



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E BIOMÉDICA

SANDY HIORRANA LIMA FARIAS

**Implementação e Análise Experimental do Controle
LQG em uma Planta MIMO 2-DoF**

BELÉM/PA

2026

SANDY HIORRANA LIMA FARIAS

Implementação e Análise Experimental do Controle LQG em uma Planta MIMO 2-DoF

Trabalho de Curso, apresentado na Faculdade de Engenharia Elétrica e Biomédica (FEEB) do Instituto de Tecnologia da Universidade Federal do Pará, como requisito para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Antonio da Silva Silveira
Universidade Federal do Pará

Coorientador: Me. Daniel Abreu Macedo da Silva
Universidade Federal do Pará

BELÉM/PA

2026



UFPA

**SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E BIOMÉDICA**

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CURSO (TC)

Ata de defesa de Trabalho de Curso (TC) intitulado: “IMPLEMENTAÇÃO E ANÁLISE EXPERIMENTAL DO CONTROLE LQG EM UMA PLANTA MIMO 2-DOF”, apresentado durante 35 minutos pela discente **Sandy Hiorrana Lima Farias**, matrícula nº 201807140077, realizada às 15h00 do dia 06 de Março de 2026, por videoconferência via Google Meet através do link <https://meet.google.com/ody-nvtg-vqr>, sob orientação do Professor Antonio da Silva Silveira e coorientação do doutorando do PPGEE-UFPA, Daniel Abreu Macedo da Silva. Após a apresentação, a discente foi submetida à arguição oral pelos membros da banca examinadora. Em seguida, a banca se reuniu, em caráter sigiloso, para decidir o resultado do exame, ato que deliberou pela **APROVAÇÃO** do trabalho com o conceito **EXCELENTE**. Para serem efetuadas as modificações sugeridas pela banca para desenvolver a versão final do Trabalho de Curso, se for o caso, a discente recebeu o prazo máximo de 08 (oito) dias, a contar da data desta defesa. Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada, lavrando-se dela a presente Ata que, uma vez aprovada, foi assinada pelos membros da banca examinadora e pela discente.

Documento assinado digitalmente



ANTONIO DA SILVA SILVEIRA
Data: 06/03/2026 17:39:01-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Antonio da Silva Silveira
(Orientador – UFPA)

Documento assinado digitalmente



DANIEL ABREU MACEDO DA SILVA
Data: 06/03/2026 19:47:52-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Daniel Abreu Macedo da Silva
(Coorientador – Doutorando PPGEE-UFPA)

Documento assinado digitalmente



REJANE DE BARROS ARAUJO
Data: 08/03/2026 05:42:24-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Rejane de Barros Araújo
(Membra – IFPA)

Documento assinado digitalmente



WALTER BARRA JUNIOR
Data: 06/03/2026 18:17:21-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Walter Barra Júnior
(Membro – UFPA)

Documento assinado digitalmente



SANDY HIORRANA LIMA FARIAS
Data: 07/03/2026 13:02:36-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Sandy Hiorrana Lima Farias
(Discente)

Dedico este trabalho à minha mãe e aos meus amados avós.

Agradecimentos

Agradeço sobretudo à minha avó, Joana Farias, que não só foi minha primeira professora, como foi e continua sendo minha maior incentivadora. Agradeço à minha mãe, Adriana Farias, por toda a confiança depositada em mim e por todo o investimento no meu crescimento profissional. Obrigada por ter me apoiado quando decidi trocar de curso; isso foi realmente muito importante. Dentre minhas muitas inspirações, ela é a maior: pela força, pela inteligência e, principalmente, pela perseverança em nunca, jamais, sob hipótese alguma, desistir. Agradeço ao meu avô, Raimundo Farias, por ser o melhor pai que eu poderia ter. No fim das contas, meus pilares são vocês três.

Agradeço aos meus tios, Elton Lima, Robson Farias, e Raimundo Filho, por toda cumplicidade. Sou muita grata pela família que tenho. Agradeço ao meu padrasto, Fernando Tavares, por todo cuidado comigo e minha mãe.

Agradeço ao meu orientador, Antonio Silveira, por todo o suporte. Sou privilegiada por ter tido como tutor alguém cuja paixão pelo que faz é tremenda. Agradeço ao meu coorientador, Daniel Abreu, por me orientar de perto, pelo apoio constante e por acreditar em mim. Ao Matheus, cujo título de meu “co-coorientador” é irrefutável, meus mais sinceros agradecimentos. Seria impossível controlar o 2-DoF sem ele.

Agradeço ao meu parceiro de curso, Jhonnys Marques, por tudo. Desde a primeira semana de aula, eu sabia que seríamos amigos. Obrigada por todas as horas juntos, por todos os dias e noites de estudo e projetos, e por todas as conversas, das mais banais às mais complexas. Dedicar um parágrafo inteiro a ele ainda parece ser muito pouco.

Agradeço ao Juan Guilherme, meu namorado, por todo o suporte durante os últimos cinco anos. Juntos, vencemos uma pandemia e, juntos, iremos nos formar. Eu te amo *pra sempre*. Sorte a minha ter te encontrado ainda nessa vida.

Agradeço aos melhores amigos que fiz na graduação: Thiago Santos, Alex Henrique, Luan Gonçalves, Giovanna Miranda e Henrique Lisboa. Nossas infindáveis conversas sobre engenharia, sobre o futuro e sobre a vida fizeram e fazem o percurso ser mais leve e mais possível.

Aos meus tutores de estágio, Linercky Lustosa, Marcelo Raiol, Herick Castro, Luiz Carlos Horta e Diego Ramiro meus mais sinceros agradecimentos por terem compartilhado tanto comigo. Levo muito do que aprendi com vocês.

Agradeço a Eline Ribeiro por ter sido a maior líder com a qual eu já tive a oportunidade de trabalhar. Obrigada por acreditar em mim e por abrir tantas portas. Agradeço à Eng. Josany Cardoso pelas aulas e discussões sobre projeto e por ser uma grande referência profissional pra mim.

Agradeço aos meus grandes amigos que fazem a vida mais fácil: Alicia Souza, Jeniffer Costa, Osvaldo Neto, Arthur Souza, Luiz Albuquerque.

“Tudo o que você pode fazer, ou sonhar que pode, comece; A ousadia tem em si gênio, poder e magia.”

(Goethe)

RESUMO

O projeto de controladores para sistemas multivariáveis MIMO (Multiple-Input, Multiple-Output), caracterizados pelo forte acoplamento entre suas múltiplas entradas e saídas, é intrinsecamente mais complexo. Neste contexto, este trabalho apresenta a aplicação do controlador Linear-Quadrático-Gaussiano (LQG), que integra o Regulador Linear-Quadrático (LQR) com um Filtro de Kalman para estimativa de estados, a uma planta física de dois graus de liberdade (2-DoF) denominada H2-DoF. O desenvolvimento do controlador baseia-se na modelagem em espaço de estados, incluindo a implementação de um pré-compensador estático de ganho DC e a augmentação do modelo para garantir o seguimento de referência. A implementação completa do controlador LQG é realizada em tempo real sobre a planta física, que teve seu hardware de aquisição de dados atualizado com um microcontrolador ESP32 e módulos de potência para acionamento via PWM. Os resultados experimentais mostraram que a estratégia LQG pôde ser implementada com êxito na planta H2-DoF, promovendo estabilização e seguimento de referência satisfatório. Desse modo, o estudo demonstra a aplicabilidade experimental do controlador no contexto da plataforma investigada e reforça o potencial didático do uso de técnicas de controle moderno em sistemas físicos reais.

Palavras-chave: sistemas MIMO. controle LQG. regulador LQR. filtro de Kalman. H2-DoF.

ABSTRACT

The design of controllers for multivariable MIMO (Multiple-Input, Multiple-Output) systems, characterized by strong coupling among their multiple inputs and outputs, is inherently more complex. In this context, this work presents the application of a Linear-Quadratic-Gaussian (LQG) controller, which integrates the Linear-Quadratic Regulator (LQR) with a Kalman Filter for state estimation, to a physical two-degree-of-freedom (2-DoF) plant called H2-DoF. The controller design is based on state-space modeling, including the implementation of a static DC-gain precompensator and model augmentation to ensure reference tracking. The complete LQG controller was implemented in real time on the physical plant, whose data acquisition hardware was updated with an ESP32 microcontroller and power modules for PWM actuation. The experimental results showed that the LQG strategy could be successfully implemented on the H2-DoF plant, providing system stabilization and satisfactory reference tracking. Thus, the study demonstrates the experimental applicability of the controller in the context of the investigated platform and reinforces the didactic potential of using modern control techniques in real physical systems.

Keywords: MIMO systems, LQG control, LQR regulator, Kalman filter, H2-DoF.

Lista de Figuras

Figura 1 – Protótipo H2-DoF.	17
Figura 2 – Representação ilustrativa dos movimentos de arfagem, rolagem e guinada.	18
Figura 3 – Diagrama de corpo livre simplificado da planta H2-DoF.	19
Figura 4 – Motores e Hélices.	21
Figura 5 – Diagrama de montagem elétrica do protótipo H2-DoF.	22
Figura 6 – Potenciômetros.	23
Figura 7 – Diagrama de Blocos H2-DoF.	25
Figura 8 – Comparação da resposta ao degrau após compensação.	31
Figura 9 – Teorema da Separação.	40
Figura 10 – Diagrama de Blocos do Controlador LQG.	41
Figura 11 – Ensaio Simulado do Controlador LQG.	44
Figura 12 – Ensaio Experimental do Controlador LQG.	44
Figura 13 – Estados Estimados Simulado e Experimental.	45

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Características do ESP32 DevKit (ESP-WROOM-32).	21
Tabela 2 – Indicadores de desempenho e variâncias, comparação entre experimento simulado e ensaio experimental.	46

Lista de Abreviaturas e Siglas

UFPA	Universidade Federal do Pará
FEEB	Faculdade de Engenharia Elétrica e Biomédica
LACOS	Laboratório de Controle e Sistemas
ANAC	Agência Nacional de Aviação Civil
2-DoF	Two-Degree-of-Freedom
H2-DoF	Helicopter Two-Degree-of-Freedom
MIMO	Multiple-Input, Multiple-Output
SISO	Single-Input, Single-Output
LQG	Linear Quadratic Gaussian
LQR	Linear Quadratic Regulator
KF	Kalman Filter
ARE	Algebraic Riccati Equation
MQR	Mínimos Quadrados Recursivos
DCL	Diagrama de Corpo Livre
CCW	Counterclockwise
CW	Clockwise
GPIO	General Purpose Input/Output
ADC	Analog-to-Digital Converter
DAC	Digital-to-Analog Converter
PWM	Pulse Width Modulation

Sumário

1 – INTRODUÇÃO	12
1.1 Contextualização	12
1.2 Justificativa	14
1.3 Objetivos	14
1.3.1 Objetivo Geral	14
1.3.2 Objetivos Específicos	14
1.4 Metodologia	15
1.5 Estrutura do trabalho	15
2 – PLANTA DIDÁTICA	17
2.1 Visão Geral da Planta Didática	17
2.2 Descrição Dinâmica Qualitativa da Planta	18
2.2.1 Movimento de Arfagem e Guinada	18
2.2.2 Diagrama de Corpo Livre	19
2.3 Componentes	20
2.3.1 Microcontrolador	20
2.3.2 Sistema de Propulsão	21
2.3.3 Módulo de Controle de Potência	22
2.3.4 Sistema de Aquisição de Dados e Sensoriamento	23
2.4 Arquitetura do Processo	24
2.5 Modelo em Espaço de Estados	25
3 – Controle Ótimo Multivariável em Espaço de Estados	29
3.1 Visão Geral	29
3.2 Considerações de Projeto	30
3.2.1 Pré-compensador digital de ganho direto	30
3.3 Augmentação do Modelo de Estados	32
3.4 Controlabilidade e Observabilidade	33
3.5 Regulador Linear Quadrático	34
3.6 Estimação de estados: Filtro de Kalman discreto	37
3.7 Controlador LQG	39
4 – Resultados e Análise de Índices de Desempenho	42
4.1 Índices de Desempenho	42
4.2 Calibração tensão-ângulo	43
4.3 Testes Simulados e Experimentais	43

5 – CONCLUSÃO	47
Referências	48

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

Sistemas de controle por realimentação automática são conhecidos e utilizados há mais de dois mil anos. Alguns dos primeiros exemplos são os relógios d'água descritos por Vitruvius e atribuídos a Ktesíbios (c. 270 a.C.). Registros posteriores citam autômatos de Heron que já exploravam mecanismos de retroação para manter fluxos e movimentos regulares, indicando que a ideia de regular por realimentação antecede em muito a engenharia moderna (Bennett, 1996). Com raízes milenares, o controle automático se tornou um componente essencial e intrínseco em vários campos da engenharia e da ciência, sendo fundamental em sistemas de veículos espaciais, robótica, manufatura moderna e em operações industriais que envolvem o controle de variáveis como temperatura, pressão, umidade, viscosidade e vazão, entre outras (Ogata, 2010).

Segundo Bennett (1996), a história do controle pode ser organizada em quatro períodos que ajudam a situar sua evolução técnica. Até 1900, tem-se o controle inicial, que reúne soluções práticas de regulação em processos básicos como temperatura, pressão, nível de líquidos e velocidade de máquinas, culminando nos estudos de estabilidade do governador centrífugo de Watt por Maxwell (1868). Entre 1900 e 1940, a teoria recebe tratamento matemático mais sistemático e se disseminam os servomecanismos e aplicações eletromecânicas, caracterizando o período pré-clássico. De 1935 a 1960, consolida-se o período clássico, marcado pelos métodos em frequência de Nyquist e Bode e por práticas SISO (Single-Input, Single-Output) amplamente adotadas na indústria. A partir de 1955, inicia-se o controle moderno, com a adoção da representação em espaço de estados, da síntese ótima e da estimação, estabelecendo a base para tratar sistemas multivariáveis, sendo este o foco deste trabalho.

A Segunda Guerra Mundial impulsionou o uso massivo do controle clássico em aplicações militares e industriais. Sua abordagem no domínio da frequência mostrou-se adequada para sistemas lineares invariantes no tempo de uma única entrada e uma única saída. A corrida espacial, iniciada com o lançamento do Sputnik em 1957, evidenciou limitações dessa abordagem perante dinâmicas multivariáveis (Villça e Silveira, 2013). Em resposta, consolidou-se a adoção da formulação em espaço de estados como linguagem unificada para modelar, simular e projetar sistemas MIMO (Multiple-Input, Multiple-Output), tratando o sistema como um todo e tendo o SISO como caso particular (Stevens, Lewis e Johnson, 2016). Embora as raízes da teoria moderna de controle tenham suas origens no início do século XX, na verdade elas estão entrelaçadas com o desenvolvimento concomitante dos computadores. Um computador digital é praticamente essencial para

realizar os cálculos que devem ser feitos em uma aplicação típica de controle (Friedland, 1986).

Segundo Åström e Wittenmark (1997), a ideia de empregar computadores digitais em sistemas de controle surge por volta de 1950, inicialmente em mísseis e aeronaves. Entretanto, avaliações da época apontavam que os computadores de uso geral eram grandes, gastavam muita energia e eram pouco confiáveis, o que desmotivava o seu uso. O computador digital entrou no controle de processos efetivamente impulsionado por aplicações industriais, com casos pioneiros em refinarias de petróleo, como o projeto Texaco-TRW comissionado em 1959. A adoção acelerou com os minicomputadores por volta de 1967 e, depois, com os microcomputadores em 1972, substituindo painéis analógicos por soluções digitais. Com a rápida queda de custos e o avanço da microeletrônica, o poder de computação tornou-se acessível e escalável. Desta forma, praticamente todos os sistemas de controle desenvolvidos hoje são baseados em controle por computador.

Os métodos de espaço de estados são a pedra angular da teoria moderna de controle. A característica essencial dos métodos de espaço de estados é a caracterização dos processos de interesse por meio de equações diferenciais em vez de funções de transferência (Friedland, 1986). Com a formulação em espaço de estados posta, a teoria de controle ótimo ganha corpo. Em 1960, Rudolf E. Kalman publicou seu artigo seminal no qual introduziu e explorou os conceitos de controlabilidade e observabilidade e, com eles, apresentou pela primeira vez uma teoria completa do problema do regulador, o controle linear-quadrático por realimentação de estados (LQR - Linear Quadratic Regulator) (Kalman, 1960b). No mesmo ano, publicou outro trabalho de igual importância propondo um método recursivo de filtragem e previsão no domínio discreto, conhecido como Filtro de Kalman (Kalman, 1960a). Assim, tem-se o LQG (Linear Quadratic Gaussian), que resulta da combinação do LQR com o Filtro de Kalman (FK). Na prática, como é visto em Grewal e Andrews (2010), o FK foi implementado ainda durante o Projeto Apollo para fins de navegação e guiagem para estimar as trajetórias de voo até a Lua, feito este que só foi viabilizado graças ao desenvolvimento do computador digital, demonstrando como esta ferramenta se tornaria poderosa para trabalhar com técnicas de controle sofisticadas.

Dessa forma, considerando o desenvolvimento da teoria de controle e a adoção de tecnologias digitais, este trabalho tem como objetivo projetar e demonstrar experimentalmente a aplicabilidade do LQG em uma planta MIMO H2-DoF, também conhecida como *Helicóptero 2-DoF*, com execução em tempo real utilizando o microcontrolador ESP32 para aquisição de dados e atuação via PWM, e o algoritmo de controle implementado no ambiente MATLAB. O trabalho apresenta o projeto do compensador LQG para controle dos ângulos de arfagem e guinada do protótipo H2-DoF, buscando-se evidenciar estabilidade e seguimento de referência. Como contribuição adicional, o estudo enfatiza a viabilidade de baixo custo e o caráter didático da plataforma, aproximando conceitos de controle moderno de um cenário experimental acessível.

1.2 Justificativa

Durante a graduação, o estudante de Engenharia Elétrica, embora tenha contato com uma ampla base de conteúdos em Teoria de Controle e Sistemas, frequentemente restringe seus estudos à teoria clássica, sobretudo em problemas SISO. Diante desse cenário, justifica-se o uso de um protótipo físico de baixo custo como plataforma experimental para aplicação de técnicas de controle multivariável. Além de aproximar teoria e prática, essa abordagem favorece a análise de fenômenos reais de implementação e amplia o potencial didático do estudo no contexto da graduação.

A realização de experimentos em controle é decisiva para transformar teoria em competência de projeto. No laboratório, a dinâmica real expõe efeitos não ideais que a modelagem e a simulação frequentemente omitem, como ruído, saturações, atrito, histerese e atrasos. Por isso, além da análise, tornam-se indispensáveis etapas de identificação, validação e ajuste em tempo real, a fim de que o controlador atenda às metas de desempenho sob restrições físicas e de implementação (Bernstein, 1998).

Em plataformas didáticas de baixo custo, essa vivência torna-se factível na graduação e o desenvolvimento deste tipo de projeto mostra-se fundamental, pois permite ao estudante interessado em sistemas de controle aplicar, na prática, conceitos de controle moderno ainda durante a graduação.

A planta H2-DoF adotada neste trabalho constitui uma plataforma didática apropriada por apresentar acoplamento entre os eixos de arfagem e guinada e exigir tratamento multivariável. A escolha do controlador LQG se justifica por combinar realimentação ótima de estados (LQR) com estimação de estados (Filtro de Kalman), permitindo o controle mesmo quando nem todas as variáveis internas estão diretamente disponíveis para medição. Soma-se a isso o caráter de baixo custo da plataforma didática.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Projetar e demonstrar experimentalmente a aplicabilidade do controlador LQG no tempo discreto em uma planta física de duas entradas e duas saídas cujas dinâmicas são análogas às de um helicóptero.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Descrever a planta física H2-DoF;
- Projetar e sintonizar um controlador LQG discreto com base em modelo no espaço de estados;

- Implementar o controlador LQG na planta real;
- Analisar índices de desempenho e os resultados obtidos.

1.4 Metodologia

Este trabalho caracteriza-se como uma pesquisa aplicada, centrada no projeto e na implementação de um controlador LQG para a planta didática multivariável de dois graus de liberdade H2-DoF. A investigação foi conduzida com ênfase no desenvolvimento da estratégia de controle em espaço de estados e em sua aplicação à planta estudada.

Do ponto de vista metodológico, o estudo foi estruturado em etapas sucessivas. Inicialmente, foram apresentados os conceitos teóricos necessários ao desenvolvimento da pesquisa, com foco em sistemas MIMO, representação em espaço de estados, LQR, FK e LQG. Em seguida, adotou-se o modelo em espaço de estados previamente identificado por Silva (2025) para a planta H2-DoF, utilizando-o como base para o desenvolvimento do controlador, sem que este trabalho contemplasse uma nova etapa de modelagem ou identificação.

Na etapa de projeto, foi implementado um pré-compensador estático de ganho DC e realizada a augmentação do modelo para o seguimento de referência. A partir do sistema aumentado, verificaram-se as propriedades de controlabilidade e observabilidade, possibilitando o projeto do LQR e do FK discretos, cuja integração resultou no controlador LQG proposto.

Por fim, o controlador foi implementado na planta física e analisado por meio de ensaios simulados e experimentais, conduzidos sob mesmas condições de amostragem e duração, com aplicação de sinais de referência do tipo degrau. A análise dos resultados baseou-se na comparação entre respostas simuladas e experimentais, no acompanhamento das saídas medidas e estimadas e no cálculo de índices de desempenho associados ao erro de seguimento e ao esforço de controle.

1.5 Estrutura do trabalho

Este trabalho adota uma estrutura de capítulos, que contabilizam 5, incluindo o presente, cujo intuito principal é contextualizar o leitor aos conceitos, métodos e resultados que serão abordados.

No Capítulo 2 é apresentada a descrição do protótipo da planta *Helicóptero 2-DoF* e o seu modelo em espaço de estado.

No Capítulo 3 é apresentado o projeto do controlador LQG empregado neste trabalho, além de discutir os conceitos da teoria de controle que fundamentam a pesquisa.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados e os índices de desempenho obtidos a partir da implementação no protótipo.

Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões do trabalho, bem como as perspectivas de trabalhos futuros.

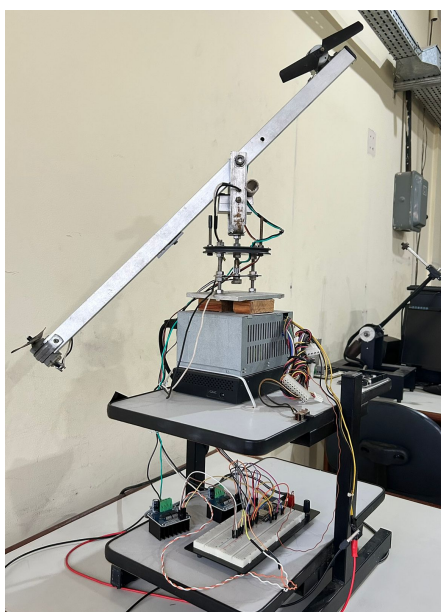
2 PLANTA DIDÁTICA

Este capítulo se concentra na descrição da planta *Helicóptero 2-DoF*. Trata-se de uma planta com duas entradas e duas saídas de dinâmica não linear. O arranjo adotado toma como referência contribuições anteriores (Breganon, 2009; Casara, 2015; Nascimento, 2016) e foi materializado em um protótipo desenvolvido no Laboratório de Controle e Sistemas (LACOS), da Universidade Federal do Pará, com projeto e montagem realizados pelo Eng. Haroldo Martins Ramos Filho. Além disso, para este trabalho, a planta recebeu atualizações de hardware, incluindo microcontrolador ESP32 para aquisição de dados e módulos PWM para acionamento dos motores, conforme detalhado a seguir, juntamente com a descrição de sua estrutura física e da dinâmica envolvida no processo.

2.1 Visão Geral da Planta Didática

A planta *Helicopter Two-Degree-of-Freedom* (H2-DoF), em português Helicóptero de Dois Graus de Liberdade, pode ser entendida como um equivalente a uma bancada de um helicóptero de pequeno porte. Sua estrutura é composta por uma base fixa e por um conjunto articulado que permite movimentos angulares em dois eixos, associados à arfagem e à guinada. Conectada a esse conjunto, a haste metálica suporta os atuadores, constituídos por motores de corrente contínua com hélices acopladas, posicionados nas suas extremidades. É apresentado na Figura 1 o protótipo utilizado neste trabalho.

Figura 1 – Protótipo H2-DoF.



Fonte: Autora.

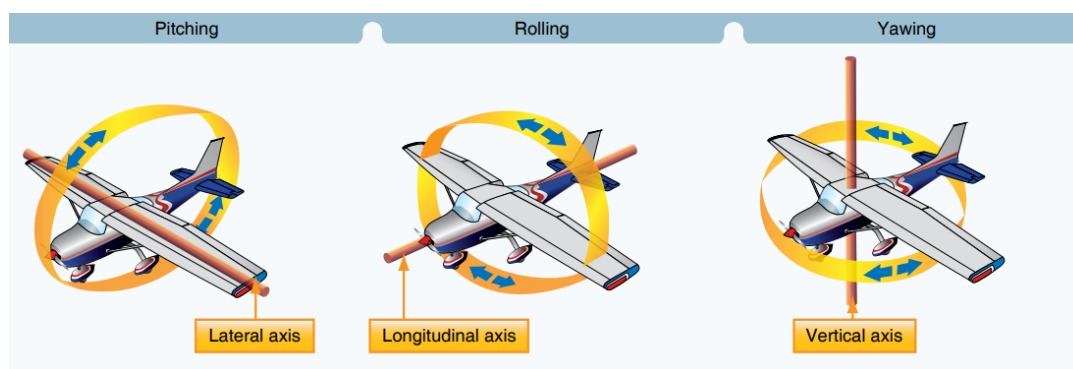
2.2 Descrição Dinâmica Qualitativa da Planta

2.2.1 Movimento de Arfagem e Guinada

O piloto de helicóptero tem três alavancas de comando que agem de maneira integrada e lhe fornece quatro controles (arfagem, rolagem, guinada e voo ascendente e descendente). Com isso, o helicóptero tem liberdade de movimento em três eixos espaciais, x, y e z (Roque, 2016). No entanto, esta planta, limita-se aos movimentos de arfagem e guinada, haja vista que, como visto em Nascimento (2016), o movimento de rolagem não pode ser modificado devido à fixação da haste no eixo que produz esta ação, assim, limitando os graus de liberdade do corpo aos eixos responsáveis pelos movimentos de arfagem e guinada.

Esses movimentos definem os graus de liberdade do sistema e são fundamentais para compreender a resposta física da planta e o desenvolvimento das estratégias de controle. Os movimentos de arfagem, rolagem e guinada estão representados na Figura 2.

Figura 2 – Representação ilustrativa dos movimentos de arfagem, rolagem e guinada.



(Jansen, 2020)

A arfagem (pitch) corresponde à rotação em torno do eixo horizontal transversal, sendo responsável pela inclinação do braço principal para cima ou para baixo, enquanto a guinada (yaw) consiste na rotação em torno do eixo vertical, permitindo a orientação da estrutura no plano horizontal. O movimento em torno do eixo longitudinal da aeronave é chamado de “rolagem” (Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC), 2025).

Na planta utilizada neste trabalho, a arfagem é influenciada predominantemente pelo empuxo gerado pelo conjunto motor-hélice instalado no topo da haste, o qual produz um momento em torno do eixo de arfagem e atua contra os efeitos gravitacionais. A dinâmica associada à arfagem é fortemente não linear, devido à presença de termos aerodinâmicos, efeitos gravitacionais e acoplamento com o movimento de guinada.

Por sua vez, a guinada é gerada predominantemente pelo empuxo produzido pelo conjunto motor-hélice montado lateralmente, responsável pelo momento associado à rotação em guinada. Assim como na arfagem, a dinâmica da guinada apresenta comportamento não linear e depende da interação entre forças aerodinâmicas, inércia e atrito mecânico.

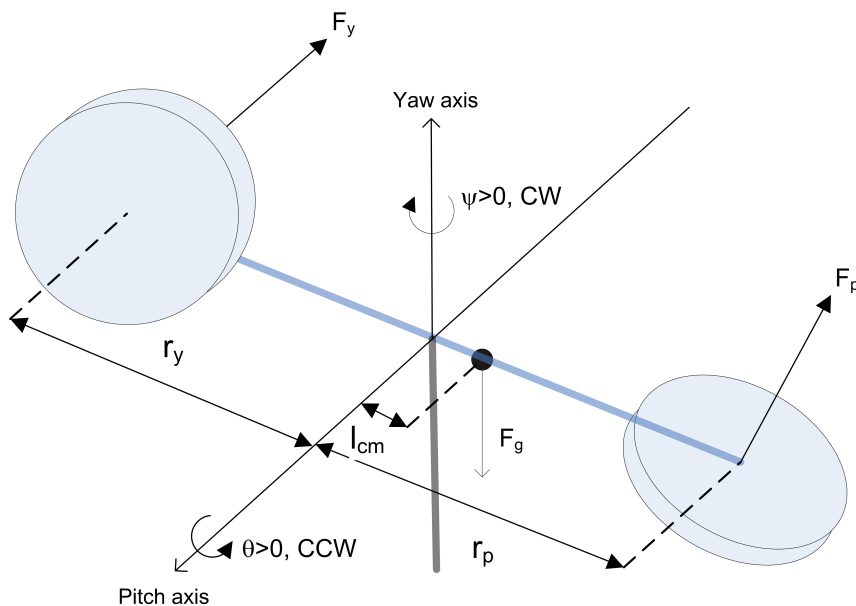
O modelo dinâmico da planta H2-DoF descreve a relação entre os sinais de controle aplicados aos atuadores e a resposta angular do sistema em cada eixo de liberdade. Devido ao acoplamento dinâmico entre arfagem e guinada, variações no comando de um eixo podem afetar, em alguma medida, a resposta do outro, o que justifica tratar a planta como um sistema multivariável (MIMO) e motiva o uso de técnicas de controle multivariável.

2.2.2 Diagrama de Corpo Livre

O diagrama de corpo livre (DCL) apresentado na Figura 3 é retirado do manual técnico do experimento *Quanser 2-DOF Helicopter* (Quanser Inc., 2011) e é utilizado neste trabalho como referência para reconhecer as principais ações mecânicas envolvidas na dinâmica da planta H2-DoF.

Nota-se que, na Figura 3, a nomenclatura dos movimentos aparece originalmente em inglês (*pitch* e *yaw*); ao longo deste trabalho, esses termos são adotados em português como arfagem e guinada, respectivamente.

Figura 3 – Diagrama de corpo livre simplificado da planta H2-DoF.



Fonte: (Quanser Inc., 2011)

Conforme as convenções de modelagem apresentadas no manual, considera-se que o helicóptero está na horizontal quando o ângulo de arfagem satisfaz $\theta = 0$. A arfagem é positiva quando o nariz do helicóptero se desloca para cima e a estrutura realiza rotação no sentido anti-horário (CCW). De forma análoga, a guinada é positiva quando o corpo realiza rotação no sentido horário (CW). O manual também explicita a associação entre o sinal do empuxo e a variação angular: a arfagem aumenta ($\theta > 0$) quando a força de empuxo em arfagem é positiva ($F_p > 0$), e a guinada aumenta ($\psi > 0$) quando a força de empuxo em guinada é positiva ($F_y > 0$). No DCL, F_p e F_y representam os empuxos gerados pelos rotores, enquanto F_g representa a força gravitacional atuando sobre o processo.

Além disso, o manual relata, no procedimento de laboratório, a ocorrência de efeitos cruzados entre os eixos durante a aplicação de tensão nos motores. Em particular, ao variar a tensão do motor associado à arfagem, observa-se deslocamento perceptível na guinada; de modo semelhante, ao variar a tensão do motor associado à guinada, observa-se influência sobre a arfagem.

Embora a planta H2-DoF deste trabalho não corresponda exatamente ao equipamento comercializado pela Quanser, o DCL é adotado como base conceitual por representar a mesma lógica de funcionamento. Assim, o diagrama auxilia a compreender o funcionamento físico da planta e serve como alicerce conceitual para a apresentação do modelo matemático, que é apresentado na Seção 2.5.

2.3 Componentes

2.3.1 Microcontrolador

O ESP32 DevKit (ESP-WROOM-32) utilizado neste trabalho é uma placa de desenvolvimento baseada no SoC ESP32, com arquitetura Xtensa LX6 dual-core de 32 bits e clock máximo de 240 MHz. A plataforma dispõe de 520 kB de RAM, 448 kB de ROM e 4 MB de memória flash, oferecendo recursos suficientes para aplicações embarcadas com execução de rotinas periódicas e integração com periféricos externos. Além disso, disponibiliza até 30 pinos de GPIO, com suporte a interfaces digitais como PWM, I2C e SPI, bem como conversores analógico-digitais de 12 bits (até 18 canais) e dois canais de DAC de 8 bits. Como recurso adicional, o módulo incorpora conectividade Bluetooth v4.2 (BR/EDR e BLE), ampliando possibilidades de comunicação, monitoramento e instrumentação quando necessário. A placa DevKit integra interface USB para programação e alimentação, regulador de 3,3 V e circuitos de suporte que facilitam a prototipagem e a conexão aos demais módulos do sistema.

Em síntese, o ESP32 DevKit (ESP-WROOM-32) atua como o “cérebro” do projeto por reunir, em uma plataforma compacta, capacidade de processamento e periféricos que simplificam a integração com o restante do hardware, além de oferecer uma interface pronta para programação e testes. As principais especificações técnicas da placa são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Características do ESP32 DevKit (ESP-WROOM-32).

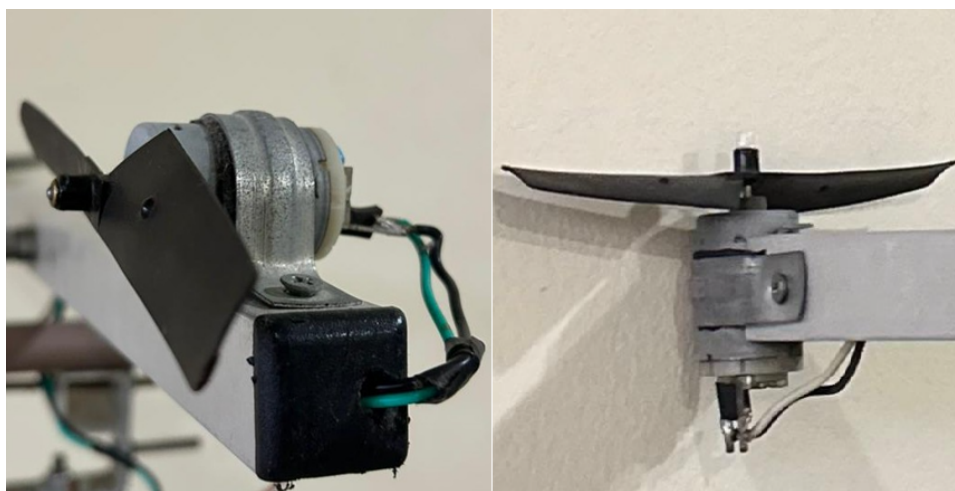
Parâmetro	Especificação
CPU	Xtensa® Dual-Core 32-bit LX6
ROM	448 KBytes
RAM	520 KBytes
Flash	4 MB
Clock máximo	240 MHz
GPIO	30 pinos (PWM, I2C e SPI)
ADC	18 canais (12 bits)
DAC	2 (8 bits)
Bluetooth	v4.2 BR/EDR e BLE (Bluetooth Low Energy)

Fonte: (Robocraze, s.d.).

2.3.2 Sistema de Propulsão

O sistema de propulsão do H2-DoF é composto por dois conjuntos motor-hélice, cada um formado por um motor de corrente contínua acoplado a uma hélice idêntica de duas pás. Esses conjuntos são responsáveis pela atuação nos eixos de arfagem e guinada, permitindo aplicar torque de forma independente em cada eixo.

Figura 4 – Motores e Hélices.



Fonte: Autora.

Conforme ilustrado na Figura 4, a diferença entre os eixos está na orientação do conjunto propulsor em relação à planta: o atuador de arfagem utiliza a hélice posicionada na parte superior, produzindo um momento predominante nesse eixo; já o atuador de guinada emprega a hélice montada lateralmente, de forma a gerar o momento associado à rotação em guinada. Essa disposição física dos propulsores permite comandar separadamente os atuadores, embora a dinâmica do sistema apresente acoplamento entre os eixos.

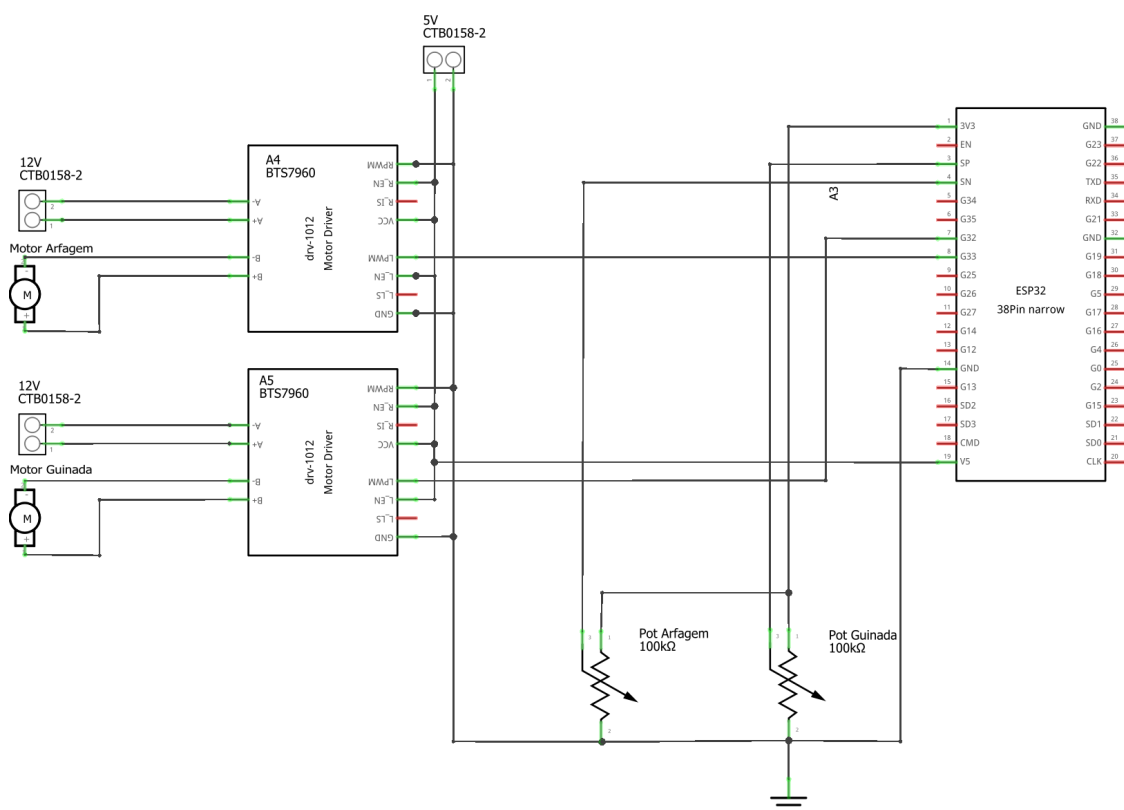
2.3.3 Módulo de Controle de Potência

Os módulos BTS7960 são responsáveis pelo acionamento dos motores, atuando como estágio de potência entre os sinais de comando do microcontrolador (nível lógico) e a potência elétrica exigida pelos motores. Esses módulos permitem comando bidirecional (inversão de sentido) e controle de intensidade por modulação por largura de pulso (PWM). Na prática, o módulo implementa uma configuração do tipo ponte H, possibilitando aplicar tensão ao motor com polaridade direta ou invertida.

Os módulos BTS7960 utilizados neste trabalho são placas de acionamento baseadas em dois circuitos integrados BTS7960 (NovalithIC), cada um operando como uma meia ponte (PN *half-bridge*). Cada CI integra um MOSFET P-channel de alta lateral e um MOSFET N-channel de baixa lateral, além do circuito de acionamento e funções de proteção. Ao combinar duas meias pontes, o módulo implementa uma ponte H completa, permitindo aplicar tensão ao motor com polaridade direta ou invertida e, assim, controlar o sentido de rotação e a intensidade de atuação por modulação por largura de pulso (PWM) (Infineon Technologies AG, 2004).

Na Figura 5 pode-se visualizar a implementação física do estágio de potência no protótipo, evidenciando a utilização de dois módulos BTS7960 para o acionamento dos motores.

Figura 5 – Diagrama de montagem elétrica do protótipo H2-DoF.



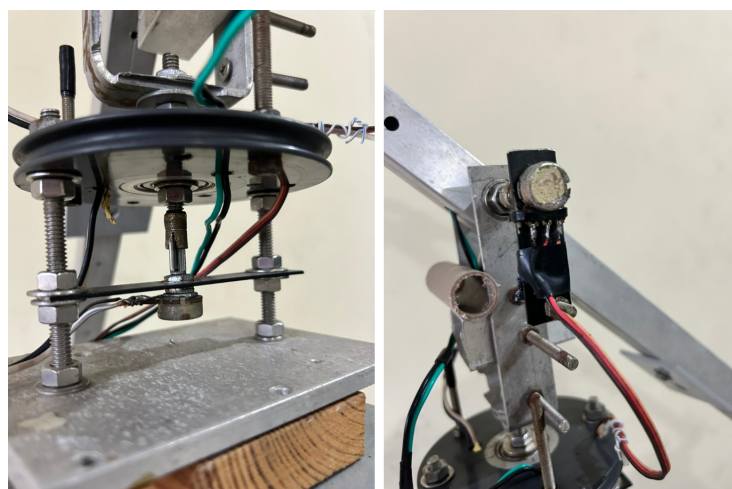
A Figura 5 apresenta o diagrama de ligação elétrica para o protótipo H2-DoF. Os motores de guinada e arfagem são acionados por dois módulos BTS7960, sendo comandados por sinais PWM gerados pelo ESP32 nas portas GPIO 32 (guinada) e GPIO 33 (arfagem). As posições angulares são medidas por dois potenciômetros, cujas tensões são lidas pelo conversor ADC do microcontrolador nas entradas 36 (guinada) e 39 (arfagem). Assim, o diagrama mostra a interface física entre sensoriamento (ADC), atuação (PWM) e o estágio de potência responsável por fornecer corrente aos motores.

2.3.4 Sistema de Aquisição de Dados e Sensoriamento

O sistema de aquisição de dados e sensoriamento é constituído por componentes de arquitetura simples. A medição das posições associadas aos movimentos de arfagem e guinada é realizada por meio de potenciômetros acoplados aos braços de cada uma das estruturas de movimentação, conforme Figura 6. A angulação desses braços é convertida em sinais elétricos de tensão contínua, os quais variam entre 0 e 3,3 V, dada a faixa de operação do ESP32. Além disso, vale destacar que há limitações operacionais e físicas relacionadas à produção dos ângulos de arfagem e guinada (no protótipo), onde o ângulo de arfagem pode ter uma variação máxima de $\pm 65^\circ$ e para o ângulo de guinada uma variação máxima de $\pm 180^\circ$ (Aras e Kaynak, 2014).

Para a conversão dos sinais de tensão em dados digitais, é utilizado o conversor analógico-digital (ADC) do microcontrolador ESP32, o qual possui resolução de 12 bits. Dessa forma, o intervalo de tensão pode ser representado por 4096 níveis discretos. Duas variáveis são responsáveis por armazenar esses valores, correspondentes a cada uma das entradas do sistema de controle no instante atual. Posteriormente, essas informações são transmitidas ao algoritmo DaqDuino por meio da interface de comunicação serial.

Figura 6 – Potenciômetros.



Fonte: Autora.

O DaqDuino é um algoritmo desenvolvido por Silveira (2026) com o objetivo de

realizar a interface entre a comunicação serial e os algoritmos de controle. Sua implementação é realizada no ambiente MATLAB, uma vez que o algoritmo de controle também é desenvolvido nessa plataforma. Por meio do DaqDuino, torna-se possível a otimização do algoritmo de controle, além de minimizar as dificuldades relacionadas à implementação.

2.4 Arquitetura do Processo

O sistema apresentado na Figura 7 tem início na planta H2-DoF, composta por dois eixos de movimento: arfagem e guinada. Cada eixo possui um motor elétrico, responsável pela atuação, e um potenciômetro, utilizado para a medição da posição angular correspondente.

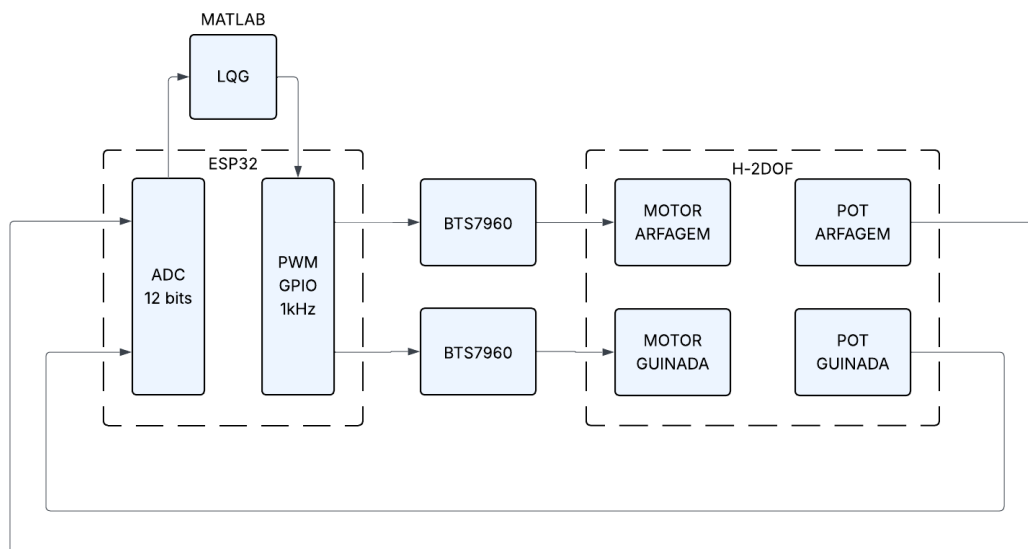
As posições angulares de arfagem e guinada são convertidas pelos potenciômetros em sinais analógicos de tensão, os quais são realimentados ao microcontrolador ESP32. Esses sinais são adquiridos por meio do conversor analógico-digital (ADC) de 12 bits, permitindo a digitalização das informações de posição com resolução adequada ao sistema de controle.

Os dados digitalizados são enviados ao ambiente MATLAB, onde está implementado o algoritmo de controle LQG. A partir das informações de estado do sistema, o controlador calcula os sinais de controle necessários para conduzir a planta ao comportamento desejado.

Em seguida, os comandos de controle retornam ao ESP32, que gera sinais de modulação por largura de pulso (PWM), com frequência de 1 kHz, por meio de suas portas GPIO. Esses sinais PWM são aplicados aos módulos BTS7960, responsáveis pelo controle de potência e acionamento dos motores de arfagem e guinada.

Os motores atuam sobre a estrutura mecânica do protótipo, alterando suas posições angulares. Essas novas posições são novamente medidas pelos potenciômetros, fechando assim a malha de realimentação do sistema.

Figura 7 – Diagrama de Blocos H2-DoF.



Fonte: Elaborado pela autora.

2.5 Modelo em Espaço de Estados

A identificação da planta pode ser obtida por diferentes métodos. Inicialmente, pode-se considerar a modelagem fenomenológica, conforme realizada por Beloli, Florêncio e Cavalca (2013) e no manual da Quanser (s.d.). Essa abordagem, também denominada *caixa branca*, consiste em obter o modelo matemático da planta com base nas leis físicas do processo. Alternativamente, pode-se empregar a identificação de sistemas dinâmicos pelo método paramétrico, ou *caixa preta*, na qual se aplica um sinal de excitação na entrada do processo, adquire-se o sinal de saída e, com o auxílio de uma ferramenta matemática, como o método dos mínimos quadrados, realiza-se o ajuste das curvas de resposta do sistema para, por fim, estimar um modelo matemático (Nascimento, 2016).

Conforme Corrêa e Aguirre (2004) apontam, a principal desvantagem da modelagem *caixa branca* é a dificuldade de obtenção do modelo, uma vez que as equações físicas envolvidas em um processo, assim como seus parâmetros, em geral não são totalmente conhecidas. Por outro lado, na modelagem *caixa preta*, destacam-se como vantagens a relativa facilidade de obtenção e a possibilidade de selecionar estruturas mais adequadas ao projeto de sistemas de controle. Assim, para este processo, optou-se pela identificação paramétrica.

Para este trabalho, adota-se o modelo estimado na dissertação de mestrado de Silva (2025), no qual o protótipo *Helicóptero H2-DoF* é modelado a partir de dados experimentais por meio de Mínimos Quadrados Recursivos (MQR).

Considera-se um sistema linear em tempo discreto e assume-se que as variáveis de

estado são medidas ou estimadas. A dinâmica é descrita por:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{\Gamma} \mathbf{w}(k-1), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \quad (2)$$

em que $\mathbf{x}(k)$ é o vetor de estados, $\mathbf{u}(k)$ é o vetor de entradas e $\mathbf{y}(k)$ é o vetor de saídas. Os termos $\mathbf{w}(\cdot)$ e $\mathbf{v}(\cdot)$ representam, respectivamente, o ruído de processo e o ruído de medição, enquanto \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\mathbf{\Gamma}$ e \mathbf{C} são as matrizes do modelo. O período de amostragem considerado é $T_s = 0,05$ s, o qual foi adotado considerando a necessidade de representar adequadamente a dinâmica da planta, mas também as limitações práticas do sistema de aquisição de dados utilizado na implementação experimental, baseado no DaqDuino para comunicação serial entre o hardware e o Matlab.

Para o vetor de estados, tem-se:

$$\mathbf{x}^T(k) = [\psi(k) \ \theta(k) \ \psi_{spd}(k) \ \theta_{spd}(k)], \quad (3)$$

em que ψ e θ representam os ângulos de guinada e arfagem, respectivamente, enquanto ψ_{spd} e θ_{spd} correspondem às derivadas discretas desses ângulos. Apesar do H2-DoF possuir leituras de apenas dois estados, o uso das derivadas discretas em (3) é considerado no projeto para tentar se obter uma melhor estimativa da dinâmica do protótipo, mesmo que o protótipo não tenha sensores de medição analógica para estes estados (Silva, 2025). O vetor de entrada é dado por:

$$\mathbf{u}^T(k) = [u_l(k) \ u_v(k)], \quad (4)$$

associado às tensões aplicadas aos rotores, onde $u_l(k)$ é a tensão aplicada ao rotor de impulso lateral e $u_v(k)$ é a tensão aplicada ao rotor de impulso vertical, ambas com faixa de operação de 0 a 5V.

Como apenas as variáveis associadas aos dois ângulos são medidas, a matriz de saída \mathbf{C} é mantida fixa na forma $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{j \times j} & \mathbf{0}_{j \times (n-j)} \end{bmatrix}$, o que, para $n = 4$ e $j = 2$, resulta em:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Por fim, neste trabalho, adota-se o modelo identificado e validado por Silva (2025), obtido por identificação paramétrica via MQR. No processo de identificação descrito pelo autor, os parâmetros do modelo foram atualizados iterativamente pelo estimador, gerando, ao longo das iterações, diferentes candidatos para representar a dinâmica discreta do sistema. Para a definição do modelo final, foi proposta uma etapa adicional de avaliação computacional, implementada em MATLAB, na qual os modelos obtidos foram organizados em forma matricial, simulados e comparados com as saídas medidas do ensaio de

identificação em malha aberta do protótipo H2-DoF. A aderência de cada candidato à dinâmica experimental foi avaliada por meio de uma função custo baseada no erro médio quadrático entre as saídas estimadas e as saídas medidas, expressa nas Equações (20) e (21) de Silva (2025), sendo adotado como modelo final aquele que apresentou o menor valor global de J_{MSE} , índice global de erro médio quadrático utilizado na comparação entre os modelos estimados. Além disso, o modelo selecionado foi posteriormente submetido a uma etapa de validação com uma nova base de dados, a fim de verificar sua capacidade de generalização. Dessa forma, o modelo adotado não corresponde apenas ao resultado imediato da identificação, mas àquele que, dentre os estimados pelo MQR, apresentou melhor capacidade de representar a dinâmica do protótipo no conjunto de ensaios considerado. Neste trabalho, adota-se diretamente o conjunto de matrizes identificadas e validadas por Silva (2025) (eqs. (127)–(129)), dado por:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}}_{x(k)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0,98693 & 0,00680 & 0,01817 & 0,01255 \\ 0,00251 & 0,92555 & 0,00574 & -0,00428 \\ -0,16821 & 0,41685 & 0,43939 & 0,34065 \\ 0,05298 & -1,15616 & 0,12515 & -0,01020 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \\ x_4(k-1) \end{bmatrix}}_{x(k-1)} \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0,05586 & -0,03637 \\ -0,00944 & 0,11051 \\ 0,80150 & -1,06704 \\ -0,20499 & 1,77447 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u_l(k-1) \\ u_v(k-1) \end{bmatrix}}_{u(k-1)} \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0,00374 & 0,00599 & -0,01101 & -0,01207 \\ -0,01709 & 0,08964 & -0,00304 & -0,00583 \\ -0,09341 & 0,35006 & -0,26538 & -0,34307 \\ -0,41855 & 2,28729 & -0,07562 & -0,20413 \end{bmatrix}}_\Gamma \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{w}_1(k-1) \\ \hat{w}_2(k-1) \\ \hat{w}_3(k-1) \\ \hat{w}_4(k-1) \end{bmatrix}}_{w(k-1)}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix}}_{y(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}}_{x(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix}}_{v(k)}. \tag{7}$$

$$\sigma_w^2 = \begin{bmatrix} 0,00146 \\ 0,00027 \\ 0,14741 \\ 0,06085 \end{bmatrix}, \quad \sigma_v^2 = \begin{bmatrix} 0,00146 \\ 0,00027 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

onde os estados x_1 , x_2 , x_3 e x_4 representam, respectivamente, o ângulo de guinada (ψ), o ângulo de arfagem (θ), a derivada discreta do ângulo de guinada (ψ_{spd}) e a derivada discreta do ângulo de arfagem (θ_{spd}). As variâncias de ruído de processo e do ruído de medição $v(k)$ são representadas por σ_w^2 e σ_v^2 respectivamente.

Embora o modelo identificado apresente também a forma estocástica completa, com termo de ruído de processo $\Gamma w(k)$ e ruído de medição $v(k)$, neste trabalho o projeto do controlador e as análises iniciais são conduzidos a partir do modelo nominal determinístico (**A,B,C**).

Portanto, a partir deste modelo é desenvolvido o projeto do compensador dinâmico LQG discutido neste trabalho. Além disso, ressalta-se que informações adicionais sobre a etapa de validação do modelo podem ser consultadas na dissertação de Silva (2025).

3 Controle Ótimo Multivariável em Espaço de Estados

Neste capítulo, apresentam-se os principais conceitos de Teoria de Controle Ótimo que fundamentam o desenvolvimento deste trabalho. O foco recai sobre técnicas de controle ótimo aplicadas a sistemas multivariáveis em tempo discreto. Em particular, descreve-se o projeto do controlador Linear Quadrático Gaussiano (LQG) utilizado para controlar o processo H2-DoF.

3.1 Visão Geral

O desenvolvimento da teoria de controle ótimo está intimamente ligado à evolução do cálculo das variações e dos princípios de otimalidade, cuja origem remonta a Johann Bernoulli com o problema da braquistócrona no século XVII. Ao longo do tempo, esse campo foi ampliado por contribuições de Fermat, Euler, Lagrange e Hamilton, entre outros. No século XX, os fundamentos modernos foram consolidados por Richard Bellman, com o princípio da programação dinâmica em 1957, e por Lev Pontryagin, com o princípio do máximo em 1958. A partir da década de 1960, a teoria de controle entrou em uma nova fase com os trabalhos de Rudolf E. Kalman, que apresentou uma formulação sistemática para o projeto de controladores ótimos no espaço de estados. Entre suas principais contribuições estão a formalização do conceito de estado, a síntese LQR e o desenvolvimento do filtro de Kalman. Essas inovações contribuíram para superar limitações das abordagens no domínio da frequência e consolidaram o que se convencionou denominar controle moderno, com aplicações diretas em estruturas como o LQG (Andrei, 2006).

Essa formulação em espaço de estados é especialmente conveniente em sistemas multivariáveis, como discutido anteriormente. Posto isso, uma abordagem frequentemente utilizada no controle por realimentação total de estados é a construção de um único controlador responsável por coordenar as ações de controle do sistema. No contexto multivariável, métodos baseados em modelo permitem tratar o problema de forma integrada, considerando simultaneamente as interações entre entradas e saídas, como no projeto LQG baseado na análise de ganhos principais (Stevens, Lewis e Johnson, 2016). Como as decisões tomadas por esse controlador dependem diretamente das informações de estado, a qualidade do modelo matemático torna-se determinante para a eficácia da estratégia de controle (Ogata, 2010). Além disso, em sistemas multivariáveis, a presença de acoplamentos pode impor limitações relevantes ao desempenho, tornando desejável a adoção de técnicas que favoreçam robustez e estabilidade em malha fechada (Skogestad e Postlethwaite, 2005). Diante desse cenário, justifica-se a escolha do LQG como estratégia de controle para o processo H2-DoF.

3.2 Considerações de Projeto

3.2.1 Pré-compensador digital de ganho direto

Em muitas aplicações multivariáveis, é conveniente reduzir diferenças de escala entre os canais do processo, de modo que as respostas apresentem comportamento mais uniforme, especialmente na vizinhança de baixas frequências, associadas ao regime permanente. Para esse fim, adota-se neste trabalho um pré-compensador estático aplicado na entrada, calculado a partir da inversa do ganho em regime permanente (ganho DC) do modelo nominal. Essa escolha atua como uma normalização do ganho estático do processo, buscando tornar a relação entrada-saída em regime permanente aproximadamente unitária e, conseqüentemente, mitigar desbalanceamentos entre os canais na faixa de baixa frequência. Uma discussão mais aprofundada da motivação e da interpretação dessa abordagem no contexto da análise multivariável no domínio da frequência pode ser encontrada no Capítulo 6 de Stevens, Lewis e Johnson (2016).

Para o caso discreto, seguindo a formulação apresentada por Silva (2025), desenvolvida para a mesma planta H2-DoF, define-se a matriz de ganho DC como o valor da matriz de funções de transferência em $z = 1$, resultando em:

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} K_{s11} & K_{s12} \\ K_{s21} & K_{s22} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

onde \mathbf{K}_s representa o ganho estático entre as duas entradas e as duas saídas do sistema em malha aberta. Assumindo \mathbf{K}_s não singular, a pré-compensação estática é então dada por:

$$\mathbf{P}_c = \mathbf{K}_s^{-1} = \begin{bmatrix} P_{c11} & P_{c12} \\ P_{c21} & P_{c22} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Com essa escolha, o ganho em regime permanente do conjunto formado pelo pré-compensador e pela planta torna-se unitário, isto é, $\mathbf{K}_s \mathbf{P}_c = \mathbf{I}$.

Na implementação no MATLAB, \mathbf{K}_s é obtido por meio do operador `dcgain` aplicado ao modelo em malha aberta. Em seguida, calcula-se $\mathbf{P}_c = \mathbf{K}_s^{-1}$ e a aplicação de \mathbf{P}_c na entrada é equivalente a empregar um modelo pré-compensado com matriz de entrada modificada,

$$\mathbf{B}_{pc} = \mathbf{B} \mathbf{P}_c, \quad (11)$$

resultando no sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}_{pc} \mathbf{u}(k-1), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (12)$$

Posto isso, para o modelo identificado deste trabalho, o ganho estático K_s obtido é:

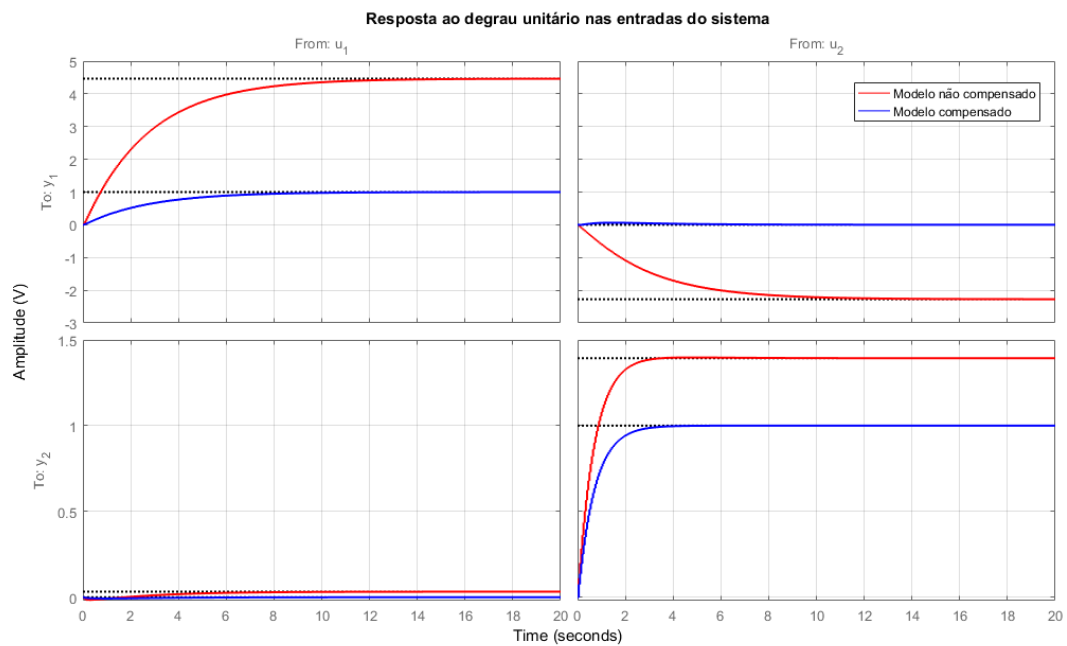
$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} 4,4654 & -2,2757 \\ 0,0324 & 1,3932 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Assim, o pré-compensador estático, dado por $\mathbf{P}_c = \mathbf{K}_s^{-1}$, resulta em:

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} 0,2213 & 0,3615 \\ -0,0052 & 0,7094 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Na Figura 8, pode-se analisar a resposta ao degrau em todos os canais do sistema, em malha aberta, antes e após a pré compensação. Em vermelho, refere-se ao sistema não compensado, e em azul ao sistema compensado.

Figura 8 – Comparação da resposta ao degrau após compensação.



Fonte: Elaborado pela autora.

No sistema não compensado, há uma clara discrepância de escala entre os canais principais. Observa-se que as respostas em regime permanente apresentam escalas distintas e que há acoplamento estático entre os canais, evidenciado pelos valores finais diferentes de 1 e pela influência significativa de uma entrada sobre a saída não correspondente.

Após a aplicação do pré-compensador \mathbf{P}_c , as respostas passam a convergir para valores próximos de 1 nas componentes diagonais, como esperado para a normalização do ganho em regime permanente (ganho DC). Ao mesmo tempo, as respostas cruzadas permanecem próximas de zero, o que evidencia a redução do acoplamento estático e do desbalanceamento entre os canais em baixas frequências. Observa-se ainda que a dinâmica transitória é preservada em grande parte.

Essa normalização em baixa frequência é importante porque evita que diferenças de ganho DC entre canais influenciem o projeto do controlador. Assim, o controlador LQG é desenvolvido a partir deste modelo pré compensado.

3.3 Aumento do Modelo de Estados

A planta identificada utilizada neste trabalho não possui integradores puros em sua dinâmica discreta, de modo que pode ser caracterizada como um sistema *tipo-0*. Para que um sistema LQG seja usado tanto para rastreamento de referência quanto para regulação, deve-se utilizar controle incremental ou o algoritmo de controle na forma de velocidade, a fim de obter uma resposta sem deslocamento para referências constantes em degrau (Silveira et al., 2018). No presente trabalho, essa inclusão é realizada na forma de velocidade, por meio da variação discreta do sinal de controle, tal que:

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1), \quad (15)$$

onde $\Delta = (1 - z^{-1})$ é a diferença discreta da entrada de controle, de modo que o sinal aplicado ao processo seja obtido por:

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k). \quad (16)$$

A versão aumentada por integradores, a partir do modelo do sistema obtido em (12), é construída com base no vetor de estado aumentado:

$$\mathbf{x}_a(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(\mathbf{k}) \\ \Delta \mathbf{x}(\mathbf{k}) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

onde,

$$\mathbf{x}_a^T(k) = \left[\psi(k) \quad \theta(k) \quad \Delta\psi(k) \quad \Delta\theta(k) \quad \Delta\psi_{\text{spd}}(k) \quad \Delta\theta_{\text{spd}}(k) \right]. \quad (18)$$

Note que $\mathbf{x}_a(\mathbf{k})$ possui seis estados, pois é composto por duas variáveis medidas, $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{R}^2$, e por quatro incrementos de estado, $\Delta x(k) \in \mathbf{R}^4$, logo $\mathbf{x}_a(\mathbf{k}) \in \mathbf{R}^6$. Com essa definição do vetor de estado aumentado, o sistema pode ser reescrito na forma aumentada como:

$$\mathbf{x}_a(k) = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a(k-1) + \mathbf{B}_a \Delta \mathbf{u}(k-1), \quad (19)$$

$$\mathbf{y}_a(k) = \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a(k) \quad (20)$$

com

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{CA} \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{CB}_{pc} \\ \mathbf{B}_{pc} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2 \times 4} \end{bmatrix},$$

De acordo com Silveira (2024), a vantagem de realizar a aumento de modelos desta forma se deve ao fato dela utilizar somente variáveis que de fato são função do modelo nominal, o que garante que as propriedades do modelo nominal sejam preservadas; isto é, se o modelo nominal for observável e controlável, o modelo aumentado também o será. Além disso, para mais detalhes do formalismo matemático envolvido neste método de aumento, pode-se consultar (Anderson e Moore, 1971).

Todos os projetos deste trabalho, formulados em espaço de estados, são elaborados com base na representação por modelo aumentado.

3.4 Controlabilidade e Observabilidade

No estudo dos sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo, os conceitos de controlabilidade e observabilidade são fundamentais para a análise dos sistemas de controle. Esses conceitos permitem determinar, respectivamente, se é possível conduzir o sistema a qualquer estado desejado por meio de entradas apropriadas e se é possível reconstruir completamente os estados internos do sistema a partir das saídas medidas (Ogata, 2010).

A controlabilidade está associada à capacidade de transferir o sistema de um estado inicial qualquer para um estado final arbitrário em tempo finito, por meio de uma entrada adequada. Para sistemas lineares representados no espaço de estado, essa propriedade pode ser verificada por meio da matriz de controlabilidade:

$$\mathbf{C}_o = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (21)$$

Considerando o sistema representado no espaço de estado nas Equações (1) e (2), bem como as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} definidas em (6), obtém-se a seguinte matriz de controlabilidade:

$$\mathbf{C}_o = \begin{bmatrix} 0,0126 & -0,0056 & 0,0150 & 0,0014 & 0,0162 & 0,0040 & 0,0167 & 0,0051 \\ -0,0027 & 0,0750 & -0,0011 & 0,0616 & -0,0008 & 0,0590 & -0,0006 & 0,0553 \\ 0,1829 & -0,4672 & 0,0586 & 0,2305 & 0,0320 & 0,0731 & 0,0141 & 0,0422 \\ -0,0545 & 1,1846 & 0,0272 & -0,1575 & 0,0092 & -0,0407 & 0,0057 & -0,0585 \end{bmatrix} \quad (22)$$

O sistema é considerado controlável quando o posto da matriz de controlabilidade é igual à ordem n do sistema. Nesta pesquisa, como o sistema analisado é de quarta ordem, tem-se $n = 4$. Assim, a condição de controlabilidade é satisfeita quando:

$$\text{rank}(\mathbf{C}_o) = n = 4 \quad (23)$$

De semelhante maneira, a observabilidade refere-se à capacidade de determinar o estado interno do sistema a partir das medições da saída ao longo do tempo. A matriz de observabilidade é definida como:

$$\mathbf{O}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Considerando as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{C} definidas em (6) e (7), obtém-se a seguinte matriz de observabilidade:

$$\mathbf{O}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,9869 & 0,0068 & 0,0182 & 0,0126 \\ 0,0025 & 0,9255 & 0,0057 & -0,0043 \\ 0,9717 & 0,0061 & 0,0275 & 0,0184 \\ 0,0036 & 0,8640 & 0,0073 & -0,0019 \\ 0,9553 & 0,0024 & 0,0321 & 0,0214 \\ 0,0044 & 0,8050 & 0,0080 & -0,0011 \end{bmatrix} \quad (25)$$

O sistema é dito observável se o posto da matriz de observabilidade for igual à ordem n do sistema. Assim, a condição de observabilidade é satisfeita quando:

$$\text{rank}(\mathbf{O}_b) = n = 4 \quad (26)$$

Dessa forma, verifica-se que o sistema é controlável e observável, o que viabiliza a aplicação do controle LQG ao problema em estudo.

3.5 Regulador Linear Quadrático

O controle ótimo é um ramo específico do controle moderno, onde o sistema que é o resultado final de um projeto ótimo, não deve apenas ser estável, ter uma certa largura de banda, ou satisfazer qualquer uma das restrições desejáveis associadas ao controle clássico, mas deve ser aquele que minimiza uma função de custo quadrática, fornecendo o resultado ótimo do ponto de vista matemático (Anderson e Moore, 1971).

O Controle Linear Quadrático foi consolidado a partir dos trabalhos publicados por Rudolf E. Kalman na década de 60, em especial com os trabalhos (KALMAN, 1960a) e (KALMAN, 1960b), nos quais ele sistematizou o projeto de controle ótimo por meio do formalismo matemático em espaço de estados e apresentou o FK, que serviu de alicerce para a teoria de controle moderno.

O problema LQR, no horizonte infinito e no caso discreto para o modelo aumentado, consiste em minimizar o seguinte índice de desempenho quadrático (Silveira et al., 2018):¹

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [x_a^T(k) \mathbf{Q}_{lq} x_a(k) + \Delta u^T(k) \mathbf{R}_{lq} \Delta u(k)], \quad (27)$$

onde \mathbf{Q}_{lq} é uma matriz de ponderação simétrica semidefinida positiva para a minimização dos estados e \mathbf{R}_{lq} é uma matriz de ponderação simétrica definida positiva para a minimização do incremento de controle $\Delta u(k)$.

¹ Silveira et al. (2018) apresentam a formulação com base em Bitmead et al. (1990) e Stevens, Lewis e Johnson (2016).

O objetivo do LQR é encontrar um ganho ótimo de realimentação de estado total \mathbf{K} que minimize o custo quadrático J quando, para o caso regulatório, a lei de controle,

$$\Delta \mathbf{u}(k) = -\mathbf{K} \mathbf{x}_a(k), \quad (28)$$

é aplicado na entrada do modelo aumentado da planta. No instante $k - 1$, tem-se $\Delta u(k - 1) = -\mathbf{K} \mathbf{x}_a(k - 1)$. Substituindo essa expressão em (19), tem-se o modelo de estado aumentado dado por:

$$\mathbf{x}_a(k) = (\mathbf{A}_a - \mathbf{B}_a \mathbf{K}) \mathbf{x}_a(k - 1), \quad (29)$$

onde deve existir um ganho \mathbf{K} tal que a matriz $(\mathbf{A}_a - \mathbf{B}_a \mathbf{K})$ seja estável.

A solução do problema de otimização recai em obter a matriz de ganho \mathbf{K} a partir da solução da equação a diferenças de Riccati (ARE – Algebraic Riccati Equation), descrita por:

$$\mathbf{P}_{lq}(k + 1) = \mathbf{A}_a^T \mathbf{P}_{lq}(k) \mathbf{A}_a - \mathbf{A}_a^T \mathbf{P}_{lq}(k) \mathbf{B}_a (\mathbf{B}_a^T \mathbf{P}_{lq}(k) \mathbf{B}_a + \mathbf{R}_{lq})^{-1} \mathbf{B}_a^T \mathbf{P}_{lq}(k) \mathbf{A}_a + \mathbf{Q}_{lq}. \quad (30)$$

A partir da solução da ARE, obtém-se a matriz $\mathbf{P}_{lq}(\infty)$ quando $k \rightarrow \infty$, e a partir disso, encontra-se o ganho \mathbf{K} que é dado por:

$$\mathbf{K} = \left[\mathbf{A}_a^T \mathbf{P}_{lq}(\infty) \mathbf{B}_a (\mathbf{B}_a^T \mathbf{P}_{lq}(\infty) \mathbf{B}_a + \mathbf{R}_{lq})^{-1} \right]^T. \quad (31)$$

Como o objetivo deste trabalho não é resolver analiticamente essas equações, os resultados foram obtidos computacionalmente no MATLAB por meio do comando *dlqr*.

Para obter seguimento de referência, que é o objetivo deste trabalho, a lei de controle incremental dada em (28) muda para:

$$\Delta u(k) = \underbrace{K_y y_r(k)}_{\text{Parte Servo}} - \underbrace{K x_a(k)}_{\text{Parte Regulador}}. \quad (32)$$

Substituindo essa expressão na equação de estados do modelo aumentado (19), obtém-se o modelo do sistema controlado em malha fechada para o caso servo, dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_a(k) &= (\mathbf{A}_a - \mathbf{B}_a \mathbf{K}) \mathbf{x}_a(k - 1) + (\mathbf{B}_a \mathbf{K}_y) \mathbf{y}_r(k - 1), \\ \mathbf{y}_a(k) &= \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a(k). \end{aligned} \quad (33)$$

Note que, para o sistema MIMO utilizado neste trabalho, tem-se que $\Delta \mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{x}_a(k) \in \mathbb{R}^6$. Assim, a Equação (31) resulta em uma matriz de ganhos de ordem 2×6 ($\mathbf{K}_{2 \times 6}$), dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

A definição de \mathbf{K}_y decorre diretamente da definição do vetor de estado aumentado adotada neste trabalho, definida como $\mathbf{x}_a(\mathbf{k}) = \left[\mathbf{y}(\mathbf{k}) \quad \Delta \mathbf{x}(\mathbf{k}) \right]^T$, em que $y(k) \in \mathbb{R}^2$ corresponde às duas saídas medidas e ocupa as duas primeiras componentes de $x_a(k)$. Dessa forma, pode-se particionar:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_y & \mathbf{K}_{\Delta x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_y \in R^{2 \times 2}, \quad \mathbf{K}_{\Delta x} \in R^{2 \times 4}. \quad (35)$$

Logo, a partir da (34), tem-se que:

$$\mathbf{K}_y = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Por fim, a sintonia do controlador LQR é realizada por meio do ajuste das matrizes de ponderação $\mathbf{Q}_{\mathbf{lq}}$ e $\mathbf{R}_{\mathbf{lq}}$, nas quais as magnitudes relativas de seus elementos definem o compromisso entre desempenho do sistema e esforço de controle, o que se reflete diretamente no consumo energético (Stevens, Lewis e Johnson, 2016). Dessa forma, quanto maior a magnitude de determinado elemento da matriz de ponderação, maior será a minimização da variável correspondente.

Conforme observado por Silva (2025), sintonias mais agressivas tenderam a degradar a estabilidade no experimento real, principalmente para a malha de θ , que é mais suscetível à instabilização em função das não linearidades presentes no sistema H2-DOF e que não foram captadas na etapa de identificação feita em Silva (2025). Diante disso, a sintonia do LQR é conduzida buscando uma dinâmica mais conservadora. As matrizes de ponderação são ajustadas de forma iterativa, por tentativa e erro, até obter seguimento de referência satisfatório sem tornar a atuação excessivamente agressiva. As matrizes de ponderação $\mathbf{Q}_{\mathbf{lq}}$ e $\mathbf{R}_{\mathbf{lq}}$ são sintonizadas como:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{lq}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{lq}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

As matrizes $\mathbf{Q}_{\mathbf{lq}}$ e $\mathbf{R}_{\mathbf{lq}}$ são escolhidas de forma prática. A ideia é ajustar os pesos até que o controlador apresente um seguimento de referência satisfatório, sem ficar agressivo demais. Assim, adota-se inicialmente $\mathbf{R}_{\mathbf{lq}}$ diagonal com pesos iguais para as duas entradas, de modo a não privilegiar nenhum atuador. Em seguida, define-se $\mathbf{Q}_{\mathbf{lq}}$ diagonal atribuindo-se pesos unitários às componentes associadas às saídas y_1 e y_2 , e pesos mais elevados às componentes associadas às variações de estado $\Delta \mathbf{x}_a(\mathbf{k})$, de forma a minimizá-las, buscando reduzir oscilações e tornar a dinâmica mais suave. A partir desses ajustes nas variações de estados, os resultados são satisfatórios.

Dessa forma, esses são os valores finais de $\mathbf{Q}_{\mathbf{lq}}$ e $\mathbf{R}_{\mathbf{lq}}$ que correspondem ao conjunto que, na prática, fornece o melhor compromisso entre desempenho de seguimento e esforço de controle para a planta, dentre todos os experimentos realizados para a elaboração deste trabalho.

Após a definição das matrizes \mathbf{Q}_{1q} e \mathbf{R}_{1q} , obtém-se a matriz de ganho K a partir da solução da equação a diferenças de Riccati dada em (30):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.2615 & 0.0635 & 8.1189 & 2.1011 & 2.6312 & 1.8042 \\ 0.0158 & 0.0384 & 0.5066 & 0.3577 & 0.2093 & 0.0599 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

E, para a matriz de ganho K_y , de acordo com a equação (36), tem-se:

$$\mathbf{K}_y = \begin{bmatrix} 0.2615 & 0.0635 \\ 0.0158 & 0.0384 \end{bmatrix} \quad (40)$$

que corresponde às duas primeiras colunas da matriz de ganho \mathbf{K} .

3.6 Estimação de estados: Filtro de Kalman discreto

Para a solução do problema LQR visto anteriormente, considera-se que todos os estados estão disponíveis e podem ser medidos diretamente, mas isso nem sempre é válido. Sendo este o caso, por exemplo, de controle de aeronaves, onde raramente todos os estados estão disponíveis para fins de realimentação. Em vez disso, apenas as saídas medidas estão acessíveis. Usando a teoria moderna de controle, se as saídas medidas capturarem informação suficiente sobre a dinâmica do sistema, é possível utilizá-las para estimar, ou observar, todos os estados. Em seguida, essas estimativas de estado podem ser usadas para realimentação (Stevens, Lewis e Johnson, 2016).

Dentro dessa abordagem, o filtro de Kalman se destaca por permitir reconstruir estados não medidos a partir do modelo e das saídas, viabilizando o uso de realimentação de estados com base em estimativas. O projeto de estimador ótimo do FK é dual ao controlador LQR. A diferença entre os projetos, é que o objetivo do controlador LQR é reduzir o erro entre a saída do processo e o sinal de referência, enquanto o objetivo do FK é reduzir o erro entre a saída estimada e a saída medida (Åström e Wittenmark, 1997; Anderson e Moore, 1971).

Assim como no LQR busca-se encontrar o ganho ótimo \mathbf{K} , o problema do Filtro de Kalman pode ser resumido em obter o ganho ótimo de Kalman, \mathbf{L} , tal que o estimador, baseado no modelo aumentado, seja dado por

$$\hat{\mathbf{x}}_a(k+1) = \mathbf{A}_a \hat{\mathbf{x}}_a(k) + \mathbf{B}_a \Delta \mathbf{u}(k) + \mathbf{L}[\mathbf{y}_a(k) - \hat{\mathbf{y}}_a(k)], \quad (41)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_a(k) = \mathbf{C}_a \hat{\mathbf{x}}_a(k). \quad (42)$$

onde $\hat{\mathbf{x}}_a$ e $\hat{\mathbf{y}}_a$ são, respectivamente, os estados estimados e a saída estimada. O objetivo é minimizar o erro de estimação definido por $\mathbf{e}_{\text{est}}(k) = \mathbf{x}_a(k) - \hat{\mathbf{x}}_a(k)$. O cálculo de \mathbf{L} é realizado a partir da minimização do funcional quadrático:

$$J = E \left\{ [\mathbf{x}_a(k) - \hat{\mathbf{x}}_a(k)]^T [\mathbf{x}_a(k) - \hat{\mathbf{x}}_a(k)] \right\}. \quad (43)$$

Substituindo (42) em (41), é possível tornar explícita a estrutura em malha fechada do FK, a qual se assemelha ao caso regulatório do LQR em malha fechada, isto é,

$$\hat{\mathbf{x}}_a(k+1) = (\mathbf{A}_a - \mathbf{L}\mathbf{C}_a)\hat{\mathbf{x}}_a(k) + \mathbf{B}_a \Delta \mathbf{u}(k) + \mathbf{L} \mathbf{y}_a(k). \quad (44)$$

A equação a diferenças de Riccati, utilizada para encontrar o ganho de Kalman, é expressa por:

$$\mathbf{S}(k+1) = \mathbf{A}_a \mathbf{S}(k) \mathbf{A}_a^T - \mathbf{A}_a \mathbf{S}(k) \mathbf{C}_a^T (\mathbf{C}_a \mathbf{S}(k) \mathbf{C}_a^T + \mathbf{R}_{kf})^{-1} \mathbf{C}_a \mathbf{S}(k) \mathbf{A}_a^T + \mathbf{Q}_{kf}. \quad (45)$$

Assim, a partir da solução da equação de Riccati, obtém-se a matriz $\mathbf{S}(\infty)$ quando $k \rightarrow \infty$ e, a partir disso, encontra-se o ganho ótimo do estimador, dado por:

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}_a \mathbf{S}(\infty) \mathbf{C}_a^T (\mathbf{C}_a \mathbf{S}(\infty) \mathbf{C}_a^T + \mathbf{R}_{kf})^{-1}. \quad (46)$$

Comparando as expressões em malha fechada do LQR e do estimador do Filtro de Kalman, observa-se uma semelhança estrutural clara entre ambos. Desta forma, essa correspondência evidencia a dualidade entre os dois problemas, pois ambos resultam na síntese de um ganho ótimo a partir de uma equação de Riccati (Stevens, Lewis e Johnson, 2016). Posto isso, neste trabalho, o ganho L é obtido por meio da dualidade entre o problema LQR e o filtro de Kalman em regime permanente, utilizando a relação:

$$\mathbf{A}_a \leftrightarrow \mathbf{A}_a^T, \quad \mathbf{B}_a \leftrightarrow \mathbf{C}_a^T, \quad \mathbf{K} \leftrightarrow \mathbf{L}^T.$$

Dessa forma, o ganho do filtro pode ser calculado computacionalmente a partir da solução do problema LQR aplicado ao sistema transposto, isto é, por meio do comando `dlqr` no par $(\mathbf{A}_a^T, \mathbf{C}_a^T)$, seguido de transposição do ganho.

Para o projeto do FK, as matrizes de covariâncias \mathbf{Q}_{kf} e \mathbf{R}_{kf} são definidas de forma prática, por tentativa e erro, visando assegurar boa convergência do estimador e qualidade na estimação das variáveis de estado.

Em particular, adota-se:

$$\mathbf{Q}_{kf} = \mathbf{C}_a^T \mathbf{C}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (47)$$

$$\mathbf{R}_{kf} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

No filtro de Kalman, a matriz \mathbf{Q}_{kf} está associada à covariância das incertezas do processo, enquanto a matriz \mathbf{R}_{kf} representa a covariância das incertezas presentes nas medições. Assim, a escolha dessas matrizes define como o estimador equilibra a confiança atribuída ao modelo e às informações fornecidas pelos sensores.

Neste trabalho, a matriz \mathbf{Q}_{kf} foi escolhida como $\mathbf{C}_a^T \mathbf{C}_a$, resultando em pesos unitários apenas nas duas primeiras componentes da diagonal. Considerando o vetor de estados aumentado definido em (18), isso equivale a considerar incertezas de processo apenas nas variáveis $\psi(k)$ e $\theta(k)$, diretamente associadas às saídas medidas da planta. Para as demais componentes incrementais, adotaram-se pesos nulos em \mathbf{Q}_{kf} , o que equivale a assumir, no contexto da sintonia empregada, maior confiança no modelo para essas componentes, sem a necessidade de introduzir incertezas adicionais.

Já a matriz \mathbf{R}_{kf} foi definida diagonal, com valores unitários e iguais para os dois canais de medição. Isso significa assumir que as duas saídas medidas, $\psi(k)$ e $\theta(k)$, estão sujeitas a níveis semelhantes de incerteza, além de considerar ausência de correlação entre os ruídos de medição. Dessa forma, mantém-se coerência entre a modelagem das incertezas associadas às variáveis medidas e a forma como essas medições são incorporadas pelo estimador.

Após definir as matrizes de covariâncias, resolve-se a equação de Riccati dada em (45), obtendo-se o ganho ótimo do estimador, dado por:

$$L = \begin{bmatrix} 0.61803 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.61803 \\ 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Observa-se que o ganho do filtro de Kalman apresenta valores não nulos apenas nas duas primeiras linhas, associadas às componentes de saída $\psi(k)$ e $\theta(k)$. Esse resultado é coerente com a sintonia adotada para \mathbf{Q}_{kf} e \mathbf{R}_{kf} , na qual as incertezas de processo foram consideradas apenas nessas duas componentes do vetor de estados aumentado. Assim, a correção promovida pelo estimador atua diretamente sobre as variáveis medidas, enquanto os demais estados são estimados predominantemente a partir da dinâmica do modelo.

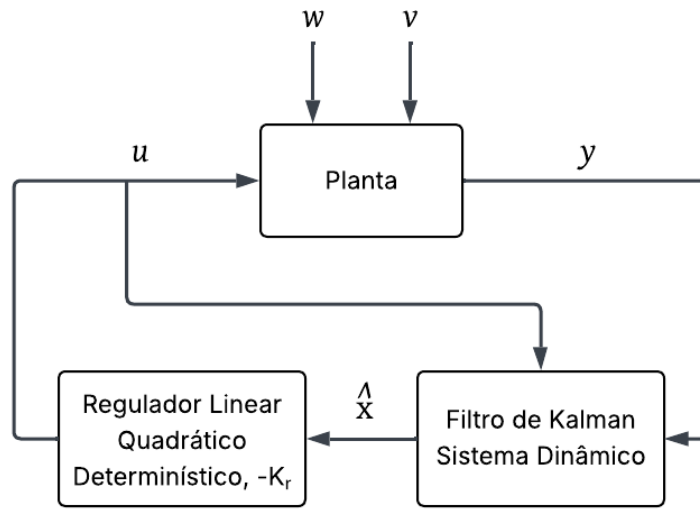
3.7 Controlador LQG

O controle ótimo, baseado no trabalho de filtragem ótima de Wiener na década de 1940, atingiu sua maturidade na década de 1960 com o que agora chamamos de controle linear quadrático gaussiano, também conhecido como LQG, cujo nome surge do uso de um modelo linear, uma função de custo quadrática integral e processos de ruído branco gaussiano para modelar sinais de perturbação e ruído. Seu desenvolvimento coincidiu com grandes programas de pesquisa e considerável financiamento nos Estados Unidos e na antiga União Soviética em problemas

relacionados ao espaço. A solução para o problema LQG, conhecida como Teorema da Separação ou Princípio da Equivalência por Certeza, é surpreendentemente simples e elegante (Skogestad e Postlethwaite, 2005), como ilustrado na Figura 9.

O Princípio da Separação é comumente aplicado a sistemas de controle lineares e permite que o sistema LQR seja projetado independentemente do filtro de Kalman e, posteriormente, usado junto como um compensador dinâmico (Silveira et al., 2018).

Figura 9 – Teorema da Separação.



Fonte: (Skogestad e Postlethwaite, 2005)

Dessa forma, a estratégia de controle LQG pode ser separada em duas partes: um estimador de estados (FK), que fornece as melhores estimativas dos estados a partir das saídas observadas, e uma lei de realimentação linear dos estados estimados (LQ) (Åström e Wittenmark, 1997). Portanto, a estratégia LQG possui a vantagem de operar em processos cuja variável de estado encontra-se indisponível indiretamente, mas possível de ser estimada via FK. Esta vantagem é realizável devido à lei de controle do controlador LQG utilizar uma realimentação dos estados estimados pelo FK (Yamaguti, 2022).

Posto isso, a lei de controle para o LQG assume a forma:

$$\Delta \mathbf{u}(k) = -\mathbf{K} \hat{\mathbf{x}}_a(k) + \mathbf{K}_y \mathbf{y}_r(k), \quad (50)$$

com a lei de controle, aplicada no processo, sendo dada por:

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{P}_c \Delta \mathbf{u}(k). \quad (51)$$

Como o projeto do controlador é realizado a partir do modelo pré-compensado, conforme discutido na seção 3.2.1, o controlador fornece o incremento $\Delta \mathbf{u}(k)$ na escala do modelo de projeto. Assim, para aplicar esse incremento na planta real, aplica-se o sinal de controle na planta conforme a equação (51), em que o sinal $u(k)$ corresponde ao sinal de controle final que alimenta a entrada do processo H2-DOF.

4 Resultados e Análise de Índices de Desempenho

Neste capítulo, são apresentados e discutidos os resultados experimentais do controlador LQG, projetado no capítulo 3 e implementado no processo H2-DoF descrito no capítulo 2.

4.1 Índices de Desempenho

Em projetos de controle, avaliar o desempenho do sistema por meio de critérios quantitativos é essencial para verificar se a resposta obtida está de acordo com os objetivos de projeto (Åström e Wittenmark, 1997). Nesse sentido, o uso de índices de desempenho permite sintetizar a qualidade do seguimento de referência e o nível de esforço exigido do atuador, tornando-se um apoio direto ao ajuste e à validação do controlador (ARAÚJO et al., 2017 apud Silva (2025, p. 64)).

Para este trabalho, são utilizados como indicadores da eficácia do controlador a Integral do Erro Médio Quadrático (J_{ISE}) e a Integral do Sinal de Controle (J_{ISU}). Com o primeiro pretende-se analisar a capacidade do controlador de seguir referência, e o segundo refere-se a energia média para que o sinal de controle u execute o seguimento de referência. Essencialmente, são métricas de custo e desempenho. As equações são dadas por:

$$J_{ISE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [e(k)]^2, \quad (52)$$

$$J_{ISU} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [u(k)]^2, \quad (53)$$

onde, N é a quantidade total de amostras no vetor de dados.

Além disso, analisa-se métricas estatísticas como a variância dos sinais de erro σ_e^2 e do sinal de controle σ_u^2 , cujas equações são dadas por:

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [e(k) - \bar{e}]^2, \quad (54)$$

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [u(k) - \bar{u}]^2, \quad (55)$$

onde \bar{e} e \bar{u} são as médias dos sinais de erro e sinais de controle.

Neste trabalho, os índices de desempenho são calculados separadamente para cada eixo, isto é, para o erro de guinada $e_\psi(k)$ e para o erro de arfagem $e_\theta(k)$. De forma análoga, o esforço de controle é avaliado separadamente para cada sinal de atuação.

4.2 Calibração tensão-ângulo

Neste trabalho, adota-se como referência metodológica o procedimento usado por Silva (2025) para calibração de tensão-ângulo. Como mencionado anteriormente, na implementação experimental, o controlador opera diretamente sobre sinais de tensão, já que o ESP-32 realiza tanto a escrita quanto a leitura no intervalo de 0 a 3,3 V. Assim, no início do projeto, entradas e saídas são consideradas diretamente como sinais de tensão. Ao final de cada ensaio, os dados obtidos são então convertidos para uma estimativa angular, conforme os limites operacionais do processo H2-DOF citados na seção 2.3.4, permitindo interpretar os resultados em termos de ângulo de guinada e arfagem.

Seja $\psi[\text{V}]$ e $\theta[\text{V}]$ a tensão obtida nos potenciômetros associados, respectivamente, às malhas de guinada e arfagem, em que ψ varia no intervalo de 0° a 180° (associado à faixa de leitura 0 a 3,3 V), e θ varia no intervalo de 40° a 105° (associado à faixa 0 a 1 V). Dessa forma, a conversão linear entre tensão e ângulo é dada por:

$$\psi[^\circ] = \frac{180^\circ - 0^\circ}{3,3\text{V} - 0\text{V}} \psi[\text{V}] \approx 54,545 \frac{[^\circ]}{\text{V}} \psi[\text{V}],$$

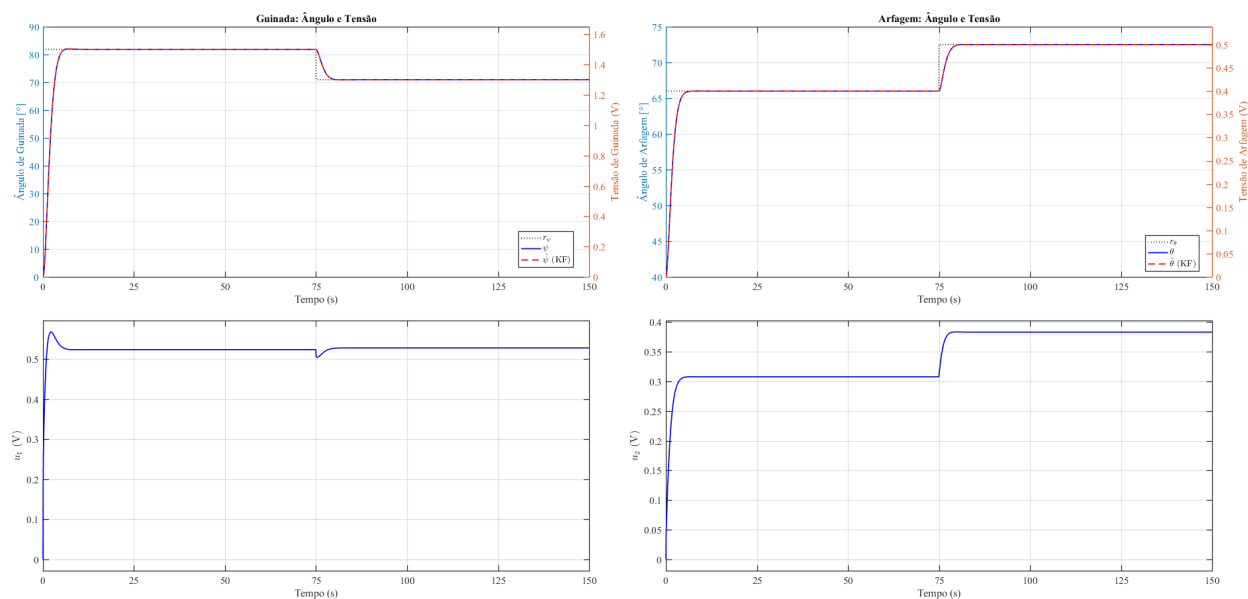
$$\theta[^\circ] = \frac{105^\circ - 40^\circ}{1\text{V} - 0\text{V}} \theta[\text{V}] + 40^\circ = 65 \frac{[^\circ]}{\text{V}} \theta[\text{V}] + 40^\circ.$$

O termo 40° corresponde ao offset mecânico devido à inclinação inicial da haste de arfagem. A adoção de uma faixa reduzida para $\theta[\text{V}]$ tem como objetivo manter o protótipo em uma região de operação mais previsível e compatível com as hipóteses do modelo linear empregado no projeto do controlador, além de reduzir a influência de restrições de atuação quando o sistema opera próximo aos seus limites físicos. Além disso, para $\psi[\text{V}]$, adota-se a faixa típica de leitura do microcontrolador (0 a 3,3 V), porém o processo pode gerar ângulos de ψ maiores, mas que são limitados pela faixa de atuação do ESP-32.

4.3 Testes Simulados e Experimentais

Os ensaios, tanto simulados quanto experimentais, são conduzidos com período de amostragem $T_s = 0,05\text{ s}$ e duração total $t_{final} = 150\text{ s}$, aplicando-se referências do tipo degrau com mudança de setpoint na metade do ensaio para avaliar o seguimento de referência. Para a saída associada à guinada, a referência é inicialmente fixada em $r_1 = 1,5$ e, na metade do experimento, alterada para $r_1 = 1,3$. Já para a saída associada à arfagem, a referência é inicialmente definida como $r_2 = 0,4$ e posteriormente modificada para $r_2 = 0,5$. A seguir, apresentam-se os resultados de guinada ψ e arfagem θ , comparando a referência com a saída medida e a saída estimada pelo filtro de Kalman. Os gráficos inferiores mostram os sinais de controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$ aplicados.

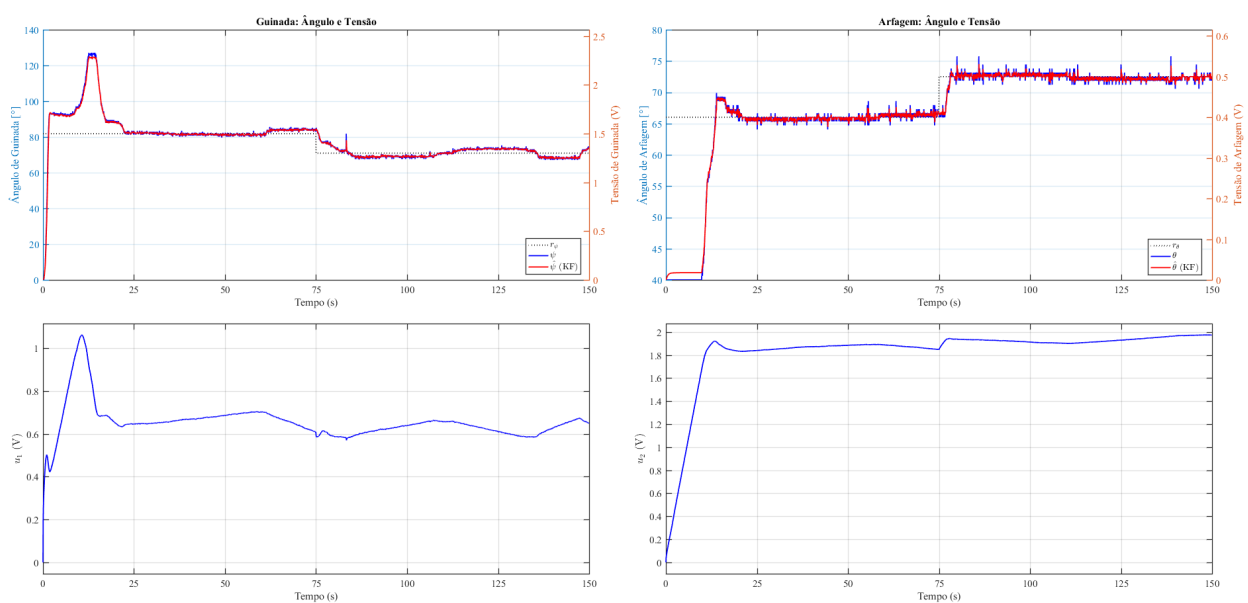
Figura 11 – Ensaio Simulado do Controlador LQG.



Fonte: Elaborado pela autora.

No ensaio simulado, na Figura 11, observa-se seguimento de referência satisfatório nas malhas de guinada e arfagem. Mesmo após a mudança de *setpoint*, a variável controlada, após alguns segundos, segue o sinal de referência com erro de offset nulo em regime permanente. As saídas estimadas pelo Filtro de Kalman permanecem praticamente sobrepostas às saídas do modelo, indicando convergência adequada do estimador. Além disso, os sinais de controle apresentam variações suaves no instante da mudança de referência.

Figura 12 – Ensaio Experimental do Controlador LQG.



Fonte: Elaborado pela autora.

No ensaio experimental, na Figura 12, observa-se que, na malha de guinada, o sobressinal

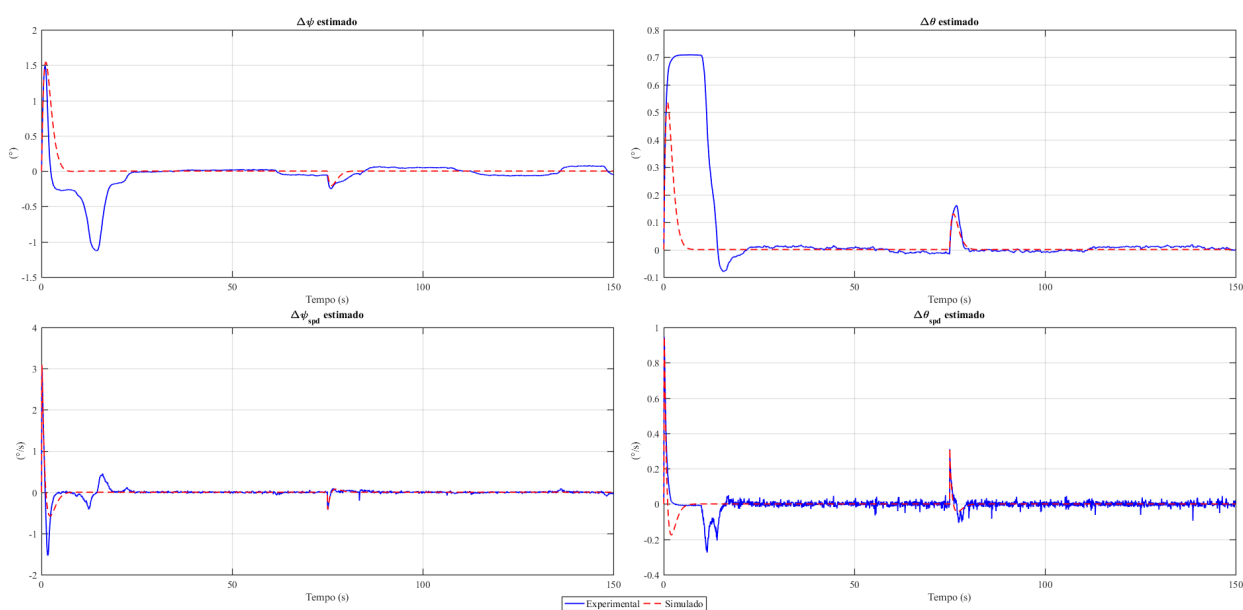
é elevado ($M_p = 55,33\%$), mas apesar disso, a resposta de guinada converge para a referência em aproximadamente 18,48s. Um ponto relevante a ser observado nos gráficos é que o pico na guinada ocorre simultaneamente à subida inicial do eixo de arfagem e ao elevado esforço de controle aplicado na malha de arfagem, o que sugere a presença de acoplamento entre as dinâmicas. Desse modo, a ação necessária para elevar a arfagem pode induzir um transiente parasitário na guinada, sendo este um dos pontos suscitados por Silva (2025).

Após isso, o comportamento torna-se mais estável, com um bom seguimento de referência mesmo após a mudança de referência. A estimativa fornecida pelo Filtro de Kalman acompanha de forma consistente as saídas medidas. Além disso, os sinais de controle não dão indícios de saturação, mesmo na região de sobressinal elevado.

Por outro lado, a malha de arfagem apresentou comportamento mais amortecido, com sobressinal menor ($M_p = 15\%$). No primeiro degrau, observa-se um atraso aparente no início da resposta, associado à presença de zona morta. Após esse intervalo, a saída converge de forma suave para a vizinhança da referência em cerca de 12s.

Enquanto o cenário simulado apresenta comportamento mais idealizado, no experimento real, embora o controlador tenha mantido seguimento de referência satisfatório e estabilidade em ambas as malhas, observam-se efeitos típicos de implementação, como o maior ruído dos sinais e maior demanda nos sinais de controle, especialmente no canal associado à arfagem, o que é coerente com a maior sensibilidade dessa malha no experimento real e com a necessidade de atuação contínua do controle, em uma dinâmica sujeita a efeitos gravitacionais, acoplamentos e não linearidades da planta.

Figura 13 – Estados Estimados Simulado e Experimental.



Fonte: Elaborado pela autora.

Com o objetivo de complementar a análise do ensaio experimental e evidenciar a dinâmica interna do compensador LQG, também são apresentados os estados incrementais estimados pelo filtro de Kalman (Figura 13). Como mencionado anteriormente, esses estados não são medidos,

mas estimados pelo FK. Assim, verifica-se que os transitórios são coerentes nos instantes de variação de referência e que, em regime permanente, os incrementos tendem a valores próximos de zero, indicando que as variáveis associadas deixam de variar significativamente ao longo do tempo. Além disso, nota-se ainda que os estados relacionados às derivadas discretas, $\Delta\psi_{spd}$ e $\Delta\theta_{spd}$, ficam mais ruidosos no experimento real.

Na Tabela 2, observa-se os indicadores de desempenho do controlador LQG tanto para o ambiente simulado quanto para o ensaio experimental.

Tabela 2 – Indicadores de desempenho e variâncias, comparação entre experimento simulado e ensaio experimental.

Indicadores	Simulação		Ensaio Experimental	
	Guinada ψ	Arfagem θ	Guinada ψ	Arfagem θ
J_{ISE}	0.019654	0.001314	0.034523	0.011865
J_{ISU}	0.276095	0.119305	0.434688	3.441460
σ_e^2	0.019374	0.001279	0.033236	0.010846
σ_u^2	0.002808	0.001871	0.006909	0.082808

De forma geral, observa-se que todos os índices aumentam no ensaio experimental, evidenciando desempenho inferior ao obtido em simulação. Esse resultado é coerente com a diferença entre um cenário numérico idealizado, no qual a dinâmica da planta é representada por um modelo linear discreto e livre de diversas imperfeições físicas, e o comportamento da planta real, sujeita a efeitos não lineares, acoplamentos entre os eixos, ruídos de medição, limitações do acionamento e incertezas de modelagem. Assim, embora a estratégia de controle tenha mantido seguimento de referência satisfatório em ambos os casos, a implementação experimental naturalmente exige maior esforço de controle e apresenta maior dispersão dos sinais, o que se reflete no aumento dos índices de desempenho e das variâncias. Nota-se ainda que, como a guinada apresenta maior sobressinal, isso se traduz em um J_{ISE} mais elevado, indicando capacidade de seguimento ligeiramente inferior à observada na arfagem.

Observa-se, na malha de arfagem, que o aspecto mais marcante ocorre no esforço de controle, no qual o indicador J_{ISU} cresce de 0,119305 (simulado) para 3,441460 (experimental), e a variância do controle σ_u^2 aumenta de 0,001871 para 0,082808, o que também está alinhado com o resultado gráfico experimental, no qual o esforço de controle associado a arfagem permanece continuamente acima de 1,8V. Pode-se dizer que esse comportamento é compatível com a natureza física do eixo de arfagem, no qual a atuação precisa compensar continuamente o torque gravitacional para sustentar o protótipo em ângulos elevados, exigindo uma componente média de controle mais alta e, conseqüentemente, maior energia no sinal de atuação.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho consistiu em realizar o projeto do controlador ótimo, LQG, para implementação em uma planta multivariável 2-DoF. De acordo com a Tabela 2, observou-se aumento dos índices no ensaio experimental em relação ao ensaio simulado, o que indica um menor desempenho ao se considerar as não linearidades e incertezas inerentes à planta real. Ainda assim, os resultados experimentais mostram que o controlador LQG foi capaz de estabilizar o sistema e manter seguimento de referência satisfatório, evidenciando a aplicabilidade da estratégia na planta H2-DoF. Dessa forma, o projeto LQG se mostra uma solução interessante e aplicável para controle multivariável em tempo real no protótipo estudado.

Além disso, a metodologia utilizada no desenvolvimento do controlador, em especial a adoção do pré-compensador de ganho estático discutida na Subseção 3.2.1, fornece uma estratégia adequada para o controle de plantas multivariáveis.

Como perspectiva de continuidade, recomenda-se investigar técnicas baseadas em inteligência artificial para automatizar a sintonia das matrizes de ponderação do projeto LQR integrante da estrutura LQG, reduzindo a dependência de ajustes empíricos. Nesse contexto, abordagens neurogenéticas, como a proposta por Neto, Abreu e Silva (2010), podem ser exploradas como alternativa sistemática para a escolha das matrizes Q e R e para a solução da equação algébrica de Riccati.

Adicionalmente, podem ser investigadas extensões que aumentem o desempenho, a robustez e, principalmente, o valor didático da planta H2-DoF e da estratégia de controle aplicada. Como primeira etapa, recomenda-se validar o controlador em um conjunto mais amplo de condições de operação, além das testadas aqui, incluindo perturbações externas, com o objetivo de analisar cenários mais realistas e a capacidade de rejeição a perturbações.

Além disso, a planta H2-DoF pode ser explorada em estudos de robustez por meio de análises multivariáveis no domínio da frequência, coerentes com a técnica de controle empregada, utilizando ferramentas como valores singulares e funções de sensibilidade e sensibilidade complementar. Essa abordagem permite quantificar margens de robustez e identificar direções de maior vulnerabilidade a incertezas e perturbações.

Por fim, recomenda-se comparar o LQG com outras abordagens de controle multivariável, como técnicas de desacoplamento, controle robusto e estratégias de controle preditivo, especialmente o Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC). Essa comparação pode ampliar a análise do desempenho, da robustez e da aplicabilidade da planta H2-DoF sob diferentes estratégias de controle.

Referências

- Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC). **Aerodinâmica do Voo**. 2025. Cartilha da série Asas do Conhecimento. Página institucional. Disponível em: <<https://www.gov.br/anac/pt-br/centrais-de-conteudo/biblioteca/asas-do-conhecimento/asas-do-conhecimento>>. Acesso em: 08 de janeiro de 2026.
- ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. **Linear Optimal Control**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1971. ISBN 13-536870-7.
- ANDREI, N. Modern control theory - a historical perspective -. **Studies in Informatics and Control**, v. 15, n. 1, p. 51–62, 2006. ISSN 1220-1766.
- ARAS, A. C.; KAYNAK, O. Trajectory tracking of a 2-dof helicopter system using neuro-fuzzy system with parameterized conjunctors. In: **2014 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics**. [S.l.: s.n.], 2014. p. 322–326.
- ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. **Computer-Controlled Systems: Theory and Design**. 3. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1997.
- BELOLI, A. S. R.; FLORÊNCIO, J. L.; CAVALCA, M. S. M. A 2dof low cost control workstation for control techniques application. In: **Proceedings of the 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013)**. Ribeirão Preto, SP, Brazil: ABCM, 2013. November 3–7, 2013.
- BENNETT, S. A brief history of automatic control. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 16, n. 3, p. 17–25, 1996.
- BERNSTEIN, D. S. Control experiments and what i learned from them: A personal journey. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 18, n. 2, p. 81–88, abr. 1998. Acesso em: 22 de fevereiro de 2026.
- BREGANON, R. **Controle de arfagem e guinada de um sistema de hélices paralelas**. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Aeronaves)) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009. Acesso em: 20 de fevereiro de 2026.
- CASARA, V. P. **Helicóptero 2-DOF: Desenvolvimento e controle das malhas de arfagem e guinada por técnicas PI e LQR**. 86 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Elétrica) — Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, SC, Brasil, 2015. Orientadora: Dra. Mariana Santos Matos Cavalca.
- CORRÊA, M. V.; AGUIRRE, L. A. Identificação não-linear caixa-cinza: uma revisão e novos resultados. **Revista Controle & Automação**, v. 15, n. 2, p. 109–126, 2004. Abril–Junho.
- FRIEDLAND, B. **Control System Design: An Introduction to State-Space Methods**. New York: McGraw-Hill, 1986.
- GREWAL, M.; ANDREWS, A. Applications of kalman filtering in aerospace 1960 to the present [historical perspectives]. **Control Systems, IEEE**, v. 30, p. 69 – 78, 07 2010.
- Infineon Technologies AG. **BTS 7960: High Current PN Half Bridge NovalithIC (Datasheet)**. 2004. Disponível em: <<https://www.infineon.com/assets/row/public/documents/10/57/infineon-bts7960-ds-en.pdf>>. Acesso em: 29 de dezembro de 2025.

JANSEN, G. H. **Controles de Voo**. 2020. Disponível em: <<https://aeroclubesc.com.br/control-es-de-voov/>>. Central do Piloto (AeroclubeSC). Figura com a representação dos movimentos de arfagem, rolagem e guinada. Acesso em: 08 de janeiro de 2026.

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. **Journal of Basic Engineering**, American Society of Mechanical Engineers, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960.

KALMAN, R. E. On the general theory of control systems. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 1, n. 1, p. 491–502, 1960. ISSN 1474-6670. 1st International IFAC Congress on Automatic and Remote Control, Moscow, USSR, 1960.

NASCIMENTO, G. d. **Aplicação de controle preditivo nas malhas de arfagem e guinada da planta didática “Helicóptero 2-DOF”**. 69 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Elétrica) — Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), Centro de Ciências Tecnológicas (CCT), Joinville, SC, Brasil, 2016. Orientador: Prof. Dr. José de Oliveira. Coorientadora: Profa. Dra. Mariana Santos Matos Cavalca.

NETO, J.; ABREU, I.; SILVA, F. Neural–genetic synthesis for state-space controllers based on linear quadratic regulator design for eigenstructure assignment. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics**, v. 40, n. 2, p. 266–285, maio 2010.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Quanser. **Quanser AERO Concept Review: Modeling for LabVIEW®**. [S.l.], s.d. Documento em PDF. Sem data (s.d.). 11 p. Acesso em: 07 de janeiro de 2026.

Quanser Inc. **Quanser 2-DOF Helicopter: Laboratory Manual**. Markham, Ontario, Canada, 2011. Instructor Manual. Draft dated 6 July 2011.

Robocraze. **ESP32 Development Board (38 Pin) with WiFi + Bluetooth**. s.d. Disponível em: <<https://robocraze.com/products/esp32-development-board>>. Página de produto (imagem utilizada). Acesso em: 14 de fevereiro de 2026.

ROQUE, D. P. **Estudo da Simulação Dinâmica do Comportamento em Voo de Aeronaves de Asas Rotativas**. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)) — Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), Itajubá, MG, abr. 2016. Instituto de Engenharia Mecânica. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. 124 f. Orientador: Prof. Dr. Sebastião Simões da Cunha Jr. Coorientador: Prof. Dr. Alexandre Carlos Brandão Ramos.

SILVA, M. M. d. **Metodologia e síntese de controladores híbridos clássico-neurais aplicados a sistemas MIMO não lineares: estudo de caso em helicóptero 2-DOF**. 105 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica)) — Universidade Federal do Pará, Belém, PA, Brasil, 2025. Orientador: Prof. Dr. Antonio da Silva Silveira.

SILVEIRA, A. **Introdução ao controle digital, moderno e preditivo**. [S.l.]: 1a Ed. versão 1.0, LACOS-UFPA. Disponível em: <https://shorturl.at/xJX28>. Acesso em: 17/04/2024, 2024.

SILVEIRA, A. **DaqDuino**. 2026. MATLAB Central File Exchange. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/50784-daquino>>. Acesso em: 9 de janeiro de 2026.

SILVEIRA, A. et al. Centralized multivariable lqg control system for longitudinal and lateral speed hold autopilot for the ar.drone 2.0 quadcopter. In: **Anais do XXII Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2018)**. [S.l.: s.n.], 2018.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control: Analysis and Design**. 2. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2005.

STEVENS, B. L.; LEWIS, F. L.; JOHNSON, E. N. **Aircraft Control and Simulation: Dynamics, Controls Design, and Autonomous Systems**. 3. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2016. ISBN 978-1-118-87098-3.

VILLAÇA, M. V. M.; SILVEIRA, J. L. Uma breve história do controle automático. **Revista Ilha Digital**, v. 4, p. 3–12, 2013. ISSN 2177-2649. Artigo disponibilizado online. Acesso em: 22 de fevereiro de 2026.

YAMAGUTI, N. N. N. **Desenvolvimento de um processo MISO e uma interface homem-máquina para comparação de desempenho entre diferentes controladores digitais**. 102 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal do Pará, Belém, PA, Brasil, 2022. Orientador: Antonio da Silva Silveira; Coorientador: Bruno Gomes Dutra.