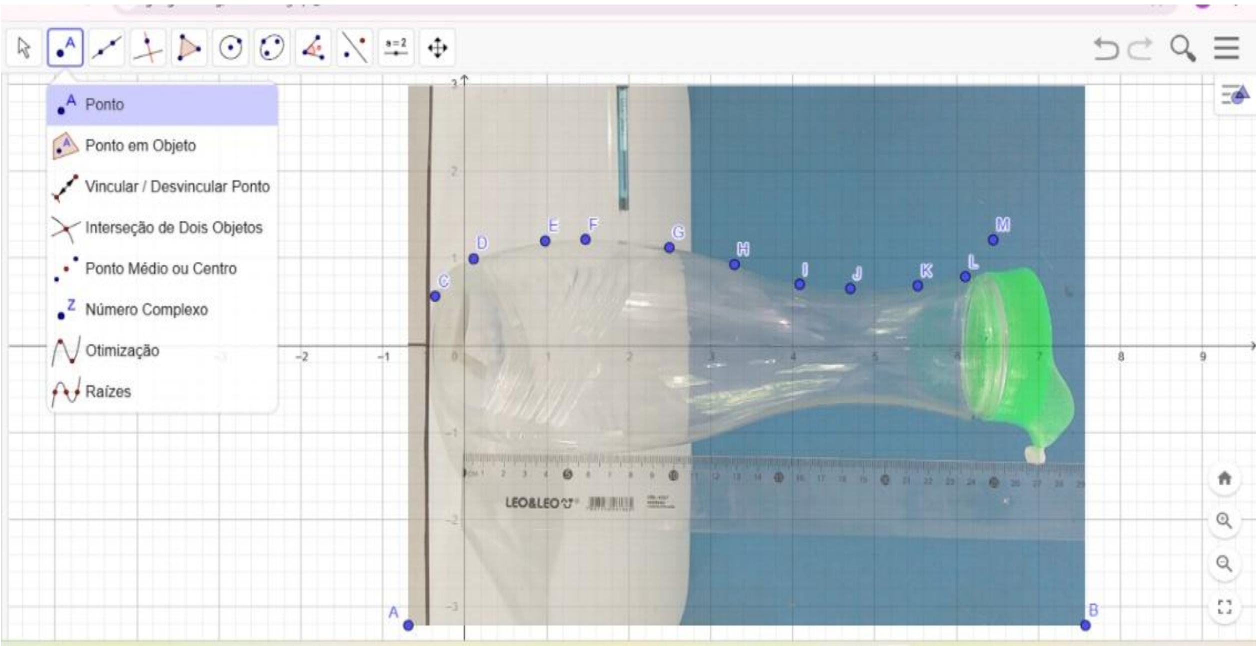



Fonte: Acervo dos autores, 2025.

**4º passo:** Escolher um conjunto de pontos que contorne a imagem.

Ativar a ferramenta **Ponto** e clicar em algumas posições sobre a curva da superfície da garrafa, conforme mostra a figura 4. Obs.: É preferível que, entre os pontos escolhidos, estejam os *pontos de mínimo*, *de máximo* e *de inflexão* da curva, além de alguns pontos fora do contorno da garrafa (no exemplo dado os pontos C e M), isso contribui para que o software plote um polinômio que contorne mais precisamente a curva.

Figura 4. Imagem com os pontos C, D, E, F, G, H, I, J, K e M sobre o contorno superior da garrafa.

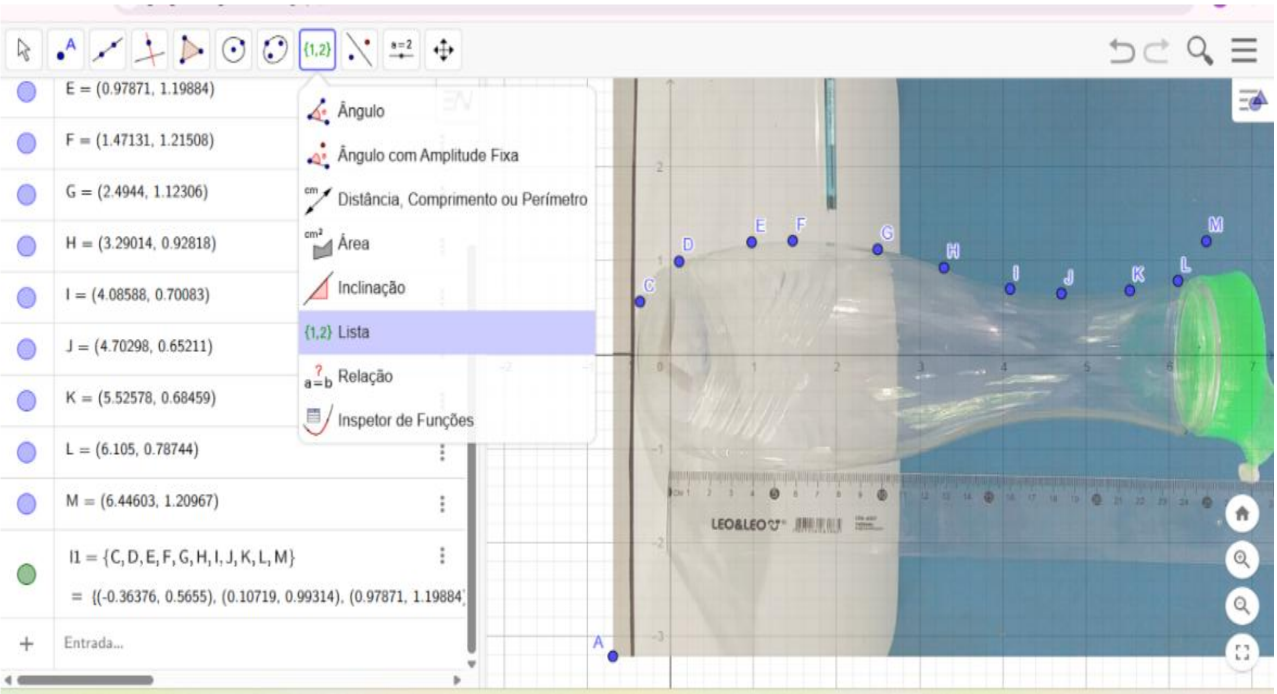



Fonte: Acervo dos autores, 2025.

**5º passo:** Criar lista de pontos.

Selecionar a opção **Lista** (ver figura 5). Em seguida, clicar fora da imagem e selecionar todos os pontos escolhidos no passo anterior. Observe, na figura abaixo, que os pontos A e B não compõem a lista de pontos L**1**, portanto, não terão participação na formação do polinômio interpolador no passo seguinte.

Figura 5. Imagem com a opção Lista em destaque.




Fonte: Acervo dos autores, 2025.

**6º passo:** Encontrar um polinômio f(x) que passa pelos pontos da lista.

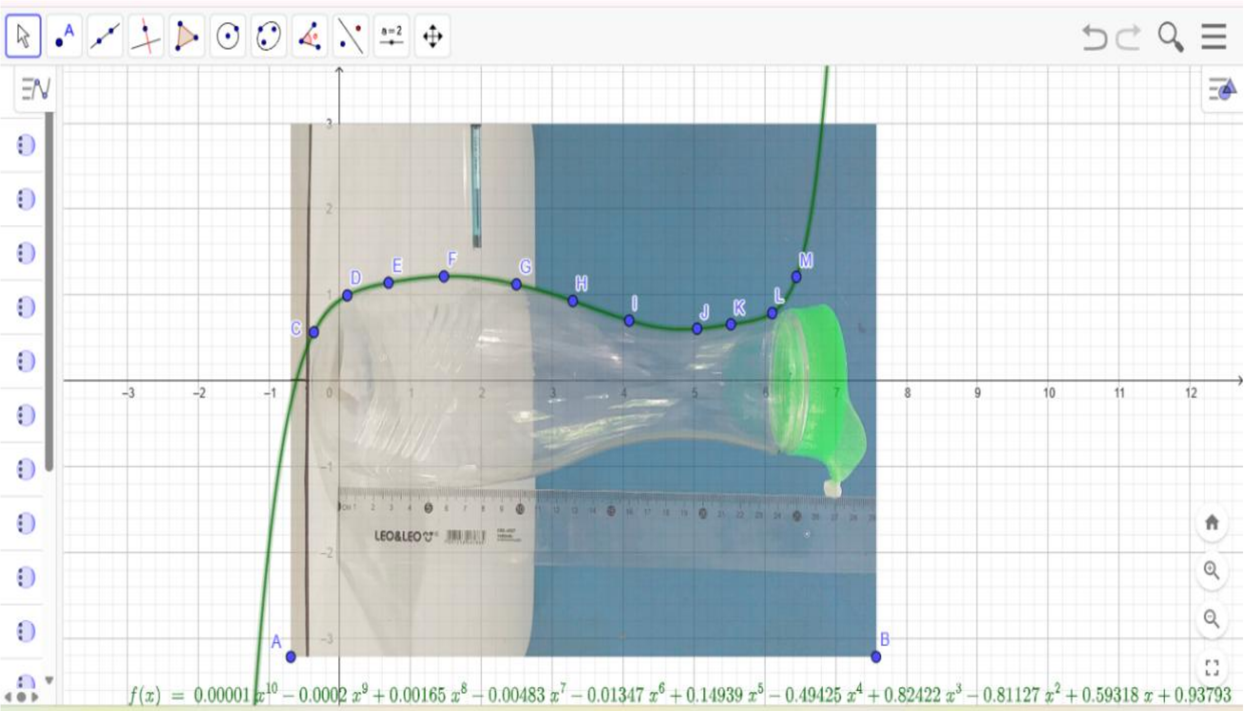
No campo de entrada algébrica, escrever **polinômio** e selecionar a opção **polinômio (Lista de pontos)**. Em seguida, escrever em **Lista de pontos** o nome L**1**.

O Geogebra mostrará um polinômio que passa pelos pontos da lista L**1** e dará a opção de fazer pequenas modificações nas posições desses pontos. Isso possibilitará ajustar o polinômio interpolador ao contorno da superfície da garrafa.

Após os ajustes, a figura 6 mostra o gráfico do *polinômio interpolador* que mais se ajustou à curva:

$f(x) = 0{,}0001x^{10} - 0{,}0002x^9 + 0{,}00165x^8 - 0{,}00483x^7 - 0{,}01347x^6 + 0{,}14939x^5 - 0{,}49425x^4 + 0{,}82422x^3 - 0{,}81127x^2 + 0{,}59318x + 0{,}93793$.

Figura 6. Gráfico do polinômio interpolador f(x) que modela a garrafa.



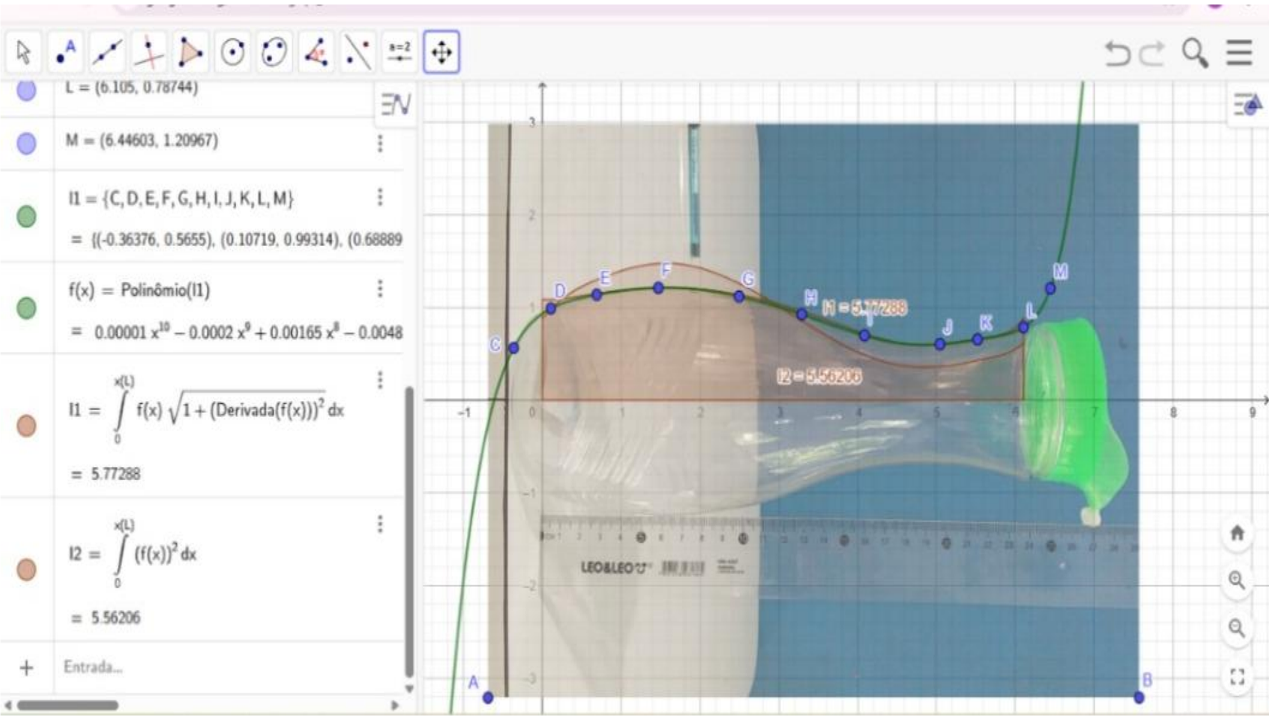

Fonte: Acervo dos autores, 2025.

**7º passo:** Calcular as integrais $I1 = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \quad e \quad I2 = \int_a^b f(x)^2\, dx$, onde f'(x) é a derivada de f(x).

No campo de entrada algébrica, escrever **integral** e selecionar a opção: **Integral (Função, Valor de x inicial, Valor de x final)**.

Em **Função**, escrever: $\boldsymbol{f(x) * \sqrt{1 + [f'(x)]^2}}$. Em **Valor de x inicial**, escrever: **x = 0**. Em **Valor de x final**, escrever: **x(L)**. Repetir o mesmo comando para calcular a integral $\int_a^b f(x)^2\, dx$. A figura 7 mostra os valores das duas integrais com cinco casas decimais.

Figura 7. Imagem do Geogebra exibindo os valores das integrais I1 e I2.



Fonte: Acervo dos autores, 2025.

Obs.: Na figura 7, as regiões marrons representam geometricamente as áreas abaixo dos gráficos das funções $f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ e $f(x)^2$. Os valores destas áreas correspondem numericamente a I1 e I2.

**8º passo:** Estimar a área lateral (A) e o volume da garrafa (V) real.

Pelo princípio da proporcionalidade temos: [...] *em sólidos semelhantes, cujas grandezas lineares tenham razão de semelhança k, as áreas terão razão de semelhança $k^2$ e os volumes terão razão de semelhança* $k^3$ (Dante, 2005, p. 185). Assim, as expressões 3 e 4 abaixo, deduzidas por meio desse princípio, estimam A e V da garrafa real a partir dos dados do Geogebra:

$$A = (2.\pi.\ I1).\ (\frac{H}{h})^2 \quad (3)$$

$$V = (\pi.\ I2).\ (\frac{H}{h})^3 \quad (4)$$

Onde: (2.π. I1) é a área lateral da garrafa no *software* e (π. I2) o seu volume.

π = 3,14159

I1 = 5,77288

I2 = 5,56206

H = 24 cm (altura real da garrafa)

h = 6,105 cm (altura da imagem da garrafa no Geogebra)

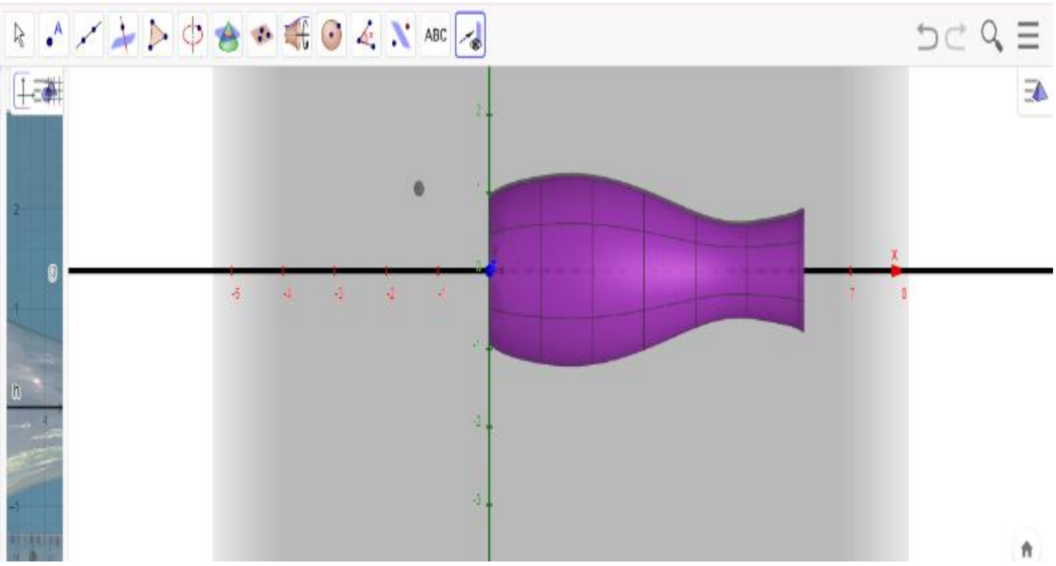
Fazendo as devidas substituições e efetuando os cálculos encontram-se

A = 560,56 $cm^2$ e V = 1061,60 $cm^3$.

**9º passo:** Modelo em 3D.

Utilizando outros recursos do *software* é possível construir o modelo da garrafa em 3D, como mostra a figura 8.

Figura 8 – Modelo da garrafa em 3D.



Fonte: Acervo dos autores, 2025.

Observe que o modelo no Geogebra é uma redução do objeto real, cuja razão de semelhança entre suas alturas é k = $(\frac{H}{h})$.

Desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema:

Na resolução apresenta acima, nota-se a necessidade de compreensão de conceitos matemáticos tais como: ponto de mínimo, de máximo e de inflexão de uma função; polinômio interpolador e noções sobre razão de semelhança entre sólidos. Esses conteúdos devem ser explorados pelo professor durante a modelagem, revisitando seus conceitos e, se for necessário, consultando referências da área. É importante também que os estudantes façam as deduções matemáticas das fórmulas 1, 2, 3 e 4, pois o método utilizado na modelagem é baseado nelas.

e) Análise crítica das soluções

No contexto da modelagem realizada, os valores de A e V encontrados são estimativas da área e do volume da garrafa. Por exemplo, a área lateral real da garrafa, estimada pelo método da fita, é de aproximadamente $546{,}93cm^2$ (ver apêndice B), mas o valor estimado pela modelagem foi $A = 560{,}56cm^2$. Já o volume real da garrafa, fornecida pelo fabricante, é de 1L (1000mL), porém o valor encontrado foi V = 1061,60mL. Logo, em relação ao volume, ocorreu um erro relativo de aproximadamente 6,16% em relação ao valor real.

Os valores que os estudantes encontrarão em suas modelagens também serão resultados aproximados da área e do volume, com mais ou menos erros relativos, a depender do enquadramento da foto, da escolha dos pontos sobre a superfície no Geogebra, da escolha do polinômio interpolador e da medida correta da altura da garrafa. Todas essas questões devem ser debatidas com os estudantes, e questionado se, apesar dos erros, o método utilizado na modelagem é viável para estimar a área e o volume de um sólido de revolução.

Uma vantagem do método adotado, e que o professor deve enfatizar, é a não necessidade da presença real do objeto. Possuindo uma imagem de boa qualidade e uma única medida linear do objeto, o método pode ser empregado. Em alguns contextos, a falta de dados do objeto real pode favorecer a sua utilização. E uma desvantagem é certamente a pouca precisão.

## 5. CONCLUSÃO

Neste artigo foi proposta uma atividade de modelagem sobre área e volume de sólidos de revolução, encorajando professores e alunos a inserir a Modelagem Matemática no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Este estudo teórico pode vir a contribuir para desmistificar a Matemática como uma disciplina difícil e orientar os professores a buscarem contextualizar a disciplina de Cálculo Integral à realidade dos estudantes, oportunizando a troca de conhecimento e de experiências dos estudantes entre si e com o professor. O método utilizado na modelagem dever ser analisado à luz de sua funcionalidade e aplicabilidade, entendendo as vantagens e desvantagens de sua utilização no cálculo da área e do volume de um sólido de revolução.

## REFERÊNCIAS


AMANCIO, D. T.; SANZOVO, D. T. Ensino de Matemática por meio das tecnologias digitais. **Revista Educação Pública**, v. 20, nº 47, 8 de dezembro de 2020.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem matemática**, 2002. Disponível em: (PDF) Ensino - aprendizagem com Modelagem matemática Acesso em: 20 mai. 2025.

BIEMBENGUT, M. S. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **LEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.7-32, jul. 2009.

BORBA, M. C. Ubiratan D'Ambrósio: Educador matemático brasileiro e internacional. **XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – CIAEM**, Recife, Brasil, 2011.

BURAK, D. **Modelagem matemática**: ações e interações no processo de ensino aprendizagem. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

DANTE, L. R. **Matemática, Volume Único**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2005.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**. 6 ed. São Paulo: Pearson, 2012.

KLÜBER, T. E., BURAK, D. Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 10, n. 1, pp. 17-34, 2008

LIMA, J. R.; BURAK, D. Prática com modelagem na Educação Matemática: algumas considerações sobre a importância do trabalho em grupo. **Revista Eletrônica de Educação de Matemática – REVEMAT**, Florianópolis, v. 19, p. 01-20, jan./dez. 2024. Universidade Federal de Santa Catarina. 1981-1322. DOI: 4https://doi.org/10.5007/1981-1322.2024.e98404

NEVES, J. M. **Uso de modelagem matemática no cálculo do volume e da área da superfície de uma maçã**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2023.

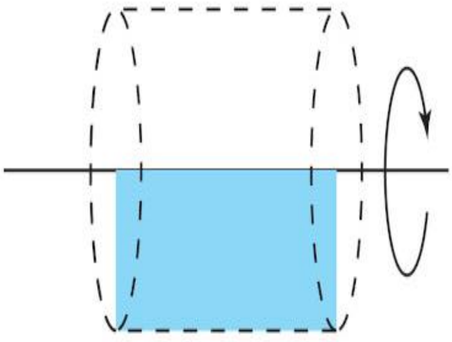
OLIVEIRA, E. R.; CUNHA, D. S. O uso da tecnologia no ensino da Matemática: contribuições do software GeoGebra no ensino da função do 1º grau. **Revista Educação Pública**, v. 21, nº 36, 28 de setembro de 2021.

SILVA, L. M. da. **Modelagem Matemática: possibilidades para a sala de aula**. Material de apoio pedagógico. UNICENTRO, 2022

# APÊNDICE A

1. Utilizando as fórmulas $A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$ e $V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$, prove que a área lateral e o volume do CILINDRO RETO são, respectivamente,
$A = 2\pi rh$ e $V = \pi r^2 h$ onde r é o raio do cilindro e h a sua altura.

Cilindro reto



Demonstração: A função constante f(x) = r, com r > 0, definida no intervalo [0, b], ao ser rotacionada em torno do eixo OX forma o cilindro reto. Assim, a área lateral será:

$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

$A = 2\pi \int_0^b r\, \sqrt{1 + [(r)']^2}\, dx$

$A = 2\pi \int_0^b r\, \sqrt{1 + [0]^2}\, dx$

$A = 2\pi \int_0^b r\, \sqrt{1 + [0]^2}\, dx$

$A = 2\pi r \int_0^b 1 dx$

$A = 2\pi r(b - 0)$

$A = 2\pi rh$, onde h = b – 0

E o volume será:

$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$

$V = \pi \int_0^b r^2\, dx$

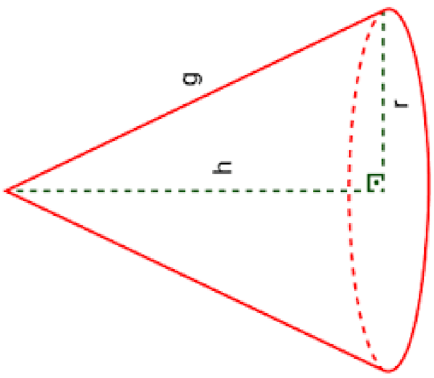
$V = \pi r^2 \int_0^b 1\, dx$

$V = \pi r^2\, (b - 0)$

$V = \pi r^2 h$, onde h = b – a ■

2.(Idem) Prove que a área lateral e o volume do CONE RETO são, respectivamente, $A = \pi r g$ e $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ onde r é o raio do cone, h a altura e g a geratriz.

Cone Reto




Demonstração: A função f(x) = $\left(\frac{r}{b}\right)x$, com r > 0, definida no intervalo [0, b], ao ser rotacionada em torno do eixo OX forma o cone reto. Assim, a área lateral será:

$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

$A = 2\pi \int_0^b \left(\frac{r}{b}\right)x \sqrt{1+[(\left(\frac{r}{b}\right)x)']^2}\,dx$

$A = 2\pi \int_0^b \left(\frac{r}{b}\right)x \sqrt{1+[(\left(\frac{r}{b}\right)x)']^2}\,dx$

$A = 2\pi \int_0^b \left(\frac{r}{b}\right)x \sqrt{1+\left(\frac{r}{b}\right)^2}\,dx$

$A = 2\pi \left(\frac{r}{b}\right)\sqrt{1+\left(\frac{r}{b}\right)^2}\int_0^b x\;dx$

$A = 2\pi(\frac{r}{b^2})\sqrt{b^2+r^2}\,(\frac{b^2}{2})$

$A = \pi r\sqrt{(b\,-\,0)^2+r^2}$

$A = \pi r\sqrt{h^2+r^2}$

$A = \pi r g$, onde g = $\sqrt{h^2+r^2}$

E o volume será:

$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$

$V = \pi \int_0^b [\left(\frac{r}{b}\right)x]^2\,dx$

$V = \pi \left(\frac{r}{b}\right)^2 \int_0^b x^2\,dx$

$V = \pi \left(\frac{r}{b}\right)^2 (\frac{b^3}{3})$

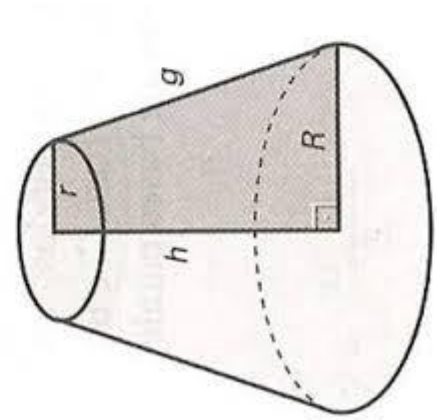
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 b$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2(b\,-\,0)$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, onde $h = (b - 0)$ ■

3.(Idem) Prove que a área lateral e o volume do TRONCO DE CONE são, respectivamente, $A = \pi g(R + r)$ e $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$ onde R é o raio maior, r é o raio menor, h a altura do tronco de cone e g a geratriz.

Tronco de cone




Demonstração: A função f(x) = $\left(\frac{R-r}{b}\right)x + r$, com R > r > 0, definida no intervalo [0, b], ao ser rotacionada em torno do eixo OX forma o tronco de cone. Assim, a área lateral será:

$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

$A = 2\pi \int_0^b [\left(\frac{R-r}{b}\right)x + r] \,.\sqrt{1 + [(\left(\frac{R-r}{b}\right)x + r)']^2}\, dx$

$A = 2\pi \int_0^b [\left(\frac{R-r}{b}\right)x + r] \sqrt{1 + \left(\frac{R-r}{b}\right)^2}\, dx$

$A = 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{R-r}{b}\right)^2} \,. \int_0^b [\left(\frac{R-r}{b}\right)x + r]\, dx$

$A = 2\pi \frac{1}{b} \,.\sqrt{b^2 + (R-r)^2}. \int_0^b [\left(\frac{R-r}{b}\right)x + r]\, dx$

$A = 2\pi \frac{1}{b} \,.\sqrt{b^2 + (R-r)^2}. [\left(\frac{R-r}{b}\right)\frac{b^2}{2} + rb]$

$A = 2\pi \,.\sqrt{b^2 + (R-r)^2}. [\frac{(R-r)}{2} + r]$

$A = \pi \,.\sqrt{b^2 + (R-r)^2}. (R + r)$

$A = \pi \,.\sqrt{(b - 0)^2 + (R-r)^2}. (R + r)$

$A = \pi \,.\sqrt{h^2 + (R-r)^2}. (R + r)$

$A = \pi\, g\, (R + r)$, onde $g = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$

E o volume será:

$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$

$V = \pi \int_0^b [\left(\frac{R-r}{b}\right)x + r]^2\, dx$

Façamos a mudança de variável: $u = \left(\frac{R-r}{b}\right)x + r$ . Assim, $dx = \left(\frac{b}{R-r}\right)$ du e os limites de integração serão: $u = r$ e $u = R$:

$V = \pi \int_a^b [\left(\frac{R-r}{b}\right)x + r]^2\, dx$

$V = \pi \int_r^R u^2 \left(\frac{b}{R-r}\right)$ du

$V = \pi \left(\frac{b}{R-r}\right) \int_r^R u^2 \mathrm{du}$

$V = \pi \left(\frac{b}{R-r}\right).\left(\frac{R^3}{3} - \frac{r^3}{3}\right)$

$V = \pi \frac{1}{3}\left(\frac{b}{R-r}\right).(R^3 - r^3)$

Utilizando a identidade: $a^3 - b^3 = (\mathrm{a} - \mathrm{b})(a^2 + ab + b^2)$

$V = \pi \frac{1}{3}\left(\frac{b}{R-r}\right).(\mathrm{R} - \mathrm{r}).(R^2 + Rr + r^2)$

$V = \frac{1}{3}\pi b(R^2 + Rr + r^2)$

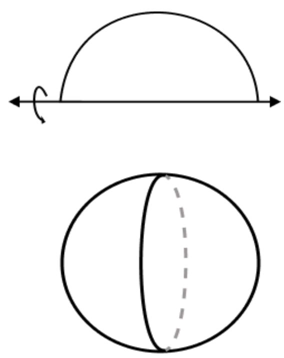
$V = \frac{1}{3}\pi(b - 0).(R^2 + Rr + r^2)$

$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$, onde h = b – 0 ■

4. (Idem) Prove que a área e o volume da esfera são, respectivamente, $A = 4\pi r^2$ e $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, onde r é o raio da esfera.

Demonstração: A função f(x) = $\sqrt{(r^2 - x^2)}$, com r > 0, definida no intervalo [-r, r], ao ser rotacionada em torno do eixo OX forma a esfera de raio r. Assim, a área da esfera será:

Esfera



$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

$A = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{(r^2 - x^2)}. \sqrt{1 + [(\sqrt{(r^2 - x^2)})']^2}\, dx$

$A = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{(r^2 - x^2)}. \sqrt{1 + \frac{x^2}{(r^2 - x^2)}}\, dx$

$A = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{(r^2 - x^2)}. \sqrt{\frac{r^2}{(r^2 - x^2)}}\, dx$

$A = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2}\, dx$

$A = 2\pi r \int_{-r}^r 1\, dx$

$A = 2\pi r\,(r - (-r))$

$A = 4\pi r^2$

E o volume será:

$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$

$V = \pi \int_{-r}^{r} \sqrt{(r^2 - x^2)}^2 \, dx$

$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \, dx$

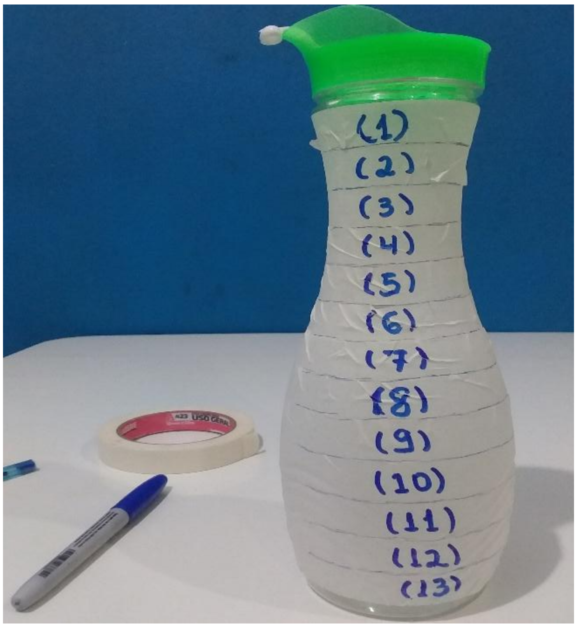
$V = \pi \left[ \left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right) \right]$

$V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ■

# APÊNDICE B

Método da Fita: consiste em contornar a superfície lateral da garrafa com fita adesiva de largura fixa (como mostra a figura 1) e calcular a soma total das áreas (A) das fitas usadas.

Figura 1. Garrafa encoberta por 13 fitas de largura fixa de 18mm.




Fonte: Acervo dos autores, 2025.

O quadro 1 sintetiza as informações de cada fita, apresentando os comprimentos (maior e menor), a largura e a média dos comprimentos (Mi).

Quadro 1. Dados extraídos das 13 fitas usadas para contornar a garrafa.

| Fita | Comprimento menor | Comprimento maior | Média (Mi) | Largura (L) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 19,2cm | 19,5cm | 19,35cm | 1,8cm |
| 2 | 17,1cm | 17,3cm | 17,20cm | 1,8cm |
| 3 | 16,2cm | 16,3cm | 16,25cm | 1,8cm |
| 4 | 16,4cm | 16,7cm | 16,55cm | 1,8cm |
| 5 | 18,0cm | 18,5cm | 18,25cm | 1,8cm |
| 6 | 20,6cm | 21,5cm | 21,05cm | 1,8cm |
| 7 | 23,8cm | 25,0cm | 24,40cm | 1,8cm |
| 8 | 26,5cm | 27,7cm | 27,10cm | 1,8cm |
| 9 | 28,7cm | 29,5cm | 29,10cm | 1,8cm |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 29,6cm | 30,0cm | 29,80cm | 1,8cm |
| 11 | 28,7cm | 29,8cm | 29,25cm | 1,8cm |
| 12 | 28,7cm | 28,8cm | 28,75cm | 1,8cm |
| 13 | 26,4cm | 27,2cm | 26,80cm | 1,8cm |

Fonte: Dados da pesquisa, 2025.

Utilizando os dados do quadro 1, a área lateral da garrafa (A) será, aproximadamente:

A = $\sum_{i=1}^{13} L.Mi$ = L. $\sum_{i=1}^{13} Mi$ = 1,8. (19,35+17,20+16,25+16,55+18,25 + 21,05 + 24,40 + 27,10 + 29,10 + 29,80 + 29,25 + 28,75 + 26,80) ≈ 546,93cm$^2$.