



**Universidade Federal do Pará
Campus Universitário de Castanhal
Faculdade de Matemática
Licenciatura em Matemática**

Trabalho de Conclusão de Curso

**Aprendizagem Matemática em
Geometria
Além do Quadro e Giz**

Levi da Silva Carvalho

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C331a Carvalho, Levi da Silva.
Aprendizagem Matemática em Geometria Além do Quadro e
Giz / Levi da Silva Carvalho. — 2023.
viii,55 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Valdelírio da Silva E Silva
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
Federal do Pará, Campus Universitário de Castanhal, Faculdade de
Matemática, Castanhal, 2023.

1. Geometria Plana. 2. Geometria Espacial. 3. Quadraturas.
4. Geogebra. I. Título.

CDD 516.007

Aprendizagem Matemática em Geometria

Além do Quadro e Giz

Graduação

03/2014 – 12/2023

Submissão 16/12/2023

Defesa 22/12/2023

Versão Final 29/12/2023

Universidade Federal do Pará
Campus Castanhal
Faculdade de Matemática

Levi da Silva Carvalho

leviskarv@gmail.com

Licenciando em Matemática 2023

UFPA-Castanhal

Banca Examinadora

Prof. Valdelírio da Silva e Silva

Membro da Faculdade (Orientador)

Prof. MSc José Geraldo Gonçalves da Silva

Membro da Faculdade

Prof. Dr. Renato Germano Reis Nunes

Membro da Faculdade

Agradecimentos

Aos meus familiares, especialmente, minha bela esposa Aurilene que, foi a maior entusiasta da minha formação, e minhas princesas Laryssa e Nátaly, e meu príncipe Diego Levi.

Ao meu professor e orientador Valdelírio Silva, que me deu todo o suporte necessário na elaboração deste trabalho com muito boa vontade.

À minha professora Carla Cristina pelo carinho e amparo, e aos professores Marcos Orguem, Samuel Levi, José Geraldo e Roberta, e aos demais que foram meus mentores.

Aos meus amigos do grupo de classe, Alexandre, Eider e Rafael.

A todos os demais colegas da classe que fazer parte foi um privilégio.

E acima de tudo ao Senhor JESUS CRISTO, o autor da vida e a minha honra! A Ele dedico Romanos 11 como devido mérito ao seu nome: “Ó profundidade das riquezas, tanto da sabedoria, como da ciência de Deus! Quão insondáveis são os seus juízos, e quão inescrutáveis os seus caminhos! Por que quem compreendeu a mente do Senhor? ou quem foi seu conselheiro? Ou quem lhe deu primeiro a ele, para que lhe seja recompensado? Porque dele e por ele, e para ele, são todas as coisas; glória, pois, a ele eternamente. Amém.”

Resumo

O presente trabalho apresenta uma produção realizada no campo da geometria plana e espacial; faz uma abordagem sobre a otimização da aprendizagem matemática implementada por ferramentas tecnológicas que propiciam um maior alcance de assimilação de conceitos e dão mais celeridade no processo de internalização. Mostra exemplo fazendo uso do aplicativo Geogebra na produção de todas as imagens que ilustram as aplicações dos conteúdos, e destaca o desempenho desse software no alcance das metas propostas nos objetivos deste trabalho, pois, com a capacidade e boa didática do aplicativo foi possível cumprir os três objetivos específicos, quais sejam: construir toda a produção de gráficos, superfícies e sólidos de revolução - onde foi gerada a superfície reversa da esfera; desenvolver um processamento da quadratura de polígonos regulares, bem como, a quadratura do círculo só com o uso de compasso e régua não graduada; apresentar uma demonstração geométrica do Teorema de Pappus Guldin da área e, fazer algumas aplicações do teorema. No tópico das quadraturas os polígonos, a partir do triângulo até ao heptágono, tiveram as suas quadraturas plenamente elaboradas, e o círculo alcançou uma aproximação bastante simples; e, também, foi desenvolvida uma construção gráfica para a retificação da circunferência que pode ser reproduzida com compasso e régua não graduada, de forma simples e, que dá uma boa aproximação com duas casas decimais para o número π . A demonstração do Teorema de Pappus Guldin, último tópico, nos permite visualizar todo mecanismo do movimento na formação dos objetos e perceber a ideia genial aplicada no procedimento do cálculo da área dos mesmos, que aplica conceitos da dinâmica dos movimentos em uma fórmula simplificada. Também se destaca o apoio visual das imagens multicores das figuras geométricas produzidas pelo aplicativo, de forma a proporcionar uma leitura mais lúdica para a jornada do leitor, do início até ao último tópico.

Palavras-chaves: Geometria Plana. Geometria Espacial. Quadraturas. Geogebra.

Abstract

The present essay presents a production carried out in the field of plane and spatial geometry; takes an approach to optimizing mathematical learning implemented by technological tools that provide a greater scope of assimilation of concepts and speed up the internalization process. It shows an example using the Geogebra application in the production of all the images that illustrate the applications of the content, and highlights the performance of this software in achieving the goals proposed in the objectives of this work, as, with the capacity and good teaching of the application, it was possible to fulfill the three specific objectives, namely: building the entire production of graphics, surfaces and solids of revolution - where the reverse surface of the sphere was generated; develop the processing of squaring regular polygons, as well as squaring the circle only using a compass and a non-graduated ruler; present a geometric demonstration of the Pappus Guldin Theorem of the area and make some applications of the theorem. In the topic of quadratures, the polygons, from the triangle to the heptagon, had their quadratures fully elaborated, and the circle achieved a very simple approximation; and, also, a graphical construction was developed for the rectification of the circumference that can be reproduced with a compass and non-graduated ruler, in a simple way and that gives a good approximation to two decimal places for the number π . The demonstration of Pappus Guldin's Theorem, the last topic, allows us to visualize the entire mechanism of movement in the formation of objects and perceive the ingenious idea applied in the procedure for calculating their area, which applies concepts of movement dynamics in a simplified formula. The visual support of the multicolor images of geometric figures produced by the application also stands out, in order to provide a more playful reading for the reader's journey, from the beginning to the last topic.

Keywords: Plane Geometry. Spatial Geometry. Quadrature. Geogebra.

Lista de Figuras

2.1	Logomarca do Geogebra	11
2.2	Área de trabalho do Geogebra	11
2.3	Comando Sequência	12
2.4	Campo de Entrada	12
2.5	Criando os Controles	13
2.6	Controles Deslizantes	14
2.7	Visualização das Construções	14
2.8	Sintaxe da Função $f(x)$	15
2.9	Aglutinação do Comando sequência e Girar	15
2.10	Sintaxe da Aglutinação	15
2.11	Imagem de Superfície Construída	16
3.1	Ilustração de superfícies de revolução	17
3.2	Exemplo de Construção de Geratrizes	18
3.3	Sintaxe da Função Geratriz $f(x)$	19
3.4	Sintaxe da Calota Superior	19
3.5	Geratriz e superfície de calota superior	19
3.6	Ordem de Dependência dos Objetos	20
3.7	Sintaxe da Função Geratriz $g(x)$	20
3.8	Sintaxe da Calota Inferior	20
3.9	Geratriz e superfície de calota inferior	20
3.10	Composição de geratriz e superfície da Esfera	21
3.11	Tela de Protocolos de construção	21
3.12	Sintaxe da Curva	22
3.13	Geratriz formada por pontos	22
3.14	Sintaxe da Superfície da Esfera	22
3.15	Formação superfície esférica	23
3.16	Formação superfície Fuso esférico	23
3.17	Formação superfície Zona esférica	24
3.18	Gráficos demonstrativos de relações de medidas	25
3.19	Gráficos demonstrativos	26
3.20	Gráficos Demonstrativos	27
3.21	Superfícies Esferas concêntricas	28
3.22	Geratrizes de Segmento esférico	29
3.23	Gráfico e Superfície Lateral	30
3.24	Superfícies Montadas do Segmento	30
3.25	Sintaxe da semicircunferência	31
3.26	Sintaxe do Segmento Seção a	31
3.27	Sintaxe do Segmento Seção b	31
3.28	Gráficos de Montagem	31
3.29	Geratriz de cone e superfície Aberta	32
3.30	Comandos Criadores dos Segmentos	32
3.31	Comandos Criadores das Superfícies do Cone	32
3.32	Geratriz e Tronco de Cone	33

3.33	Comandos de Segmentos do Tronco de Cone	33
3.34	Comandos de Superfícies do Tronco de Cone	33
3.35	Gráfico de Demonstração	34
3.36	Geratriz e Superfícies do cilindro	35
3.37	Comandos geradores Bases do cilindro	35
3.38	Comandos geradores de Superfície do Cilindro	35
3.39	Comandos geradores de Segmento e Curvas	36
3.40	Comandos geradores das Superfícies	36
3.41	Superfícies Correspondentes de Corpos Diferentes	36
3.42	Geratriz da esfera e a própria, a partir de sua geratriz	37
3.43	Comandos geradores do Semicírculo	38
3.44	Comandos geradores da Esfera	38
3.45	Geratriz e Cunha Esférica	38
3.46	Geratriz e Calota Esférica	39
3.47	Comandos geradores das imagens	39
3.48	Sintaxe do Semicírculo	39
3.49	Gráfico Demonstrativo	40
4.1	Gráfico da Raiz Geométrica	43
4.2	Construções Demonstrativas	44
4.3	Triângulo Inscrito no Semicírculo	44
4.4	Construção dos Objetos Base	44
4.5	Construção da Quadratura	45
4.6	Construções Demonstrativas 4	45
4.7	Losango	46
4.8	Ilustração da Quadratura do Losango	46
4.9	Retângulo	47
4.10	Ilustração da quadratura do pentágono	48
4.11	Ilustração da quadratura do Hexágono	49
4.12	Ilustração da quadratura do heptágono	49
4.13	Ilustração da Convergência dos Polígonos	50
4.14	Retificação da circunferência	51
4.15	Quadratura do círculo com o comprimento retificado da semicircunferência	52
5.1	Ilustração da Construção do cilindro.	54
5.2	Ilustração de geratriz de Tronco de Cone	54
5.3	Ilustração da Construção do Círculo	55
5.4	Planificação	55
5.5	Formação retangular	56
5.6	Demonstração da Função do Centróide	56
5.7	Geratriz do Touro de revolução	57
5.8	Seção da Superfície do toróide de revolução	57
5.9	Seção do toróide de revolução – Vista de Cima	57
5.10	Superfícies conjugadas	58
5.11	Formação da Superfície da Esfera	58
5.12	Superfície Reversa da Esfera	59
5.13	Gráficos Demonstrativos Segmentos Esféricos	60
5.14	Construção de Segmento Esférico	60
5.15	Comandos geradores dos Gráficos	60
5.16	Comandos geradores dos Volumes	61

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Justificativa	9
1.2	Objetivos	10
2	Apresentação do Geogebra	11
2.1	Área de Trabalho	12
3	Superfícies e Sólidos de Revolução	17
3.1	Superfícies de Revolução	18
3.2	Sólidos de Revolução	37
4	Quadraturas	42
4.1	Conceitos do Termo	42
4.2	Polígonos - Definições Básicas	42
4.3	Média Geométrica	43
4.4	Procedimentos de Construções das Quadraturas no Geogebra	44
4.5	Quadratura de um triângulo	45
4.6	Quadratura do Losango	46
4.7	Quadratura do Retângulo	47
4.8	Quadratura do Pentágono	48
4.9	Quadratura do Hexágono	48
4.10	Quadratura do Heptágono	49
4.11	Quadratura do Círculo	50
5	Teoremas de Pappus-Guldin	53
5.1	Centróide	53
5.2	Demonstração Geométrica dos Teoremas	53
5.3	Teorema do Volume	59
6	Considerações Finais	62
	Referências	63

1

Introdução

Neste trabalho de conclusão de curso é abordado o tema do ensino que pode ser realizado além do quadro e giz pelo uso de tecnologias, no formato de mídias virtuais, que são os softwares e os aplicativos, que se constituem ferramentas poderosíssimas no processo do ensino-aprendizagem de diversas áreas do ensino acadêmico, bem como, na produção de conteúdos auto didáticos, ensejando um maior desenvolvimento crítico, ativo e consciente; ferramentas essas que são acessíveis a todas as pessoas dado a sua praticidade e gratuidade. E isso será feito dentro do estudo da geometria com a utilização do software livre Geogebra no processamento dos conceitos matemáticos, destacando essa forma de ensino aprendizagem que se faz além do quadro e giz. Mas não há, no entanto, a pretensão de excluir do processo de ensino a boa e velha lousa; pois ela estará sempre presente na experiência escolar em várias nuances, como: quadro negro, tela touch screen, wide screen, etc.

O Geogebra é “Um software gratuito e multiplataforma de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que integra geometria, álgebra, planilha eletrônica, gráficos, estatística e cálculo em um único ambiente fácil de usar” - definição dos próprios criadores do aplicativo. O trabalho em pauta terá maior foco em geometria espacial dos sólidos de revolução, e isso é matemática dinâmica que engloba transformações das formas, cores e movimentos. Portanto, é propício o uso desse aplicativo, pois dinamismo e transformações gráficas encerram a finalidade da sua criação. Inclusive, o uso desse aplicativo tem sido abordado em inúmeros trabalhos acadêmicos e indicado por diversos profissionais de renome da área da educação e da informática.

1.1 Justificativa

Diante das dificuldades da vida que encontramos pelo caminho precisamos nos posicionar para contorná-las e passar adiante. E o sucesso do caminho traçado vai depender dos meios que estamos utilizando para chegar ao destino. Elementos como tempo e economia são duas grandezas inversamente proporcionais para quem está com o pé na estrada. Quanto mais demorar a viagem menos recursos sobrarão para o custeio do restante da mesma e, por conseguinte, a linha de chegada ficará ainda mais incerta.

Trazendo a lógica dessa reflexão para dentro do campo acadêmico e tendo ciência das dificuldades que permeiam as instâncias do aprendizado urge tomarmos medidas proativas na construção desse processo. É certo que as dificuldades de um estudante são diversas em qualquer nível de ensino dentro do sistema convencional. E quando se trata da dificuldade de assimilar algum conceito, aprender uma matéria, ou melhor, “apreender” o conteúdo ministrado em sala de aula aumentando o rendimento, vem a pergunta: Ainda há alguma coisa a ser feita para se contornar esse obstáculo?

A pergunta não é retórica, absolutamente não. Há que se dar uma resposta que esteja bem instrumentali-

zada, ou seja, que ofereça soluções efetivas para a otimização do aprendizado. Já foi mencionado que o tempo é uma grandeza inversamente proporcional aos recursos no andamento de um projeto, então, precisamos minimizar o tempo gasto no processo. Existem equipamentos multimídia criados para dinamizar o processo pedagógico, a exemplo a lousa digital; no entanto, ela é de alto custo aquisitivo e não pode andar embarcada na mochila do aluno nem na pasta do professor. E é aqui que entra em cena o software Geogebra que é um aplicativo, não ocupa espaço físico e pode ser instalado no laptop, no tablet e até mesmo no celular, que são aparelhos portáteis que cabem na bagagem de mão. Esse aplicativo foi idealizado e criado para processar conteúdos diversos dentro da matemática, em especial os de geometria e álgebra, que são as duas matérias que se encontram aglutinadas compondo o nome próprio do aplicativo “Geogebra”.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Mostrar que o uso de softwares no processamento dos conceitos matemáticos em Geometria e Álgebra pode minimizar o tempo gasto na aprendizagem e assimilação dos conteúdos ministrados.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Construir os gráficos, as figuras, as superfícies e os sólidos de revolução que serão utilizados neste trabalho, com o software Geogebra;
- Fazer as quadraturas de algumas figuras geométricas regulares pelo método Euclidiano que, utiliza apenas compasso e régua não graduada, no Geogebra.
- Fazer a demonstração geométrica dos teoremas Pappus Guldin, relacionados à área e volume, e aplicá-los no cálculo de algumas figuras;

2

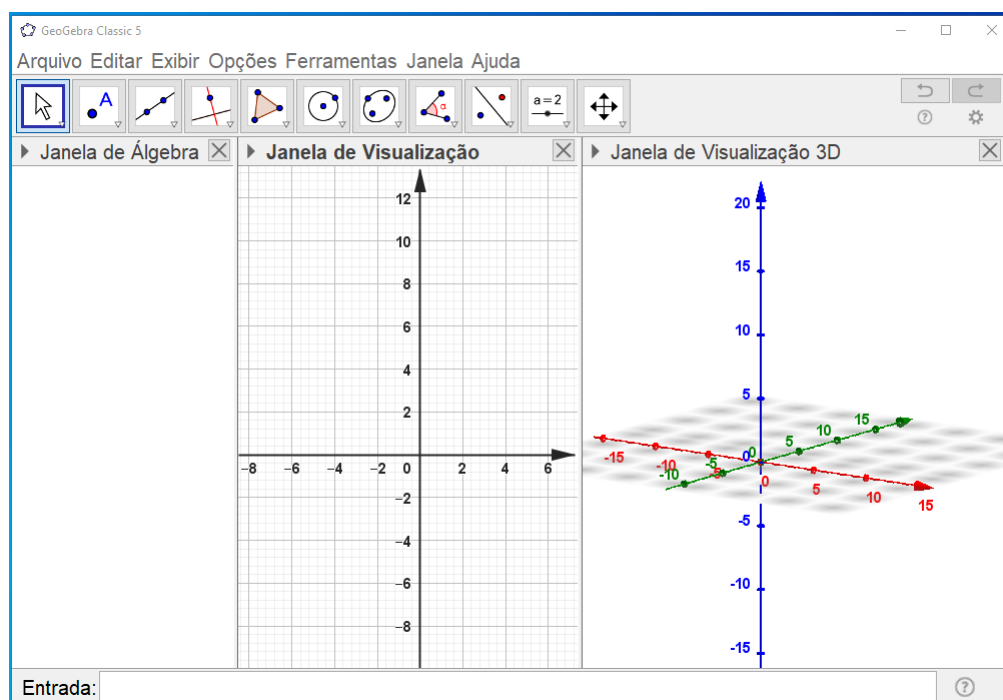
Apresentação do Geogebra

Antes de começarmos a elaborar as construções geométricas convém apresentarmos o aplicativo GEOGEBRA que será a nossa ferramenta principal deste trabalho. O Geogebra apresenta quatro janelas de visualização, quais sejam: a janela de álgebra, a janela de visualização, a janela de visualização 2D e a janela de visualização 3D.

Figura 2.1: Logomarca do Geogebra



Figura 2.2: Área de trabalho do Geogebra



2.1 Área de Trabalho

As janelas que iremos nos familiarizar bem estão exibidas na figura 2.2 que são: a janela de álgebra, a de visualização e a janela 3D. Logo no canto superior esquerdo mostra O Geogebra Classic 5 como a versão do aplicativo que foi utilizado neste trabalho, a barra de menus e, também, a barra de ferramentas.

2.1.1 Sintaxe de Alguns Comandos

Vamos estar fornecendo, junto com as construções das figuras geométricas, as sintaxes dos comandos das sequências e das funções matemáticas que forem construídas no aplicativo Geogebra, com o fim de auxiliar o leitor deste trabalho que, de repente, deseje usar o aplicativo e reproduzir as construções apresentadas no mesmo. As figuras podem ser construídas em várias etapas e, cada uma dessas etapas com comandos diferentes, por exemplo: podemos usar o comando “Funções” no campo de entrada para fazermos uma função; usamos o comando “Girar” para fazer com que o gráfico da função se movimente em torno de um ponto ou de um dos eixos do sistema; em seguida, clicamos com o botão direito do mouse no gráfico da função na opção “habilitar rastro”; e com um clique direito no controle deslizante ativamos a opção “animar”, para, então, gerar uma superfície. Porém, os comandos podem ser aglutinados, ou seja, colocados uns dentro de outros com a finalidade de se obter uma produção simultânea das transformações geométricas. Para isso vamos utilizar o comando “Sequência” e escolher uma de suas sintaxes do mesmo, posto que alguns comandos possuem várias.

2.1.2 Sintaxe do Comando Sequência

Figura 2.3: Comando Sequência

```
Sequência( <Valor Final> )
Sequência( <Valor Inicial>, <Valor Final> )
Sequência( <Valor Inicial>, <Valor Final>, <Incremento> )
Sequência( <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final> )
Sequência( <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>, <Incremento> )
```

Fonte: do autor

Todas as Sintaxes das funções, dos comandos e de todos os objetos que estão expressos na barra de ferramentas e que são construídos com simples cliques, podem ser digitadas no campo “Entrada”, que está localizado no canto inferior esquerdo da área de trabalho, observada na figura 2.2 e no recorte figura 2.4, o que reproduzirá as construções respectivas.

Figura 2.4: Campo de Entrada

```
Entrada: Sequência( <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final> )
```

Fonte: do autor

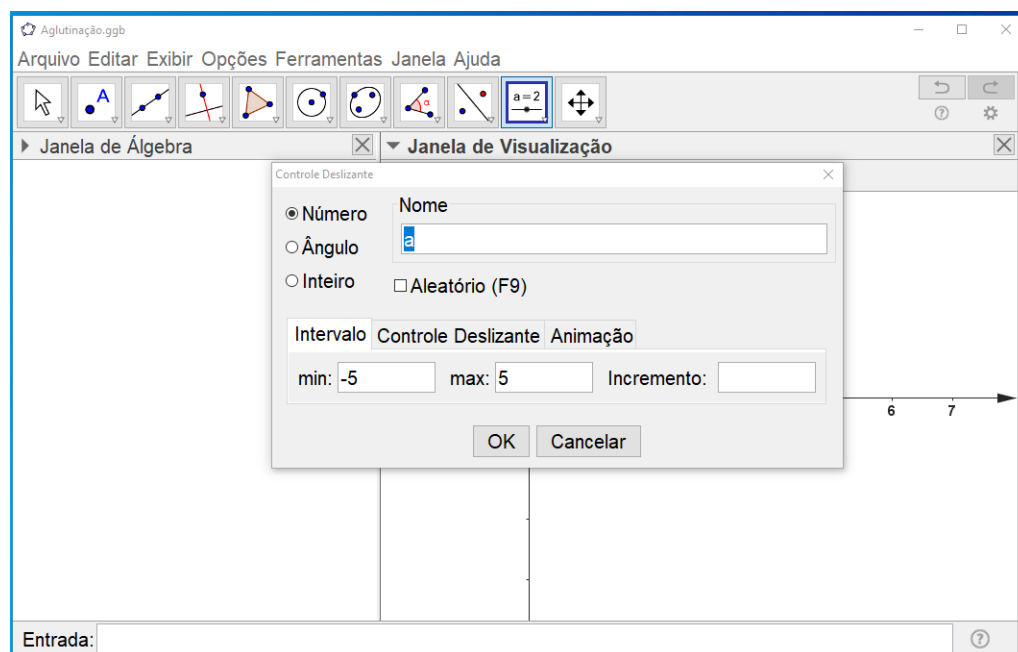
Vamos ao procedimento de aglutinação dos comandos tomando uma sintaxe do comando “Sequencia” como a base da sintaxe; a figura 2.3 apresenta o formato do campo de entrada quando digitamos as primeiras letras do comando no campo de entrada todas as sintaxes aparecem, o que ocorre com todos os comandos. Vamos utilizar a sintaxe que aparece selecionada em azul e que possui quatro argumentos entre parênteses - Sequência(<Expressão>, <Variável>, <Valor inicial>,<Valor final>) e abrir outro comando dentro do argumento <Expressão>.

2.1.3 Estruturas Algébricas e Parâmetros Lógicos

Segue, neste tópico, alguns procedimentos sequenciados nas construções geométricas. Como vimos anteriormente as sintaxes dos comandos são as estruturas algébricas com seus parâmetros e os argumentos lógicos do aplicativo; dentre os quais dois, que determinam o ângulo e o incremento, serão submetidos ao comando de controles deslizantes para proporcionar a animação dos objetos.

2.1.3.1 Controles Deslizantes

Figura 2.5: Criando os Controles

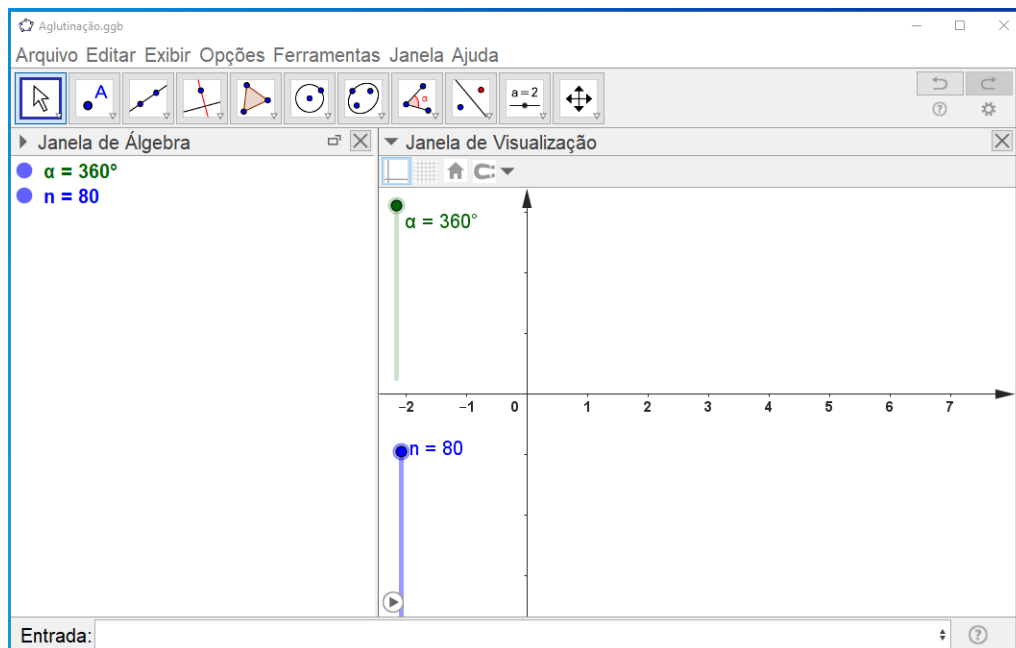


Fonte: do autor

O primeiro procedimento é fazer um controle deslizante com a opção “ângulo” para a produção dos movimentos denominado, por exemplo, α com tantos graus forem necessários; em seguida, outro controle deslizante com a opção “número” para o incremento, com um número incremental suficiente para preencher a superfície. Os controles deslizantes são feitos com a penúltima opção da barra de ferramentas da tela do Geogebra que pode ser identificada por “a=2”, conforme a tela da figura 2.5. Quando clicada abre-se uma janelinha sobreposta mostrando todas as opções de ajuste para o controle. Observamos que para acessar essa opção é preciso clicar dentro da “Janela de Visualização”, pois, ela não aparece para as janelas de visualização 2D ou janela 3D. Vale ressaltar também que quando quisermos trabalhar em uma determinada janela é necessário clicar dentro da mesma para ativar as ferramentas respectivas – excluindo-se aqui a janela de álgebra.

A próxima tela, a da figura 2.6 composta por dois itens, vai nos mostrar dois controles deslizantes, o $a = 360$ que aparece em verde, de ângulo, para controlar o deslocamento dos gráficos e, o $n = 80$ de números, para o preenchimento do espaço percorrido pelos gráficos das funções ou de outros objetos, pois, é possível fazer qualquer objeto, das três dimensões, girar em torno de um centro; e a álgebra de construção dos controles aparece na Janela de Álgebra, como toda construção algébrica construída em qualquer das outras janelas; como se vê na figura citada anteriormente.

Figura 2.6: Controles Deslizantes

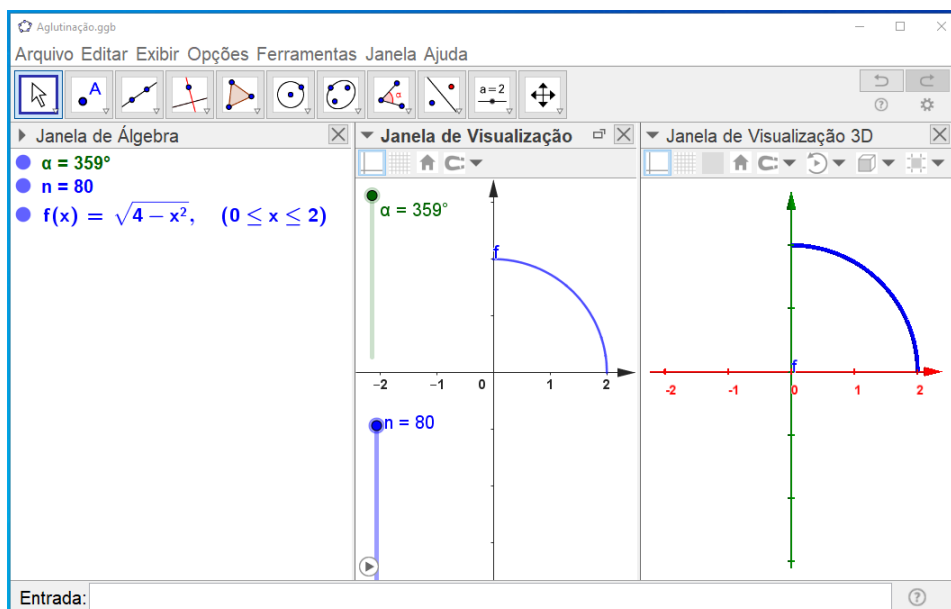


Fonte: do autor

2.1.3.2 Criação das Funções

O próximo procedimento é construir as funções cujos gráficos serão as geratrizes das superfícies pretendidas. Na Caixa de Entrada abrimos o comando “Função(<Função>,<Valor inicial de x inicial>,<Valor de x final>)” e dentro dos parênteses estão os argumentos, separados por vírgula, que não devem ser removidas para não dar erro de sintaxe.

Figura 2.7: Visualização das Construções



Fonte: do autor

Nesses argumentos digitamos a função e os limites que precisamos determinar para o tamanho necessário do gráfico, conforme a figura recorte 2.8. Agora a tela contém três itens.

Figura 2.8: Sintaxe da Função $f(x)$

Entrada: **Função(sqrt(4-x^2), 0, 2)**

Fonte: do autor

Na figura 2.7 temos a função raiz $f(x)$ que compõe a tela com os controles deslizantes e que nos fornece como gráfico um quarto de circunferência no primeiro quadrante do sistema cartesiano no intervalo fechado de 0 a 2. Estamos partindo rumo a criação das primeiras superfícies de elementos redondos que são as esferas e suas partições, por exemplo, e isto se torna propício.

2.1.3.3 Aglutinação de comandos

Então, aberto o comando “Sequência(<Expressão>, <Variável>, <Valor inicial>, <Valor final>”, exemplificado na figura 2.4, dentro do argumento “Expressão” abrimos o comando Girar e selecionamos a terceira sintaxe, que por sua vez possui três argumentos - Girar(<Objeto>, <Ângulo>, <Eixo de Rotação>) - lembrando sempre, durante o preenchimento da sintaxe, de escrever com inicial maiúscula a palavra “Eixo” e digitar a letra que representa o eixo, por exemplo: *EixoY*. E se o movimento do objeto não for em torno de um eixo mas sim de um ponto, deve ser digitado com maiúscula, e apenas, a letra do ponto. Exemplo: *A*. A partir daí teremos uma nova sintaxe e mais extensa com sete argumentos, por conta da aglutinação desses dois comandos “sequência e Girar”; um com quatro argumentos e o outro com três, cuja sintaxe nos é apresentada na figura 2.9 a seguir.

Figura 2.9: Aglutinação do Comando sequência e Girar

Entrada: **Sequência(Girar(<Objeto>, <Ângulo>, <Eixo de Rotação>), <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>)**

Fonte: do autor

Então, com vista na tela de construções da figura 2.7, vamos preencher a sintaxe da figura 2.9 com os dados que estão na janela de álgebra: digitamos dentro do argumento <Objeto> que aparece selecionado em azul a letra f da função $f(x)$; e dentro do próximo argumento <Ângulo> digitamos as três variáveis: a nativa i e os dois controles deslizantes que criamos que são fatores de variação. Existem várias variáveis nativas dentro do ambiente do aplicativo Geogebra que são utilizadas em operações específicas, como as letras x e y em funções. No caso de Sequências, a variável utilizada é a letra i minúscula - multiplicando a variável nativa i pela variável ângulo que está sendo regido pelo controle deslizante a , e dividindo pela variável n que é o controle do incremento. O próximo argumento é <Variável>, onde digitamos apenas a variável i ; depois vem o argumento <Valor Inicial> que vai ser sempre *zero* e, por último, no argumento <Valor Final> digitamos a variável n , que é o controle deslizante responsável pelo preenchimento da superfície. A próxima imagem da figura 2.10 mostra a sequência aglutinada .

Figura 2.10: Sintaxe da Aglutinação

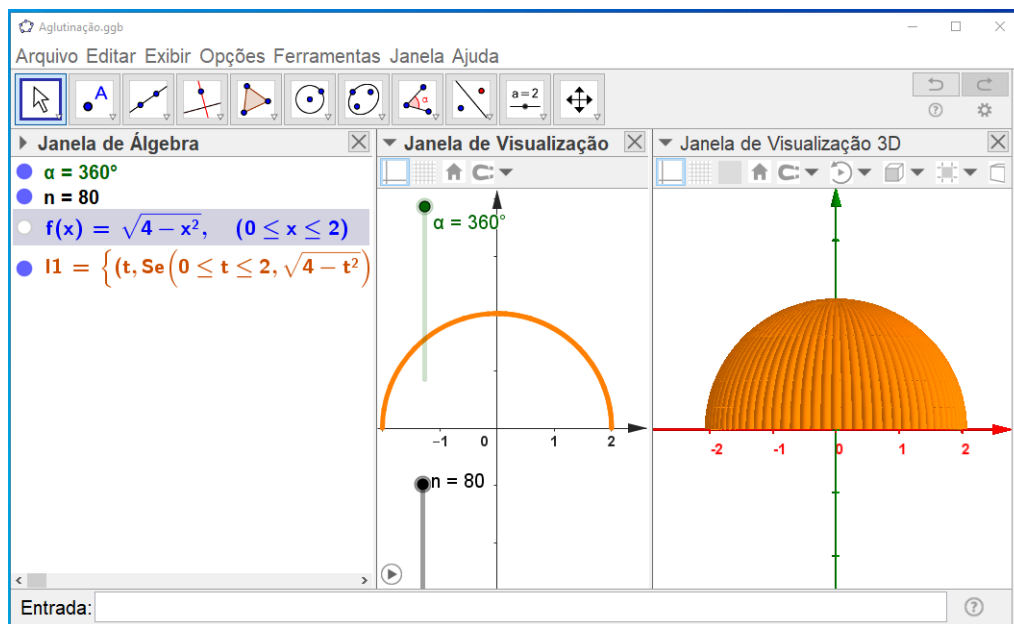
Entrada: **Sequência(Girar(f, i*a/n, EixoY), i, 0, n)**

Fonte: do autor

Quando todos os argumentos já foram preenchidos com os dados das construções desejadas, como está

na figura 2.10, então, é hora de ver o resultado. Clicando enter vai aparecer na Janela de Álgebra um quarto item denominado l1 (lista 1) simultaneamente com a imagem produzida na Janela de Visualização 3D e da mesma cor, conforme se constata na tela da figura 2.11. E esse arco que tem a mesma cor e aparece na Janela de Visualização é uma secção transversal da imagem, pois, essa janela só mostra o plano xy .

Figura 2.11: Imagem de Superfície Construída



Fonte: do autor

Portanto, esses serão os procedimentos básicos que aplicaremos na produção das superfícies e sólidos de revolução; em algumas figuras vamos precisar usar no lugar de funções outros objetos como: pontos, círculos, triângulos, etc; conforme o formato de cada superfície.

Superfícies e Sólidos de Revolução

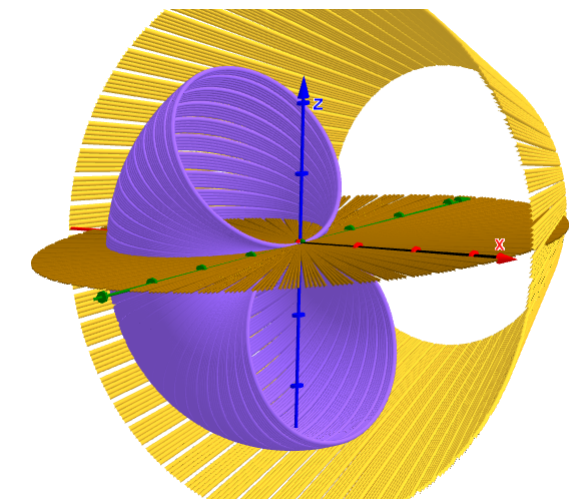
Neste capítulo vamos tratar da construção de superfícies e sólidos de revolução. Muitas formas e figuras de corpos existentes na natureza podem ser mais bem compreendidas como sendo produtos do movimento, podendo essas formas serem reproduzidas.

A movimentação de um elemento geométrico dos mais primitivos, o *ponto* por exemplo, gera linhas no plano ou no espaço que podem ser: retas, curvas abertas, fechadas, etc; como comenta [Andrade \(2017\)](#).

A linha curva é uma das formas mais básicas e importantes da matemática, em torno da qual se estabelecem inúmeras estruturas e relações de grande importância. Poderíamos descrever a linha curva como uma linha reta que toma algum tipo de desvio em sua reta de maneira progressiva [...]. ([ANDRADE, 2017](#)).

Se o movimento estiver no plano as linhas formarão figuras planas e se estiver no espaço formarão as superfícies dos corpos ou de sólidos geométricos, o que ilustra a construção na figura 3.1.

Figura 3.1: Ilustração de superfícies de revolução



Fonte: do autor

As superfícies são geradas por segmentos de retas ou curvas longitudinais unidimensionais que rotacionam em torno de um eixo ou de um ponto percorrendo um ângulo maior que zero, cujos rastros correspondem às superfícies de revolução.

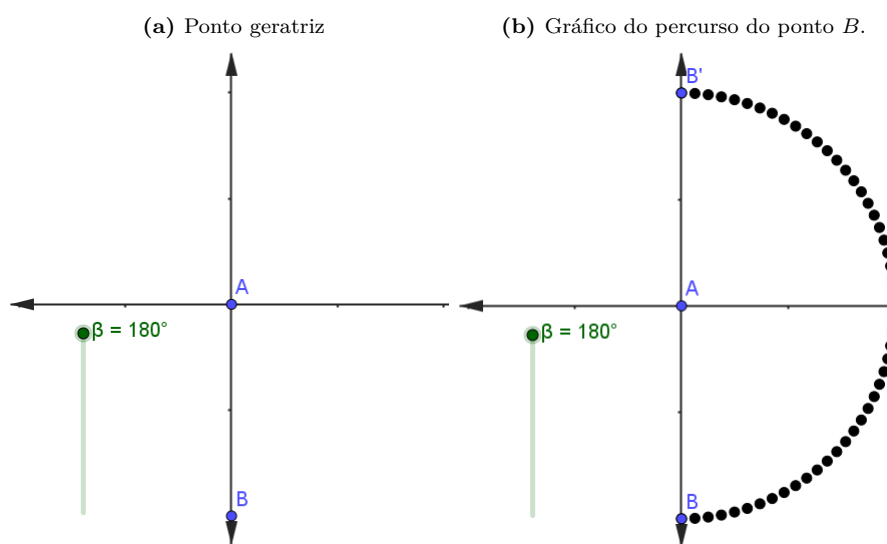
3.1 Superfícies de Revolução

3.1.1 A Superfície Esférica

Vamos começar pela construção da geratriz da esfera, que é uma figura espacial elementar de corpo circular e que possui uma geometria própria, em que um triângulo em sua superfície pode ter a soma dos seus ângulos internos entre 180 e 540 graus (SARAIVA, 2012). Ela é classificada entre os objetos geométricos como corpo redondo, juntamente com cilindro e o cone. Vale ressaltar que corpos geométricos oblíquos ou com a base oval não podem ser formados por processo de rotação, porque possuem formato assimétrico ou não harmônico, e que, por isso, são classificados como outros, conforme comenta BrasilEscola (2008). E harmonia e simetria são palavras de ordem quando o assunto é revolução radial e axial. Em um sistema de revolução tudo fica preso ao eixo e cada parte do gráfico faz uma varredura radial acarretando uma simetria total em torno do mesmo.

A superfície da esfera é gerada por uma semicircunferência que, por sua vez, é uma curva plana gerada por um ponto que gira em torno de um eixo ou de outro ponto percorrendo um ângulo determinado. Na figura 3.2a e 3.2b o ponto B faz um giro de 180 graus ao redor do ponto A até o ponto B' à distância constante de um raio e descreve uma curva que representa uma cônica ou o gráfico de duas funções do tipo $f(\sqrt{x})$ e $g(-\sqrt{x})$ limitadas no intervalo que se deseje.

Figura 3.2: Exemplo de Construção de Geratrizes



Fonte: do autor

3.1.2 Superfície de Calotas polares

Podemos criar várias formas geométricas prontas usando o botão indicado na barra de ferramentas do Geogebra, mas é conveniente que a construção seja baseada em conceitos matemáticos, que as linhas geratrizes das superfícies sejam gráficos de funções ou parte destes para que o trabalho não se limite ao desenho das formas em si mas seja um aprofundamento na compreensão dos conteúdos.

Então vamos construir a superfície esférica em duas calotas separadas. Os gráficos das funções raiz $f(x)$

e $g(x)$ comporão a geratriz da superfície esférica, construída no intervalo que vai de zero até dois.

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

Cada gráfico dessas funções corresponde a um quarto de circunferência que será a curva geratriz da superfície de uma calota esférica, conforme as figuras 3.5a e 3.9a.

3.1.2.1 Superfície de Calota Superior

Figura 3.3: Sintaxe da Função Geratriz $f(x)$

Entrada: `Função(sqrt(4-x^2), 0, 2)`

Fonte: do autor

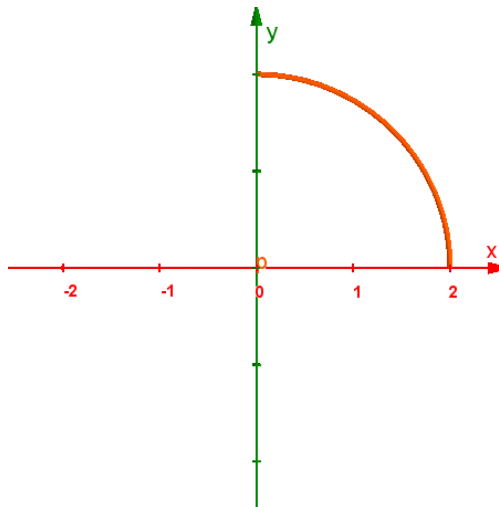
Figura 3.4: Sintaxe da Calota Superior

Entrada: `Sequência(Girar(f, i*a/n, EixoY), i, 0, n)`

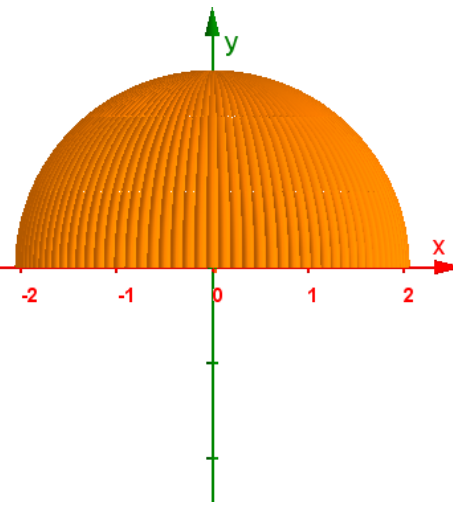
Fonte: do autor

Figura 3.5: Geratriz e superfície de calota superior

(a) Função geratriz $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

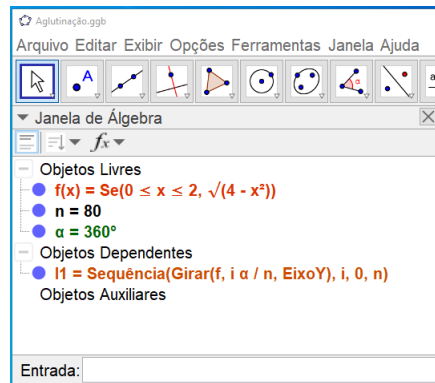


(b) superfície calota superior

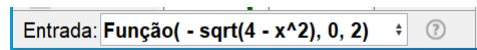


Fonte: do autor

A figura 3.6 mostra a janela de álgebra contendo os protocolos de construção das estruturas na opção “Ordem de Dependência” que é um dos vários modos de organizar na Janela de Álgebra, que agrupa os itens por “objetos Livres”, “Dependentes” e “Auxiliares”. A sintaxe da figura 3.4 processa as informações provenientes da função e os controles deslizantes para gerar a superfície da calota superior, que corresponde ao objeto dependente $l1 = Sequencia$

Figura 3.6: Ordem de Dependência dos Objetos

Fonte: do autor

Figura 3.7: Sintaxe da Função Geratriz $g(x)$ 

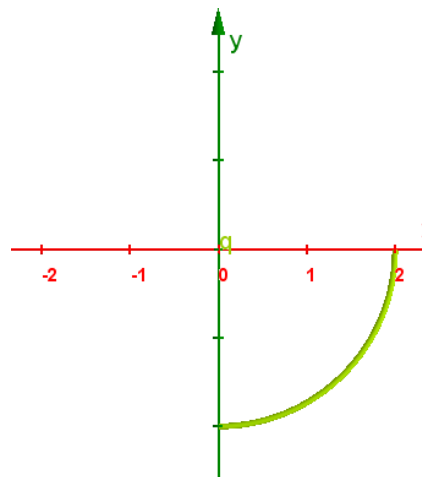
Fonte: do autor

3.1.2.2 Superfície de Calota Inferior

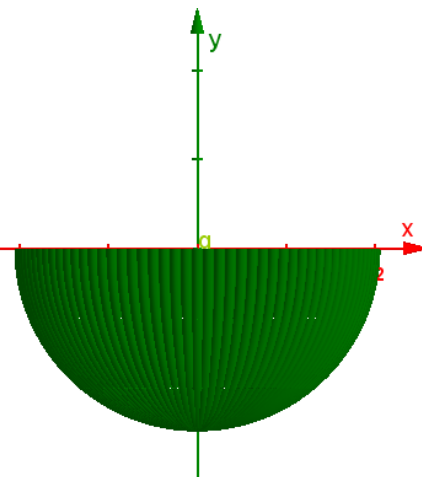
Deve-se atentar para o sinal negativo ($-$) da função raiz na figura 3.7; é ele que joga o gráfico pra baixo do eixo x - vide figura 3.9a.

Figura 3.8: Sintaxe da Calota Inferior

Fonte: do autor

Figura 3.9: Geratriz e superfície de calota inferior(a) Função geratriz $g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ 

(b) Superfície Calota Inferior



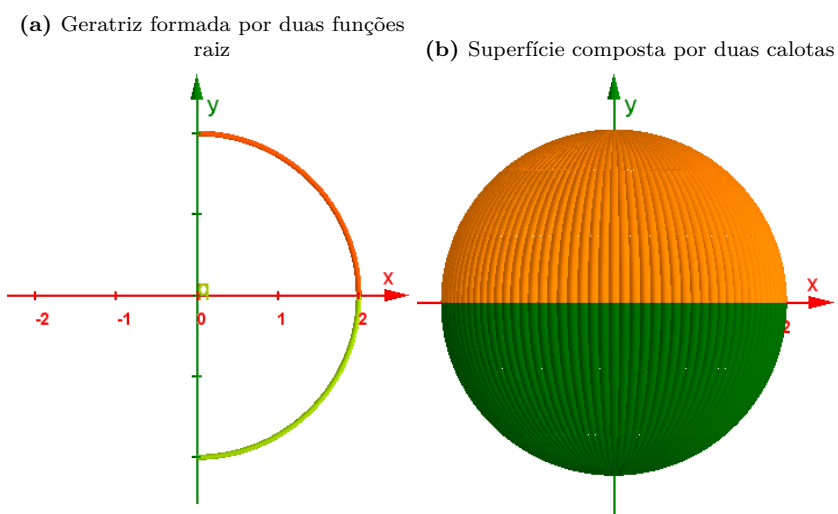
Fonte: do autor

E já que a área da superfície de uma esfera é dada por $A_e = 4\pi r^2$ vamos ter do nosso exemplo a área da calota sendo $A_c = 2\pi r^2 = 8\pi$ u.a., enquanto que a superfície toda será $A_e = 16\pi$ u. a.

3.1.3 Superfície da Esfera

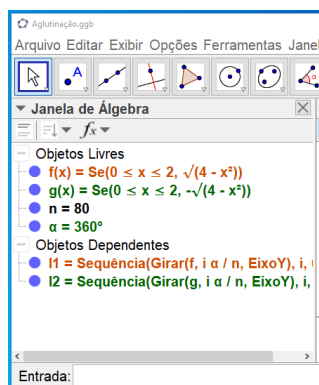
Agora que já temos prontas as geratrizes das calotas formadas pelas funções raiz - figuras 3.5a e 3.9a - e as respectivas superfícies das calotas vamos juntá-las em um só gráfico para compor a superfície total da esfera. A necessidade de construir dois gráficos separados é para, além de trabalharmos melhor os conceitos de funções como foi mencionado anteriormente, fazer as calotas de cores diferentes e obter maior destaque visual das construções.

Figura 3.10: Composição de geratriz e superfície da Esfera



Fonte: do autor

Figura 3.11: Tela de Protocolos de construção



Fonte: do autor

A tabela de protocolos contém a janela de álgebra com os itens das construções em que foram feitas quatro sintaxes: duas para as funções geratrizes e duas para as sequências que produziram as superfícies, e elas estão acompanhando as figuras correspondentemente apresentadas anteriormente; razão porque não há sintaxe exclusiva para as figuras 3.10a e 3.10b.

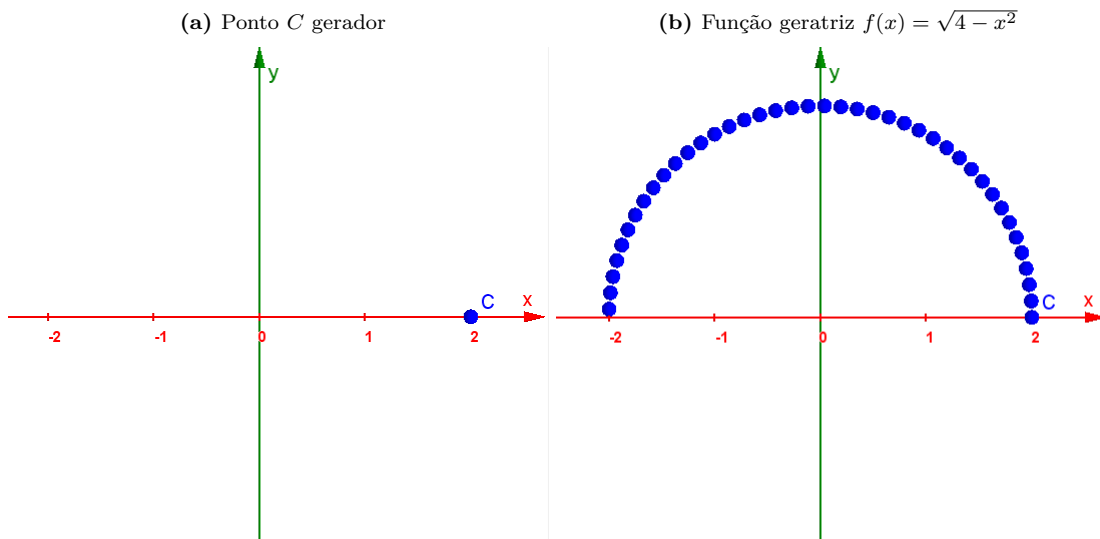
Podemos ainda, gerar uma superfície esférica com o gráfico de uma só função raiz no intervalo, por exemplo, de -2 até 2 . Nesse exemplo o gráfico da função raiz toca o eixo x nos pontos extremos do intervalo; e o centro da calota vai coincidir com a origem do sistema.

Mas para esta etapa teremos um gráfico diferente, que é uma curva construída por pontos para proporcionar um novo visual das figuras.

Figura 3.12: Sintaxe da Curva

Entrada: `Sequência(Girar(C, i*α / n, EixoZ), i, 0, n)`

Figura 3.13: Geratriz formada por pontos



Fonte: do autor

Olhando para o gráfico da figura 3.13b observa-se que o ponto C fez um percurso à uma distância constante de um raio de duas unidades de comprimento em torno da origem do sistema cartesiano, gerando um arco de meia circunferência feita de bolinhas para ser a geratriz de uma superfície estilizada da esfera, cuja sintaxe de construção está na figura 3.12. O giro do ponto C pode ser dito, também, que está em torno do eixo Z, que na ilustração não aparece por estar na posição horizontal frontal - fato de estarmos trabalhando em construções no Espaço Cartesiano \mathbb{R}^3 .

Agora vamos tomar a sequência da curva da figura 3.13b denominada $l2$, que agora é a geratriz, e lançá-la dentro de outra sequência - no argumento <Objeto> - que vai processar os dados lançados no campo de entrada para a formação da superfície esférica, como mostra a figura 3.14.

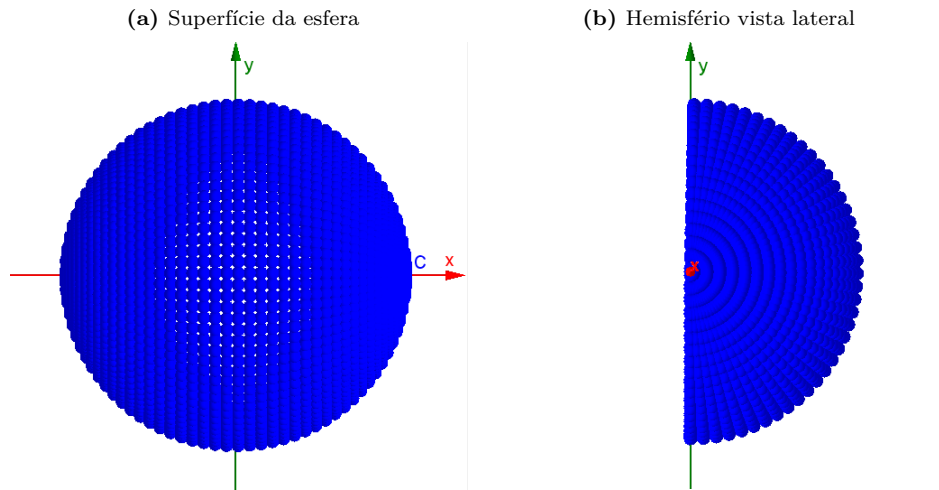
Figura 3.14: Sintaxe da Superfície da Esfera

Entrada: `Sequência(Girar(l2, i β / n, EixoX), i, 0, n) †`

Como resultado do processamento das informações contidas na sequência da figura 3.14 temos as superfícies da esfera e do hemisfério mostradas na figura 3.15a e 3.15b.

A formação dessas duas figuras é feita com a mesma sintaxe - figura 3.14; a diferença é que na superfície da esfera o argumento <Ângulo>, que é um controle deslizante representado pela letra grega β , está ajustado em 360 graus e, para o hemisfério vista lateral ajustou-se em 180 graus.

Figura 3.15: Formação superfície esférica

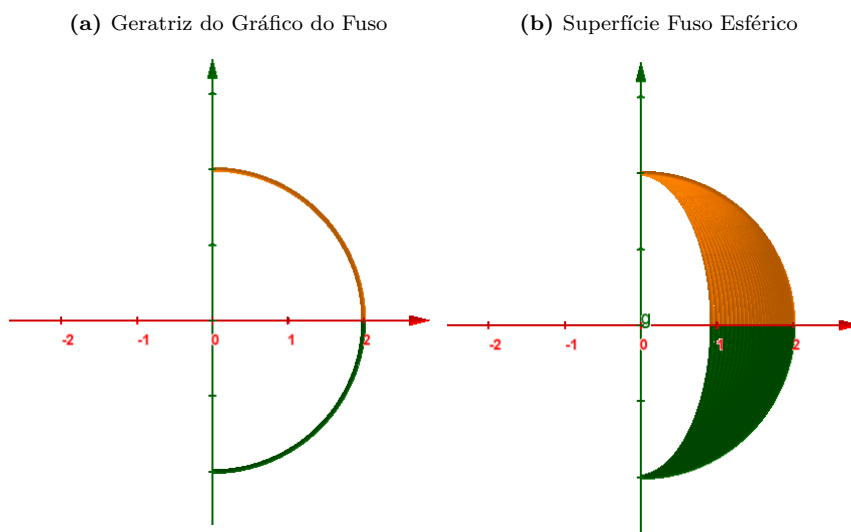


Fonte: do autor

3.1.4 Fuso Esférico

A seguir temos o fuso esférico montado com parte das duas calotas acima. O movimento da geratriz para o fuso esférico foi um ângulo de 30 graus.

Figura 3.16: Formação superfície Fuso esférico



Fonte: do autor

Passemos agora à parte de cálculo da área da superfície do fuso esférico fazendo uma assimilação da fórmula que dá a medida da área ocupada pelo fuso. Vamos tomar como base de construção a fórmula que

calcula a área completa da superfície da esférica para fazer uma regra de três, visto que se trata de grandezas diretamente proporcionais. Dizendo que a “parte” está para o “todo” na mesma proporção, podemos dizer que a área do fuso A_f está para a área da superfície da esfera $4\pi r^2$, assim como o ângulo de fuso α está para o ângulo de 360° da esfera:

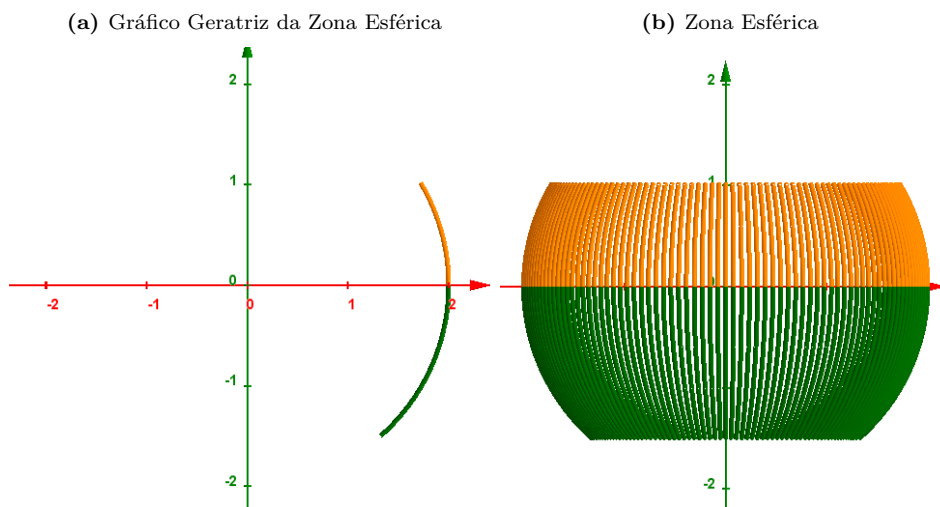
$$\frac{A_f}{4\pi r^2} = \frac{\alpha}{360}$$

Isolando a área do fuso A_f no primeiro membro da equação, temos: $A_f = \frac{4\pi r^2 \alpha}{360}$; e, simplificando os valores, temos a fórmula da área do fuso: $A_f = \frac{\pi r^2 \alpha}{90}$. Substituindo na fórmula α igual a 30° e r igual a 2 temos: $A_f = \frac{\pi 2^2 30}{90}$; $A_f = \frac{4\pi}{3}$. Portanto a superfície do fuso corresponde a $\frac{4\pi}{3}$ u.a.

3.1.5 Zona Esférica

A zona esférica é uma parte da superfície limitada por duas secções transversais ao eixo de rotação, dessa forma o eixo de rotação não toca a superfície em nenhum ponto.

Figura 3.17: Formação superfície Zona esférica

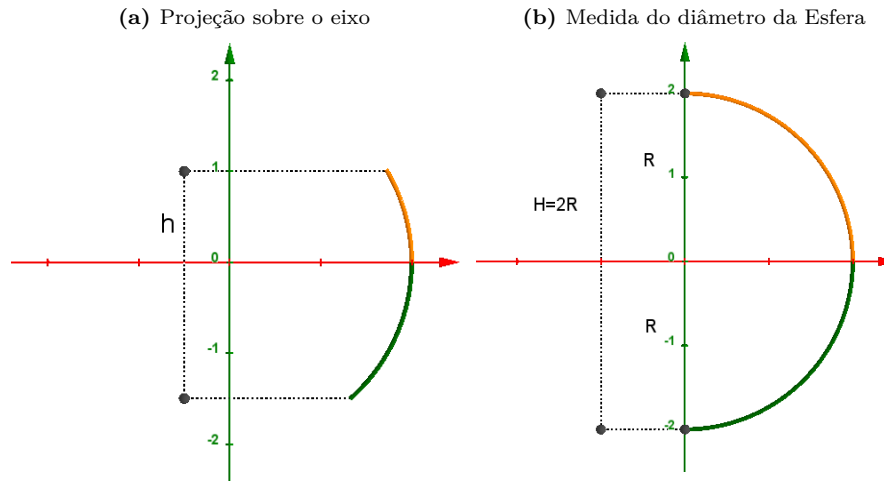


Fonte: do autor

Observando o gráfico geratriz que é composto pelas funções raiz usadas na figura 3.10a nota-se que elas estão limitadas no mesmo intervalo. Já neste caso da zona esférica em que a geratriz não toca o eixo de rotação, essas funções estão em intervalos diferentes, tendo valor de x inicial igual a 1,32 a $f(x)$ e a $g(x)$, igual a 1,732. Para fazer a alteração é só ir na janela de álgebra do Geogebra e clicar duas vezes em cima da função e digitar o valor de x inicial e dar *enter*; o valor de x final deve permanecer o mesmo nas duas funções. Agora, com a superfície da Zona Esférica pronta, é hora de calcular a área da sua superfície mas, antes, vamos fazer uma assimilação da fórmula que faz esse cálculo.

3.1.5.1 Fórmula da Zona Esférica

Tomaremos a fórmula da área completa para fazermos uma assimilação da fórmula da zona esférica, conforme a demonstração de Junior (2013). Pela fórmula que calcula a área completa da superfície de qualquer esfera ($A_e = 4\pi R^2$) vemos que seu tamanho depende apenas do respectivo raio elevado ao quadrado.

Figura 3.18: Gráficos demonstrativos de relações de medidas

Fonte: do autor

Na construção acima estaremos fazendo uma relação entre o diâmetro da semicircunferência geratriz da superfície esférica, de medida ($H = 2R$), e o segmento “agazinho” (h) que é a projeção ortogonal do gráfico geratriz sobre o eixo de rotação, o que está representado no gráfico da figura 3.18a. Igualando as razões proporcionais teremos a seguinte equação: $\frac{A_z}{A_e} = \frac{h}{H}$. Como a área da esfera é calculada pela fórmula $A_e = 4\pi R^2$ e, agazão H é igual a $2R$, substitui-se os valores na equação $\frac{A_z}{4\pi R^2} = \frac{h}{2R}$; e, agora, é só isolar o símbolo da área da zona esférica (A_z) no primeiro membro da equação e passar todos os valores para o segundo membro: $A_z = \frac{4\pi R^2 h}{2R}$; e simplificando os valores determinamos a fórmula que calcula a área particionada da superfície de uma esfera denominada Zona Esférica:

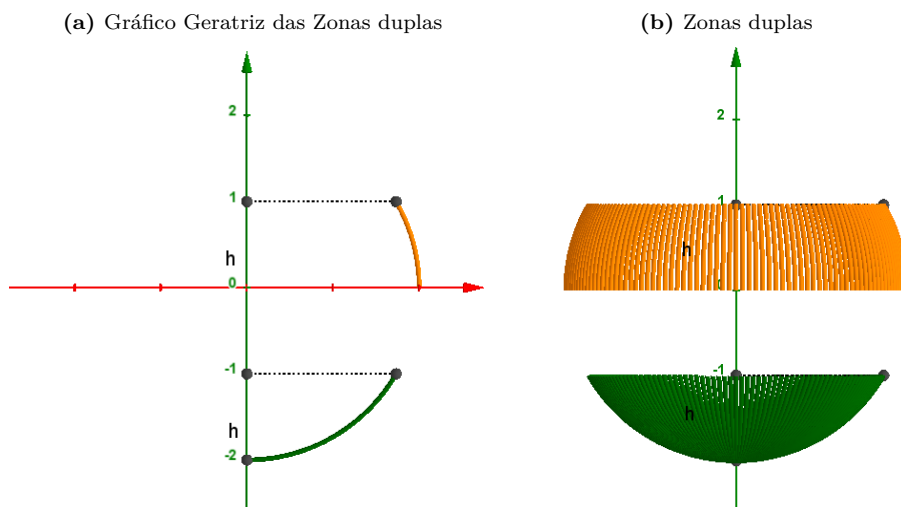
$$A_z = 2\pi R h$$

Após essa demonstração vamos ao cálculo da área da zona esférica da figura 3.17b com as informações tiradas dos gráficos da figura 3.18a e 3.18b com $h=2,5$ e $R=2$, lançando os valores na fórmula $A_z = 2\pi \cdot (2) \cdot (2,5)$ para obtermos a medida da zona esférica com área de 10π .

Cabe, ainda, fazer um raciocínio que nos forneça como resultado uma certa “prova dos nove”, por exemplo: se é verdade que o segmento h corresponde à superfície da zona esférica, então, o segmento agazão ($H=2R$) corresponderá à superfície da esfera, como mostra a figura 3.18a e 3.18b. Nesta fórmula da zona esférica ($A_z = 2\pi R h$) assimilada no procedimento anterior, vemos que o segmento agazinho (h) só poderá existir se ele for minimamente maior que zero (0) e só poderá ter tamanho máximo igual ao segmento agazão (H), que tem a mesma medida de $2R$. E, a partir desses argumentos, podemos inferir que, se a parte estiver para o todo na mesma proporção, então, poderemos calcular a superfície total da esfera com a fórmula que calcula uma seção apenas ou uma zona da esfera, vejamos: consideremos que o segmento agazinho (h) atingiu o seu limite máximo e agora ele tem a mesma medida de agazão, ou seja, $h=H=2R$; bem, substituindo-se o valor de agazinho na fórmula, teremos: $A_z = 2\pi R h = 2\pi R \cdot 2R$; e operacionalizando a equação ($A_z = 4\pi R^2$) temos que, pelo valor representativo da superfície, a fórmula da zona esférica convergiu para a fórmula da esfera, ou ainda, que a área calculada como uma parte de um todo corresponde, na verdade, à área total do objeto. Portanto, a constatação de que $A_z = A_e = 4\pi R^2$ cumpre o propósito da nossa “prova dos nove”.

E, também, a título de curiosidade sobre a zona esférica, vale observar que, sendo o tamanho do segmento que determina a extensão da superfície, não importará a posição da superfície da zona em relação ao diâmetro da geratriz - se estiver centralizado ou uma das suas extremidades está mais próxima de um dos polos do que a outra - vide figura 3.19a e 3.19b. Diante disso podemos dizer que qualquer que seja a localização da zona esférica ela terá a mesma área se a projeção agazinho (h) tiver o mesmo tamanho; vejamos a próxima construção:

Figura 3.19: Gráficos demonstrativos



Fonte: do autor

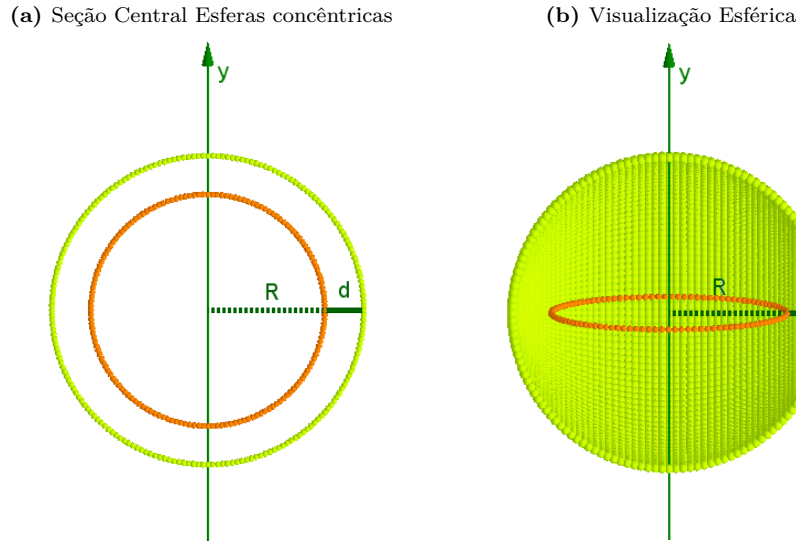
Temos duas zonas na mesma esfera em regiões diferentes e que projetam sobre o eixo dois segmentos de tamanho igual. Vamos lançar o valor de agazinho ($h=1$) na fórmula sabendo que o raio da esfera vale 2: $A_z = 2\pi Rh \iff A_z = 2\pi \cdot 2 \cdot 1 \iff A_z = 4\pi$. Como o raio mede duas unidades ao somarmos as duas zonas de uma unidade cada veremos que elas correspondem a uma calota inteira, que mede 8π ; por conseguinte, as duas calotas medem 16π e montam uma esfera completa cuja superfície, pela fórmula ($A_e = 4\pi R^2$), tem área de 16π u. a.

Portanto, pelas construções gráficas e pela própria fórmula da área ($A_z = 2\pi Rh$), fica demonstrado que duas superfícies com formatos diferentes, como a zona e a calota esférica da figura em destaque, têm a mesma área; curiosamente.

3.1.5.2 Dedução da Fórmula de Superfície da Esfera a partir do Volume (Intuitivamente)

Vamos registrar neste trabalho uma assimilação para a fórmula da esfera que é muito interessante pela sua beleza intuitiva, que vai assimilar a fórmula que calcula a área da superfície de uma esfera a partir da fórmula que calcula o seu volume (MELO, 2021). Na construção que vem a seguir teremos os gráficos que ilustram essa ideia, vejamos: (já existem exemplos de sintaxes nas figuras 3.12 e 3.14 para as próximas construções)

O gráfico da figura 3.20a representa uma seção diametral de duas esferas concêntricas onde se tem um segmento errezão (R) sendo o raio da seção externa, e o segmento dezinho (d) sendo a diferença entre o raio da seção externa e o da interna. O procedimento inicial é efetuar o cálculo do volume compreendido entre as duas esferas do gabarito das figuras acima, ou seja, o volume que existe entre as superfícies das duas esferas concêntricas.

Figura 3.20: Gráficos Demonstrativos

Fonte: do autor

Na verdade, o que nos interessa, mesmo, não é propriamente o volume em termos numéricos mas, uma expressão algébrica que represente esse volume; então se pudermos retirar o volume da esfera interna restará apenas o volume da diferença entre elas, é o que queremos. Usando a fórmula que calcula o volume ($V_e = \frac{4}{3}\pi R^3$) vamos fazer a subtração entre elas tomando as informações contidas nos gráficos. Definindo V_1 como o volume da esfera interna e V_2 como o volume da externa e V' como o volume resultante da diferença podemos escrever a seguinte expressão: $V' = V_2 - V_1$. Os valores correspondentes para V_2 é ($V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$) pois, o raio da esfera maior vale R, por isso, a fórmula não muda ; para V_1 é ($V_1 = \frac{4}{3}\pi(R-d)^3$) e, trocando na expressão os termos representativos pelos valores da fórmula, temos:

$$V' = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi(R-d)^3$$

resolvendo o cubo da diferença no parênteses e ajustando ao denominador comum podemos simplificar os valores assimétricos da expressão:

$$V' = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4\pi(R^3 - 3R^2d + 3Rd^2 - d^3)}{3} \iff V' = \frac{4\pi R^3 - 4\pi R^3 + 12\pi R^2d - 12\pi Rd^2 + 4\pi d^3}{3}$$

e fazendo as devidas simplificação dos valores a expressão ficará com a seguinte forma:

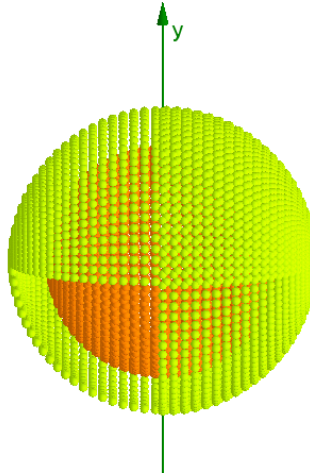
$$V' = \frac{12\pi R^2d - 12\pi Rd^2 + 4\pi d^3}{3}; \text{ e efetuada a divisão, normalmente, do segundo termo da equação para}$$

avancar no procedimento: $V' = 4\pi R^2d - 4\pi Rd^2 + \frac{4}{3}\pi d^3$. Essa expressão representa a diferença entre os dois volumes, então, temos alcançado uma parte da meta que era formatar uma expressão que representasse esse volume determinado pelo segmento de comprimento (d) entre as seções esféricas da figura 3.20a. Entretanto, o objetivo é chegar a uma assimilação para a fórmula da superfície da esfera; e, olhando para essa expressão ($V' = 4\pi R^2d - 4\pi Rd^2 + \frac{4}{3}\pi d^3$) já podemos vislumbrar esse valor ($4\pi R^2d$) entre as parcelas do segundo termo - só o dezinho que atrapalha, por enquanto. Vamos fazer um teste com essa expressão algébrica que, pretensamente, calcula um volume interposto de duas esferas: se é verdade que ela pode calcular o volume

determinado por um pedacinho do raio - dezinho (d) - então ela poderá calcular o volume determinado pelo raio inteiro

Pois bem, vamos calcular o volume total da esfera considerando que dentro desta expressão ($V' = 4\pi R^2 d - 4\pi R d^2 + \frac{4}{3}\pi d^3$) a variável dezinho (d) atingirá o seu tamanho máximo e terá o mesmo tamanho do raio ($d = R$). Substituindo o novo valor de dezinho na fórmula, teremos: ($V' = 4\pi R^2 R - 4\pi R R^2 + \frac{4}{3}\pi R^3 \iff V' = 4\pi R^3 - 4\pi R^3 + \frac{4}{3}\pi R^3$); e simplificando as duas parcelas assimétricas na equação ficaremos com a expressão que podemos chamar de “fórmula do volume da esfera”: $V' = V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Figura 3.21: Superfícies Esferas concêntricas



Fonte: do autor

Agora faremos o processo inverso para ver onde esse raciocínio nos levará em nossa busca; já fizemos o segmento crescer ao seu limite máximo e chegamos ao volume total da esfera; desta feita iremos reduzi-lo ao mínimo, até que não haja mais volume ou que o volume seja zero ou bem próximo de zero. Imagine-se a situação em que a distância d será tão insignificante ao ponto de as superfícies das duas esferas coincidirem no mesmo espaço. E isso não é impossível pelo fato - conhecidamente na matemática - da superfície não possuir espessura. Vamos fazer o seguinte raciocínio: o volume representado nesta expressão $V' = 4\pi R^2 d - 4\pi R d^2 + \frac{4}{3}\pi d^3$ foi produzido pela multiplicação de dezinho (d) em todas as parcelas de valores da expressão; portanto, para desfazer o resultado dessa multiplicação aplicaremos a operação inversa - a divisão - pelo mesmo fator dezinho (d) em toda a expressão, vejamos: $\frac{V'}{d} = \frac{4\pi R^2 d}{d} - \frac{4\pi R d^2}{d} + \frac{4\pi d^3}{3d} \iff \frac{V'}{d} = 4\pi R^2 - 4\pi R d + \frac{4\pi d^2}{3}$; vamos olhar para esta razão $\left(\frac{V'}{d}\right)$ e entender o que aconteceu com ela; ela representa um valor numérico que foi multiplicado por (d) mas, agora, está sendo dividido por (d), conclusão intuitiva: toda a espessura foi retirada e só restou algo que não possui espessura, ou seja, a superfície da esfera. Então, devemos pensar em termos de área, e admitir que a razão $\left(\frac{V'}{d}\right)$ de volume convergiu para área de superfície (A_s) e, agora, formam a igualdade $\frac{V'}{d} = A_s$; portanto, podemos compor a expressão da seguinte forma: $A_s = 4\pi R^2 - 4\pi R d + \frac{4\pi d^2}{3}$. Observa-se que o valor da área ($4\pi R^2$) já aparece livre da variável (d) no segundo termo; e, agora, só precisamos eliminar da expressão as outras duas parcelas que contêm a variável (d) e, faremos isso aplicando o conceito de limites fazendo (d) tender a zero; e, como essa estrutura algébrica é uma função polinomial de segundo grau e não há nenhuma restrição para a variável (d) podemos calcular o limite pelo método da

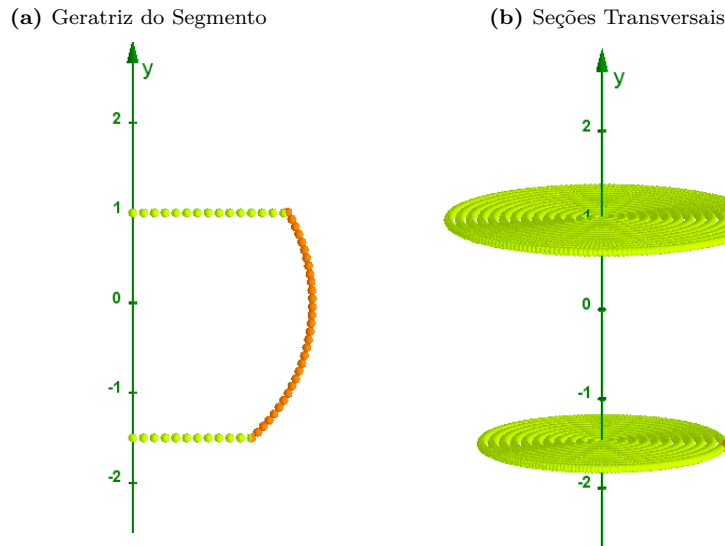
substituição: $\lim_{d \rightarrow 0} \left(4\pi R^2 - 4\pi R d + \frac{4\pi d^2}{3} \right) \Leftrightarrow \lim_{d \rightarrow 0} \left(4\pi R^2 - 4\pi R 0 + \frac{4\pi 0^2}{3} \right) = 4\pi R^2$; e o limite da expressão quando d tende a zero é $(4\pi R^2)$. Portanto, podemos escrever a expressão, com o valor do limite obtido, como uma assimilação da fórmula da área da superfície esférica, o que cumpre a nossa tarefa.

$$A_s = 4\pi R^2$$

3.1.6 Superfície do Segmento Esférico

É a parte da superfície da esfera limitada por duas secções transversais separadas entre si por um arco de circunferência que gira 360 graus em torno do eixo de simetria, inclusive as respectivas secções, como demonstra Costa (2020); conforme as figuras 3.22a e 3.22b abaixo.

Figura 3.22: Geratrizes de Segmento esférico



Fonte: do autor

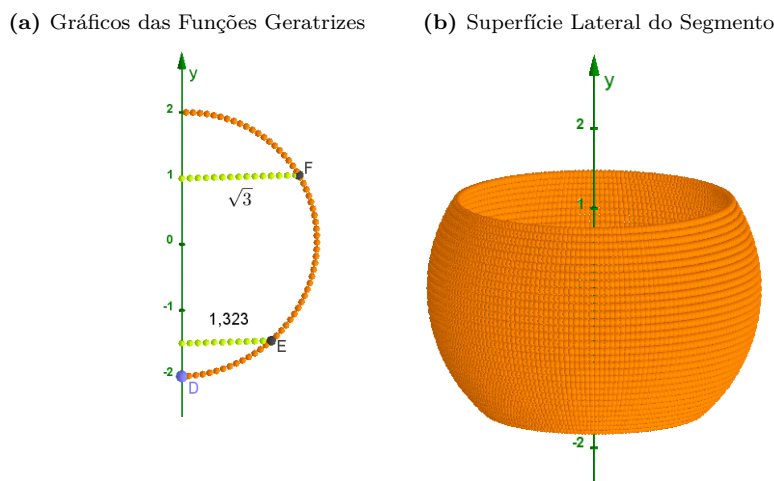
As duas secções transversais ao eixo de rotação são geradas por segmentos de retas que podem ser funções constantes, dados os devidos intervalos para que os seus extremos coincidam com os extremos do arco lateral, como mostra a figura 3.22a; formando esta composição de dois segmentos paralelos e uma curva que é a geratriz lateral da superfície do segmento esférico. Logo ao lado, a imagem da figura 3.22b mostra as duas secções já produzidas entre o arco lateral, proporcionando uma visão interna das estruturas gráficas que formam as superfícies do segmento esférico; e como já sabemos que a superfície lateral trata-se de uma zona esférica e já temos a fórmula que calcula a sua área ($A_z = 2\pi Rh$) e que, as secções são dois círculos com raios diferentes - que vamos chamar de círculo (a) e círculo (b) - cuja fórmula é ($A_c = \pi r^2$), então, a área do segmento será a soma das três áreas, área do segmento esférico (A_{se}) = área da zona (A_z) + área do círculo a (A_{ca}) + área do círculo b (A_{cb}): $A_{se} = A_z + A_{ca} + A_{cb} \Leftrightarrow A_{se} = 2\pi Rh + \pi r_a^2 + \pi r_b^2$. Agora precisamos fazer um ajuste nessa expressão a respeito da variável r que relaciona os dois círculos com raios de tamanhos diferentes e não devem ser representados, logicamente, pela mesma variável (r); vamos, então, trocar a letra dessa variável e, aproveitando o denominativo que demos aos círculos, substituiremos r por (a), na área do círculo a, e por (b), na área do círculo b; após a troca das letras nesta expressão ($A_{se} = 2\pi Rh + \pi r^2 + \pi r^2$) $\Leftrightarrow A_{se} = 2\pi Rh + \pi a^2 + \pi b^2$ poderemos por em evidência o termo comum para

compactar a fórmula: $A_{se} = \pi(2rh + a^2 + b^2)$. Agora, vamos tirar os os valores do gráfico da figura 3.23a e lançá-los na fórmula:

$$A_{se} = \pi(2Rh + a^2 + b^2)$$

onde R é o raio da circunferência, h é a distância entre os dois segmentos de retas que interceptam o semicírculo nos pontos E e F, a é o raio da secção maior e b é o raio da secção menor. Do gráfico temos que: $R=2$; $h=2.5$; $a= \sqrt{3}$; e $b=1.323$. Lançados na fórmula $A_{se} = \pi(2.2.(2,5) + (\sqrt{3})^2 + (1.323)^2) \Leftrightarrow A_{se} = \pi(10 + 3 + 1,75) \Rightarrow A_{se} = 14,75\pi$ mostram que a superfície do segmento esférico tem área de $14,75\pi$

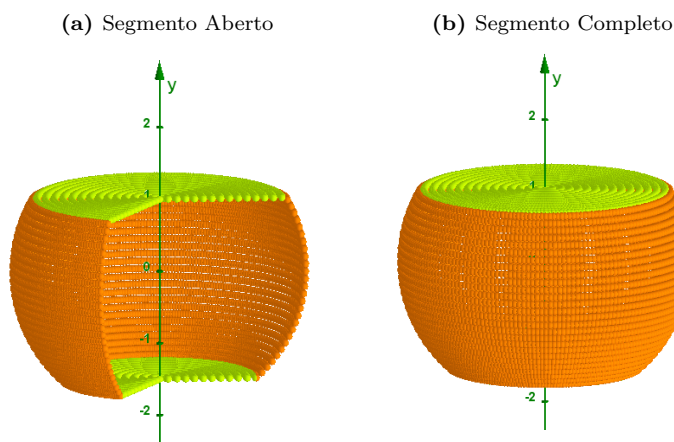
Figura 3.23: Gráfico e Superfície Lateral



Fonte: do autor

E em seguida, temos a montagem das superfícies do segmento: as duas seções circulares e a zona superficial lateral completando, assim, o corpo do objeto.

Figura 3.24: Superfícies Montadas do Segmento



Fonte: do autor

Falando, agora, sobre as construções das imagens, com relação a letra (a), que aparece na sintaxe das seções a e b entre parênteses nas figuras 3.26 e 3.27, trata-se da variável nativa do Geogebra usada no comando - Pontos Underline - que é colocada no primeiro argumento da sequência ao lado de um valor que, juntos, estão representando um par ordenado (x, y) , com y constante.

Figura 3.25: Sintaxe da semicircunferência

Entrada: `Sequência(Girar(D, i β / n, EixoZ), i, 0, n)`

Figura 3.26: Sintaxe do Segmento Seção a

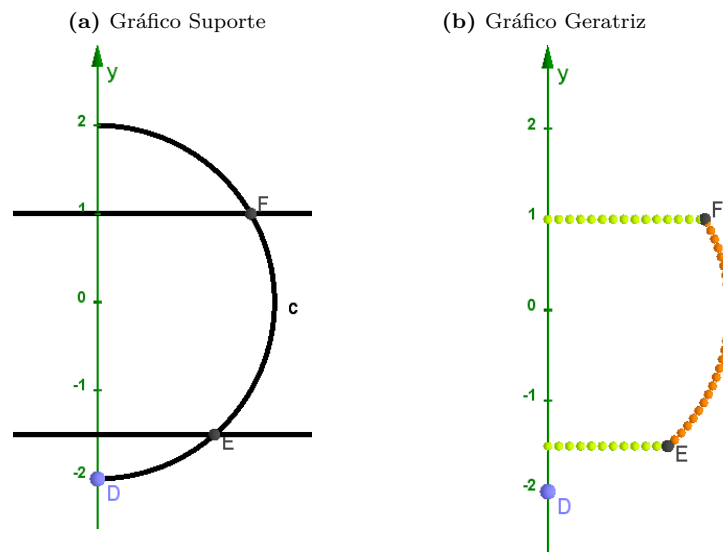
Entrada: `Pontos_1=Sequência((a,1), a, 0, sqrt(3), 0.12)`

Figura 3.27: Sintaxe do Segmento Seção b

Entrada: `Pontos_2=Sequência((a,-1.5), a, 0, 1.323, 0.12)`

As construções gráficas da figura 3.23a, no Geogebra, começam com a criação de uma semicircunferência sobre o eixo de rotação, eixo y ; em seguida, duas retas (y) paralelas (com valores: $y = 1$ e $y = -1.5$) entre si e ortogonais ao eixo y , como suporte para os segmentos das seções da tampa do segmento, e marca-se as intersecções com o arco; após isso oculta-se as retas e também o semicírculo (obs: oculta-se qualquer construção desmarcando seu protocolo na janela de álgebra); agora, para termos um arco produzido de bolinhas vamos fazer uma sequência de movimento giratório (figura 3.25), e outras duas, de movimento linear (figuras 3.26 e 3.27), para criar os segmentos; observando-se nas sintaxes dos segmentos que o movimento começa em x igual a zero, partindo do eixo y , e vai até aos pontos de intersecção E e F ; atentando no detalhe que é o “valor” do ponto que vai na sintaxe e não a letra, conforme mostra a figura da sintaxe 3.27.

Figura 3.28: Gráficos de Montagem

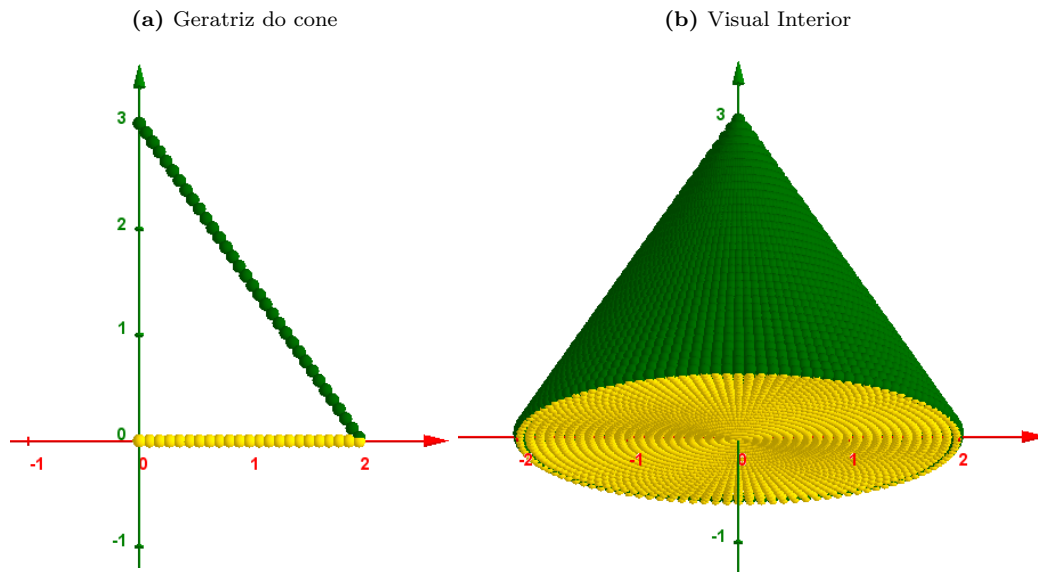


Fonte: do autor

3.1.7 Superfície do cone

As duas linhas poligonais são os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$. A função $f(x)$ é geratriz da lateral do cone, e a $g(x)$ da base, que ligadas ao eixo correspondem a um triângulo retângulo que vai gerar a superfície completa de um cone reto. Em resumo a superfície do cone é gerada por um triângulo que gira em torno de um de seus catetos.

Figura 3.29: Geratriz de cone e superfície Aberta



Fonte: do autor

Figura 3.30: Comandos Criadores dos Segmentos

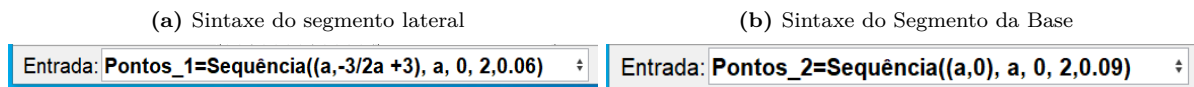
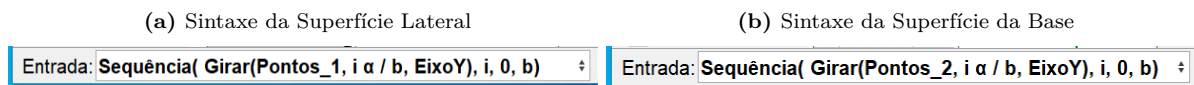


Figura 3.31: Comandos Criadores das Superfícies do Cone

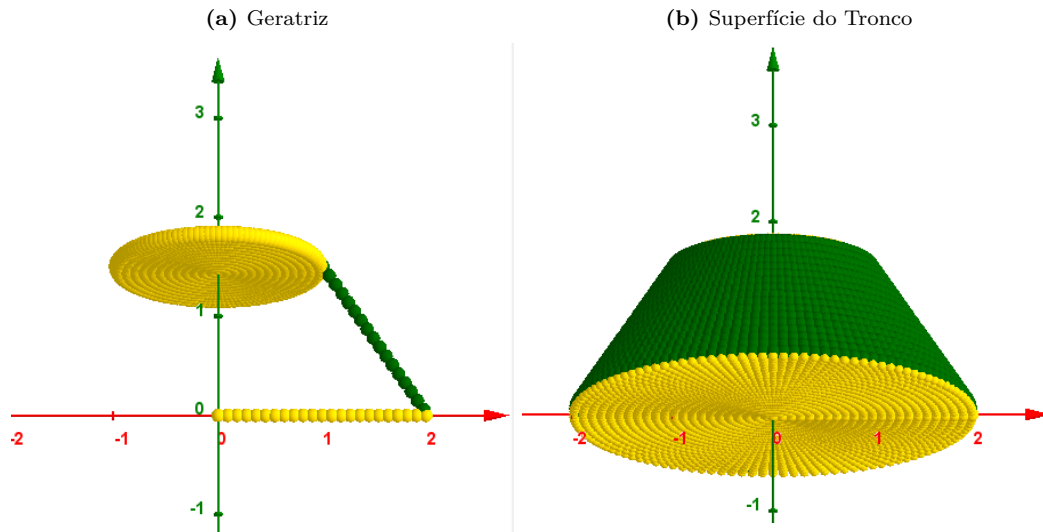


As sintaxes da construção das estruturas do cone são as duas sequências de movimentos lineares para formar os gráficos das geratrizes e outras duas, de movimentos circulares, para fazer os gráficos girarem em torno do eixo de simetria. Ressaltamos que os segmentos geratrizes produzidos nos comandos do aplicativo são funções de primeiro grau; o segmento da base do cone é uma função constante $y = 0$, e a geratriz lateral é uma função $y = -\frac{3}{2}x + 3$, ambas contidas no intervalo fechado que vai de zero 0 a 2. Observe-se que o coeficiente da função aparece no primeiro argumento da sintaxe da figura 3.30a na posição da coordenada y , no mesmo parênteses com a variável (a) , após a vírgula. E os valores decimais que aparecem no último argumento das sintaxes da figura 3.30a e 3.30b após a última virgula, são os incrementos necessários para o preenchimento de bolinhas do segmento.

3.1.8 Tronco de Cone

Aproveitando o material da figura anterior vamos cortar a ponta do cone e construir uma seção superior e deixar só o tronco, para fazermos a medição da área da superfície do tronco do cone, que é um tipo de corpo geométrico bem explorado em conteúdos matemáticos, na assimilação dos conceitos de medidas de áreas e de volumes.

Figura 3.32: Geratriz e Tronco de Cone



Fonte: do autor

Figura 3.33: Comandos de Segmentos do Tronco de Cone

(a) Sintaxe Seg. Base Superior

(b) Sintaxe Seg. Lateral

Entrada: `Pontos_4=Sequência((a, 1.5), a, 0, 1, 0.08) ↕`

Entrada: `Pontos_3=Sequência((a, -3 / 2 a + 3), a, 1, 2, 0.06) ↕`

Figura 3.34: Comandos de Superfícies do Tronco de Cone

(a) Sintaxe Sup. Base Superior

(b) Sintaxe Superfície Lateral

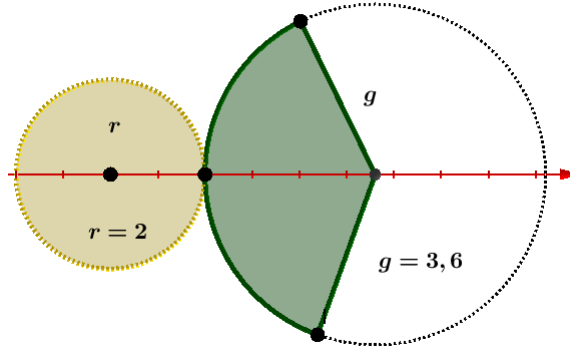
Entrada: `Sequência(Girar(Pontos_4, i a/b, EixoY), i, 0, b) ↕`

Entrada: `Sequência(Girar(Pontos_3, i a/b, EixoY), i, 0, b) ↕`

Agora vamos proceder ao cálculo das superfícies desses dois corpos simétricos - o cone e o tronco de cone. Obter a área total do cone significa somar a área da base circular com a área lateral do objeto, o que em termos simbólicos teremos: $A_c = A_b + A_l$. Para isso, vamos fazer uma relação entre área de círculos e comprimento de circunferências, pelo fato de que a lateral do cone aberta é um setor circular, portanto, faremos uma regra de três para assimilarmos a fórmula da área lateral, como demonstra Ítallo (2018). Então, olhando para a figura 3.35 temos o círculo da base e um setor circular que é a lateral aberta do cone, e vamos chamar de g ao raio do setor e de r ao raio do círculo da base do cone; e fazendo a correspondência podemos dizer que a área lateral (A_l) do cone está para a área do círculo de raio igual a geratriz (A_g), assim como comprimento do setor circular, que define a área lateral do cone, está para o comprimento da circunferência

de raio g . Portanto, podemos montar a seguinte equação: $\frac{A_l}{A_g} = \frac{C_r}{C_g}$; e em seguida, substituiremos na equação as fórmulas já conhecidas para círculos e circunferências; $\frac{A_l}{\pi g^2} = \frac{2\pi r}{2\pi g}$, e isolamos A_l no primeiro termo e simplificamos os valores para termos: $A_l = \frac{2\pi r(\pi g^2)}{2\pi g} \iff A_l = \pi r g$.

Figura 3.35: Gráfico de Demonstração



Fonte: do autor

Retomando a equação da área total do cone ($A_c = A_b + A_l$) vamos substituir os símbolos pelas fórmulas, pois, já temos as mesmas ($A_c = \pi r^2 + \pi r g$) e lançar os valores de (r) - que é a media do segmento geratriz da base - e de (g), a medida da geratriz lateral: $A_c = \pi 2^2 + \pi 2.(3,6) \implies A_c = 4\pi + \pi 7,2 \iff A_c = 4\pi + \pi 7,2$; e, então, a superfície total do cone tem área de $11,2\pi$ u. a.

Para o cálculo da área do tronco do cone usaremos uma fórmula parecida (DOLCE; POMPEO, 2013a, p. 275) a do cone mas, com outra fórmula para a lateral e, devemos acrescentar uma parcela para a área da segunda base, pois, o tronco de cone tem duas bases; $A_{tc} = A_B + A_b + A_l \implies A_{tc} = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi g(R + r)$. Em se tratando do tronco do cone anterior já temos a medida do raio errezão ($R=2$) da base maior, o da base menor errezinho ($r=1$), e a medida da geratriz ($g = 1,8$); substituindo na fórmula, teremos: $A_{tc} = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi g(R + r) \iff A_{tc} = \pi 2^2 + \pi 1^2 + \pi (1,8)(2 + 1) \implies A_{tc} = 4\pi + \pi + 5,4\pi \implies tc = 10,4 \pi$; e, então, a superfície total do tronco de cone tem área de $10,4 \pi$ u. a.

3.1.9 Superfície do Cilindro

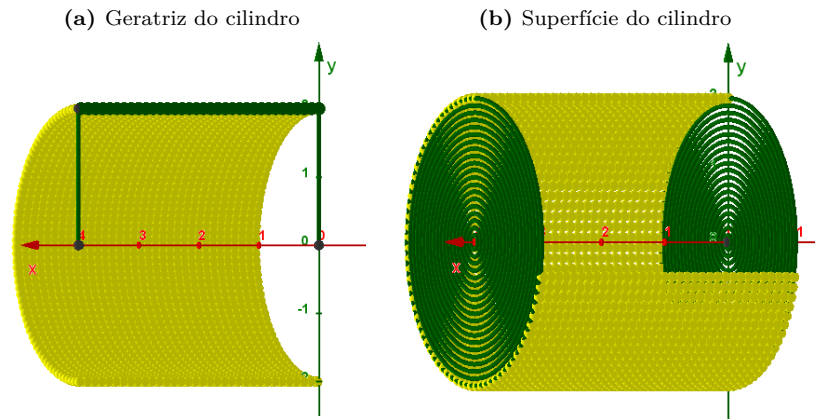
Essa figura geométrica espacial, que pode ter suas dimensões calculadas até de forma simples, foi utilizada pelo grande matemático e geômetra Arquimedes para calcular as dimensões mais complexas de outros corpos, quando ele elaborou métodos simples, porém, bem sofisticados, para obter área e volume da esfera tendo como ponto de partida o cilindro, como explica Lino (2021).

Em nosso exemplo (figura 3.36b), a geratriz da superfície do cilindro são 3 polígonos, como gráficos de duas funções constantes: $y = 0$ e $y = 4$, contidas no intervalo fechado que vai de 0 até 2 e, um segmento de reta paralelo ao eixo y à distância de duas unidades e medindo 4 unidades de comprimento, fazendo intersecção com os dois segmentos das duas funções constantes .

A superfície do cilindro não está fechada com o fim de se visualizar o interior do mesmo. A área da superfície total do cilindro é dada pela soma das áreas das duas bases circulares com a área lateral; as duas bases têm a mesma medida e cada uma se obtém pela fórmula $A_b = \pi r^2$; a lateral planificada é uma figura

retangular cuja área se obtém com a mesma fórmula do retângulo, que é o produto do comprimento pela altura do cilindro; e o comprimento da lateral corresponde ao da circunferência da base. Então, os elementos componentes da fórmula da área lateral são a circunferência da base ($2\pi r$) e a altura (h): $A_l = 2\pi r h$ u.a. E somando as fórmulas das duas bases e juntando com a da lateral, fica assim: $A_c = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. E como temos as medidas colocaremos na fórmula $A_c = 2\pi r^2 + 2\pi r h \iff A_c = 2\pi 2^2 + 2\pi 2 \cdot 4$; e o resultado nos dá que a área da superfície do cilindro mede 24π

Figura 3.36: Geratriz e Superfícies do cilindro



Fonte: do autor

Figura 3.37: Comandos geradores Bases do cilindro

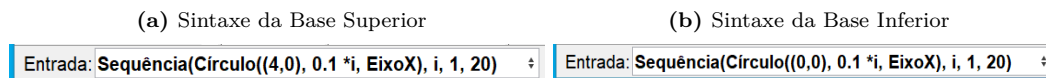


Figura 3.38: Comandos geradores de Superfície do Cilindro



3.1.9.1 Curiosidade

Vamos matar uma curiosidade entre o cilindro e a esfera com relação às dimensões das suas superfícies (DOLCE; POMPEO, 2013a), através de um confronto com as fórmulas de cálculo das respectivas áreas. Temos a fórmula da área do cilindro: $[A_c = 2\pi r h + (2\pi r^2)]$; para a esfera não vamos usar a sua fórmula convencional da área ($A_e = 4\pi r^2$); em substituição vamos usar a fórmula da área do segmento esférico: $[A_{se} = 2\pi r h + (\pi a^2 + \pi b^2)]$ por questão de conveniência, dado o aspecto semelhante dos objetos - âmbos possuem duas seções circulares - e as equações das fórmulas também se assemelham. Mas essa fórmula pode dar a área total da esfera? Para suprir essa objeção deveremos destacar as três variáveis da fórmula: h , a e b ; a variável h é livre, ela subsiste sem as outras duas. E se nesta equação $[A_{se} = 2\pi r h + (\pi a^2 + \pi b^2)]$ as variáveis a e b forem zero, então as duas seções do segmento não existem e a fórmula perde a parcela das seções, ficando assim: $[A_{se} = 2\pi r h]$. Nessa situação a variável h chegou ao tamanho do diâmetro e vale agora

($h = 2r$); e trocando o h por $2r$ na fórmula, temos: $[A_{se} = 2\pi r \cdot 2r] \Rightarrow [A_{se} = 4\pi r^2]$; e assim, a fórmula do segmento esférico convergiu para o formato convencional da fórmula da área da esfera; eis porque foi gerada, intuitivamente, uma superfície de segmento esférico sem seção - o que devemos convir que se trata da superfície plena da esfera. Portanto, suprida a objeção, vamos ao confronto das equações das fórmulas.

Observando nestas duas equações, $[A_{se} = 2\pi rh + (\pi a^2 + \pi b^2)]$ e $[A_c = 2\pi rh + (2\pi r^2)]$, vemos que as parcelas entre parêntesis correspondem às seções circulares nos dois objetos e, que podemos retirá-las das equações, permanecendo, em cada equação, a mesma parcela $2\pi rh$ que mede a área de superfície lateral com formatos diferentes: a lateral do cilindro e a do segmento esférico; mas, o que seria a lateral de um segmento esférico sem as seções circulares? Apenas a zona esférica, cuja fórmula é composta pela parcela $2\pi rh$; e isso nos leva à uma fórmula unificada para as duas figuras. A área da zona esférica é igual à área lateral do cilindro que é igual a $2\pi rh \iff A_{ze} = A_c = 2\pi rh$ (LINO, 2021). Dessa forma, podemos imaginar que dado um cilindro de papel, ou tecido, cuja altura tenha valor do diâmetro de uma esfera, e a base do cilindro também tem diâmetro igual ao da esfera¹; sua área embrulha a esfera! Construimos uma visualização para ilustrar essa ideia:

Figura 3.39: Comandos geradores de Segmento e Curvas

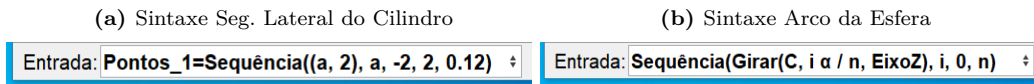


Figura 3.40: Comandos geradores das Superfícies

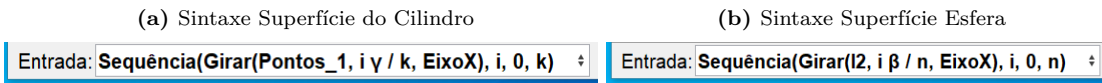
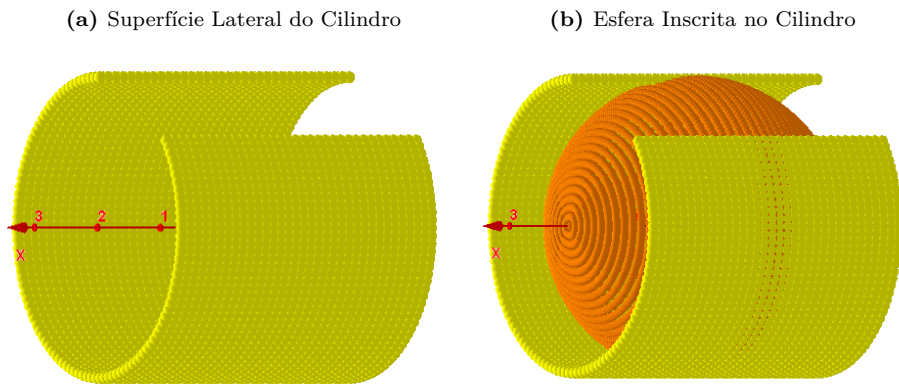


Figura 3.41: Superfícies Correspondentes de Corpos Diferentes



Fonte: do autor

¹Esse cilindro tem nome de cilindro reto equilátero.

3.2 Sólidos de Revolução

Sólidos geométricos são os objetos tridimensionais definidos no espaço. O conjunto de todos os sólidos geométricos costuma ser dividido em três grandes grupos: poliedros, corpos redondos e outros.

Poliedros são sólidos geométricos limitados por faces que, por sua vez, são polígonos. Assim, qualquer sólido geométrico cuja superfície seja formada somente por polígonos é um poliedro e, portanto, eles estão fora deste estudo por que não podem ser gerados por movimento rotativo.

Os sólidos geométricos que não se enquadram nas duas categorias anteriores são o que chamamos de “outros”. Geralmente são sólidos que possuem uma “face” redonda e outras, poligonais (BRASILESCOLA, 2008).

Os corpos redondos são aqueles sólidos nos quais as curvas simétricas são predominantes no seu formato e, se colocados sobre uma superfície plana levemente inclinada, rolam. São exemplos de corpos redondos: cones, cilindros e esferas.

Esses corpos espaciais são gerados por objetos bidimensionais que, portanto, possuem área, e que giram em torno de um eixo de simetria percorrendo um ângulo maior que zero. Isso nos permite dizer que os sólidos geométricos são produto do movimento. Este movimento particular recebe o nome de revolução e os sólidos por ele gerados são chamados corpos ou sólidos de revolução - o assunto em pauta.

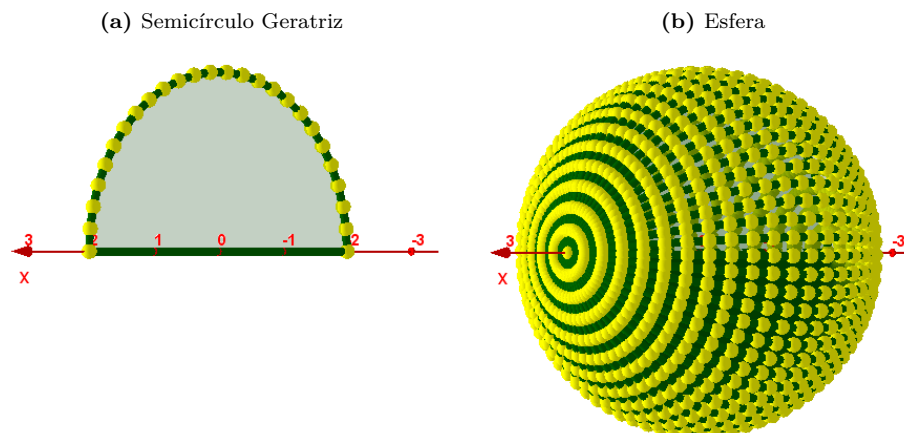
Vamos construir a visualização de alguns desses sólidos, enfatizando que a nossa ferramenta de trabalhos gráficos é o nosso grande Geogebra.

3.2.1 Esfera

Então vamos começar pela esfera, que é uma figura geométrica elementar, de corpo circular, e que possui uma geometria própria. Os seus elementos básicos são: centro, superfície, raio e volume, e a fórmula que calcula seu volume depende apenas do raio: $V_e = \frac{4}{3}\pi r^3$

Vamos calcular o volume da esfera produzida na figura 3.42b; a partir dos dados colhidos do eixo de simetria da geratriz da esfera, que está na figura 3.42a, que nos dá a medida de duas unidades de comprimento para o raio da esfera, o que é tudo o que precisamos para o cálculo do volume da mesma; e lançando o valor na fórmula, temos: $V_e = \frac{4}{3}\pi 2^3 \Rightarrow V_e = \frac{4}{3}\pi 8$, portanto, o volume da esfera é: $\frac{32}{3}\pi$ u. v.

Figura 3.42: Geratriz da esfera e a própria, a partir de sua geratriz



As construções das imagens estão em estilo arrojado para ressaltar a beleza dos objetos; e as superfícies estão em alto relevo mas, sabemos que as superfícies não possuem espessura.

Figura 3.43: Comandos geradores do Semicírculo

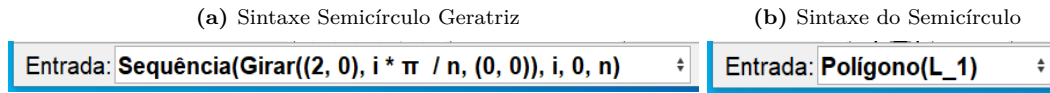
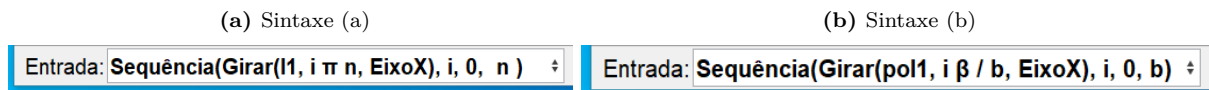
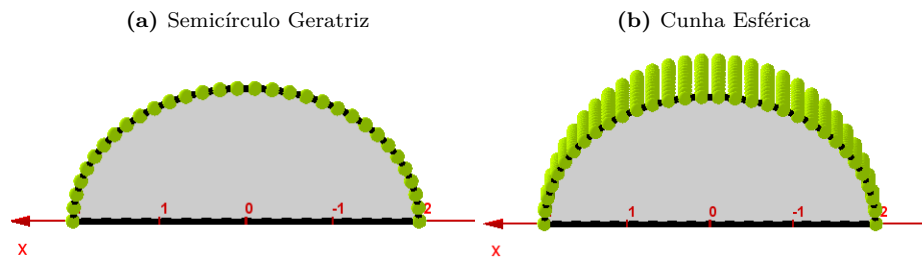


Figura 3.44: Comandos geradores da Esfera



3.2.2 Cunha esférica

Figura 3.45: Geratriz e Cunha Esférica



Fonte: do autor

Os comandos das construções desses gráficos estão nas sintaxes da figura 3.42a e 3.42b, com a diferença de ângulos; a cunha esférica só faz 30 graus de giro, que é ajustado no controle deslizante de ângulo.

Em se tratando da cunha esférica podemos comparar o seu formato como o de um gume de laranja, ou um fatia de melancia, pois, são partes de objetos redondos, assemelhados à esfera. O volume da cunha esférica é calculado levando-se em conta o ângulo do movimento da geratriz e o raio, podendo esse ângulo ser denotado por α ; então, tendo as medidas da cunha esférica, mostradas no gráfico da figura, podemos fazer a equação da proporção:

$$\frac{V_c}{V_e} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

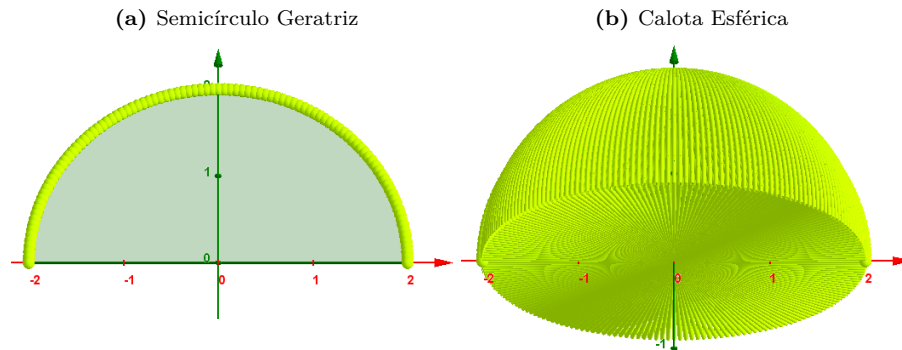
e obter $V_c = \frac{\pi\alpha}{270}r^3 \iff V = \frac{\pi 30}{270}2^3 = \frac{24}{27}\pi$ u. v.

3.2.3 Volume da Calota Esférica

As partes cortadas de uma esfera, de forma fatiada paralelamente, são definidas como segmentos esféricos, podendo ter duas seções planas ou apenas uma, como é o caso da calota; e quando o assunto é segmento esférico a palavra de ordem é volume, ou seja, o quanto de espaço o objeto ocupa no ambiente.

A calota, objeto deste exemplo, é um hemisfério, portanto, a altura (h) tem o mesmo comprimento do raio (r) que é de duas unidades de comprimento - informação necessária e suficiente para obtermos o seu volume; então, vamos lançar esses valores na fórmula: $V_c = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h) \Rightarrow V_c = \frac{1}{3}\pi 2^2(3 \cdot 2 - 2) \Rightarrow V_c = \frac{1}{3}\pi 4(4) \Rightarrow V_c = \frac{16}{3}\pi$; e, temos que o volume dessa calota esférica é $\frac{16}{3}\pi$.

Figura 3.46: Geratriz e Calota Esférica



Fonte: do autor

Figura 3.47: Comandos geradores das imagens



Figura 3.48: Sintaxe do Semicírculo

Entrada: Polígono(L_1)

A ordem das construções referentes à calota esférica começa na sequência que gera o arco de pontos - sintaxe da figura 3.47a - que gera uma lista de pontos denominada (L_1); em seguida, vem o polígono, que é gerado lançando-se o nome da lista (L_1) dentro do argumento do comando Polígonos - sintaxe da figura 3.48; e, depois, vem a sequência da criação do sólido da calota da figura 3.47b, que é feita com o polígono gerado e denominado *pol1*, do modo que está na sintaxe mostrada na figura 3.47b. Todos esses comandos devem ser digitados dentro da caixa de entrada do aplicativo.

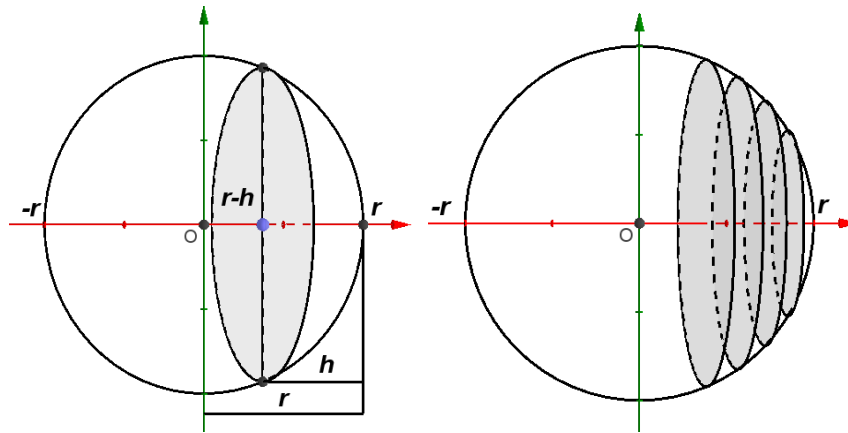
3.2.3.1 Assimilação da Fórmula do Volume da Calota Esférica

Vamos enunciar a demonstração da fórmula para o volume da calota esférica pelo método utilizado para a da esfera, por meio de integrais Kilhian (2010). Para isso precisaremos formatar a função $f(x)$ proveniente da equação da esfera, que se estrutura com a equação da circunferência, neste exemplo, com centro na origem dos eixos: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Agora vamos determinar o limite da integral pela simulação nos gráficos da figura seguinte, que vai de $r - h$ até r . Nesta simulação da figura 3.49 estamos admitindo uma calota esférica de altura h formada por infinitos cilindros de alturas infinitesimais dx e raios y , em que y é variável de altura para as pequenas partições.

E, se estamos considerando as seções como cilíndricas, então, vamos utilizar a fórmula do volume do cilindro:

$$A_{cilind} = A_b \cdot h \Leftrightarrow A_{cilind} = \pi y^2 \cdot h$$

Figura 3.49: Gráfico Demonstrativo



Fonte: do autor

Temos que ajustar a função para procedermos com a integração substituindo o h pelo dx :

$$A_{cilind} = \pi y^2 \cdot dx$$

A soma destes infinitos cilindros de alturas infinitesimais forma a calota esférica, nos limites $(r - h$ e $r)$, da seguinte integral que fornece o seu volume:

$$V = \int_{r-h}^r \pi y^2 dx$$

Colocando a constante π para a frente da integral:

$$V = \pi \int_{r-h}^r y^2 dx$$

E agora lançamos a função de y na integral: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

$$V = \pi \int_{r-h}^r \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx$$

resolvendo a álgebra:

$$V = \pi \int_{r-h}^r (r^2 - x^2) dx$$

Agora vamos integrar em relação a x :

$$V = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{r-h}^r$$

Vamos aplicar os limites da integração:

$$V = \pi \left[\left(r^2 r - \frac{r^3}{3} \right) - \left(r^2 (r - h) - \frac{(r - h)^3}{3} \right) \right]$$

Operacionalizamos a álgebra da expressão:

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left(r^3 - r^2 h - \frac{r^3 - 3r^2 h + 3rh^2 - h^3}{3} \right) \right] \\ V &= \pi \left[\left(\frac{3r^3 - r^3}{3} \right) - \left(\frac{3r^3 - 3r^2 h - r^3 + 3r^2 h - 3rh^2 + h^3}{3} \right) \right] \\ V &= \frac{\pi}{3} \left(3r^3 - r^3 \right) - \left(3r^3 - 3r^2 h - r^3 + 3r^2 h - 3rh^2 + h^3 \right) \\ V &= \frac{\pi}{3} \left(\cancel{3r^3} - \cancel{r^3} - \cancel{3r^3} + \cancel{3r^2 h} + \cancel{r^3} - \cancel{3r^2 h} + 3rh^2 - h^3 \right) \\ V &= \frac{\pi}{3} \left(3rh^2 - h^3 \right) \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h) \end{aligned}$$

Portanto, está demonstrada e referendada a fórmula da calota esférica.

4.1 Conceitos do Termo

A sua terminologia é o ato ou efeito de quadrar; reduzir uma figura geométrica a um quadrado. O termo se aplica a várias áreas do conhecimento e da arte, como: na matemática, na astronomia e na música. E aqui trataremos da sua aplicação em geometria plana, no que tange à quadratura de polígonos e, também, a do círculo; que é um processo que busca transformar a área de figuras, de variados formatos, em um quadrado de mesma área (PORTO, 2023).

”Esse processo de transformar uma região poligonal em um quadrado equivalente é conhecido como “quadratura de uma região poligonal”. Foi daí que surgiu a expressão “fazer a quadratura do círculo”, dos três problemas clássicos dos gregos, o mais fascinante”[...]. (DIAS, 2014)

Em meio a pesquisa para o desenvolvimento deste trabalho nos deparamos com os três problemas clássicos da geometria grega: a Duplicação do Cubo, a Trissecção do Ângulo e a Quadratura do Círculo (PERPÉTUA, 2011). Um dilema para os gregos, que consideravam como algo impossível de ser feito com apenas compasso e régua não graduada. Existem muitos trabalhos que enunciam soluções estimadas para a quadratura do círculo, incluindo grandes vultos da matemática como Descartes (CRIPPA, 2010). Então surgiu o desafio de tentarmos elaborar algo nesse sentido, também.

Para esta tarefa nos lançamos ao trabalho para desenvolver uma construção gráfica que pudesse nos fornecer uma precisão, ainda que modesta, em face de outras que já existem, para a retificação da circunferência; visto que, diante de números gigantescos já auferidos por super computadores que chegaram à 62,8 trilhões de casas decimais para o número π (ONODY, 2021), os métodos geométricos são bem singelos. Alguns dos métodos já existentes, encontrados em nossa busca, conseguiram chegar até seis casas decimais de aproximação - o processo de Specht, o de Terquem ou de Kochansky, o de Arquimedes, e etc (WIKIPÉDIA, 2017). Então, inspirados nessas grandes ideais desenvolvemos uma construção geométrica para retificar a circunferência, baseada nos critérios Euclidianos, isto é, usando apenas compasso e régua não graduada - mas isso, “dentro do ambiente” do aplicativo Geogebra.

Mas, primeiramente, vamos fazer algumas quadraturas de polígonos, o que é mais trivial, para vermos se ocorre algum procedimento padrão durante o processo.

4.2 Polígonos - Definições Básicas

Uma região do plano formada pela união de segmentos de retas não colineares que não se cruzam e, que sejam fechadas entre si - é a definição geométrica para “Polígono”. Além disso, o polígono também é

constituído por todos os pontos no interior dessas linhas, ou seja, a área contida por elas. Diante desta definição podemos constatar que um círculo ou disco, por exemplo, não pode ser definido como um polígono. Dentre todos os polígonos convexos os que tenham as seguintes características serão denominados Polígonos Convexos Regulares (NUNES, 2023):

- todos os seus lados são congruentes (têm a mesma medida);
- todos os seus ângulos internos são congruentes (têm a mesma amplitude);
- A amplitude de cada ângulo externo, pode ser calculada dividindo 360° pelo número de lados;
- Se o número de lados for ímpar, então nenhuma das suas diagonais passa pelo centro do polígono;
- Se o número de lados for par, então o número de diagonais que passam pelo centro do polígono é igual a metade do número de lados.

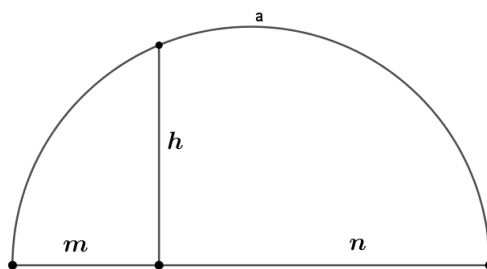
”Um polígono é irregular quando seus lados não são todos iguais e seus ângulos internos não tem a mesma medida. Na geometria plana existem diferentes tipos de polígonos irregulares. Para muitos deles, há uma fórmula matemática para se calcular sua área, outros requerem um método diferente”. (SILVA, 2015).

Inicialmente, enunciaremos as quadraturas de algumas figuras planas irregulares, mas, predominantemente, o tratamento será com polígonos regulares.

4.3 Média Geométrica

Vamos utilizar uma já conhecida construção gráfica que calcula a raiz geométrica entre segmentos de retas. A média geométrica de dois números positivos é a representação geométrica da raiz quadrada aritmética desses números; é o segmento de medida igual a raiz quadrada do produto desses dois segmentos (COUTO, 2017). E por esse processo podemos obter os segmentos que precisamos para a quadratura de todas as figuras planas regulares.

Figura 4.1: Gráfico da Raiz Geométrica

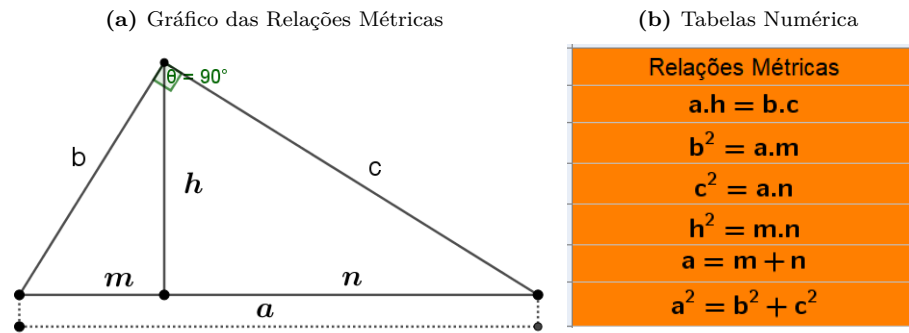


Fonte: do autor

Vamos evocar as relações métricas do triângulo retângulo, figura 4.2, para justificar a medida do segmento h no gráfico da raiz geométrica - figura 4.1.

Fazendo a relação dos segmentos m , n e h temos a quarta relação da tabela, que vale ($h^2 = m \times n$), o que pode ser reescrito, como: $h = \sqrt{m \times n}$, isto é, o segmento h é a raiz geométrica do produto $m \times n$. E, também, pela propriedade, todo triângulo retângulo inscrito na circunferência a sua hipotenusa corresponde ao diâmetro e todos os seus vértices estão sobre ela, como demonstra Ferretto (2019).

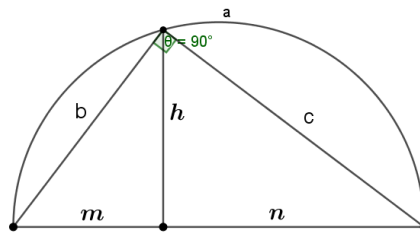
Figura 4.2: Construções Demonstrativas



Fonte: do autor

E como mostra a figura 4.3 o arco de circunferência inscreve o triângulo retângulo e o intersecta no ângulo reto ($\theta = 90^\circ$) e nos extremos do diâmetro, isso cumpre a propriedade e, portanto, justifica o segmento h como “média geométrica” dos segmentos m e n ; o que, também, valida o gráfico.

Figura 4.3: Triângulo Inscrito no Semicírculo

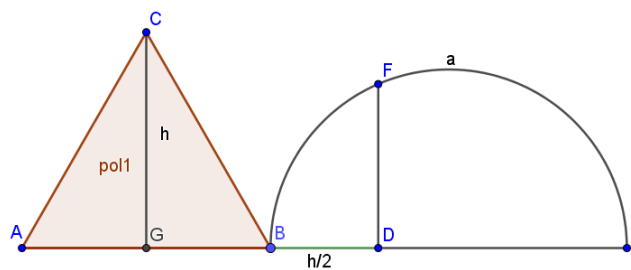


Fonte: do autor

4.4 Procedimentos de Construções das Quadraturas no Geogebra

Na Janela de Visualização do Geogebra fazemos um ponto A e um outro B sobre o eixo horizontal e, com o mouse na barra de ferramentas, acionamos “Polígono Regular” e com cliques nos dois pontos abre-se automaticamente uma janela para digitar o número de vértices do polígono desejado, e digitamos 3 - neste exemplo trabalharemos com um triângulo.

Figura 4.4: Construção dos Objetos Base



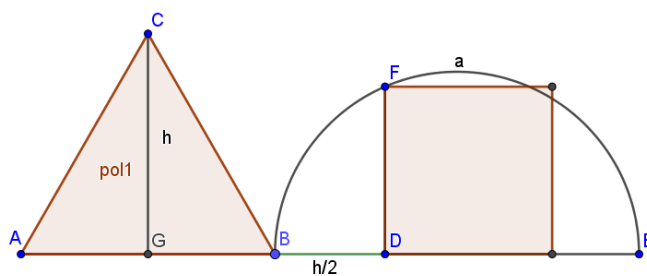
Fonte: do autor

E com o polígono pronto, traça-se uma reta perpendicular à base \overline{AB} a partir do ponto C , e clica-se na intersecção criando o ponto G ; oculta-se a reta e traça-se nesses pontos o segmento h que determina a

altura do polígono. Digitamos na caixa de entrada o comando: Segmento(<Ponto>, <Comprimento>) e, no argumento “Ponto” entra o ponto B, e no argumento “Comprimento”, entra a letra h do item que representa a altura do polígono, e usamos só a metade do mesmo (Ex: $h/2$), porque o segmento deve ter metade da altura, e tecla Enter - e está pronto o primeiro segmento. E, agora, repete-se o procedimento para fazer o outro segmento do mesmo comprimento da base do polígono. Feito isso, acionando a ferramenta “Semicírculo”, clica-se nos pontos B e E, para formar o arco da raiz geométrica.

Em seguida traça-se uma reta perpendicular ao diâmetro no ponto de encontro dos dois segmentos - acionando-se “Reta Perpendicular” na barra de ferramentas - e cria-se, com o mouse, o ponto de intersecção da reta com o arco, e oculta-se a reta; e nesses dois pontos, o de intersecção D e o ponto F traça-se o segmento \overline{FD} , que é o segmento gerado para a quadratura do objeto. Agora é só acionar a ferramenta “Polígonos Regulares” e colocar quatro para os vértices e será gerado um quadrado com área de mesma medida do plígono original, conforme figura 4.5

Figura 4.5: Construção da Quadratura

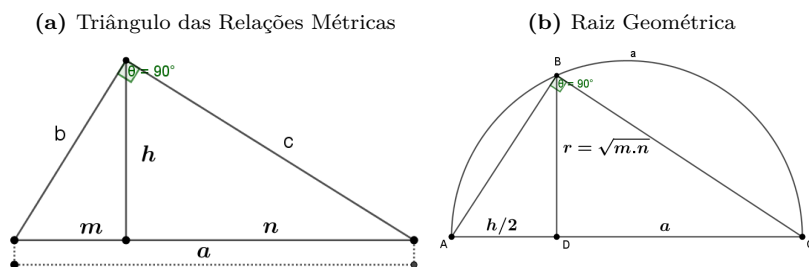


Fonte: do autor

Esses são, portanto, os procedimentos básicos das quadraturas, outros pormenores serão acrescentados ao comando das figuras pertinentes.

4.5 Quadratura de um triângulo

Figura 4.6: Construções Demonstrativas 4



Fonte: do autor

Já que num triângulo retângulo temos que a altura h é média geométrica das projeções dos catetos sobre a hipotenusa ($h = \sqrt{m \cdot n}$), podemos encontrar, geometricamente, a área de um triângulo retângulo qualquer sendo conhecidas a altura e a medida da hipotenusa. Consideremos a figura 4.6a. Colando em uma reta as medidas $h/2$ e a , e depois, encontrando o ponto-médio desse segmento, podemos construir a semicircunferência cujo diâmetro é $h/2 + a$. E partindo da extremidade interna de $h/2$ a perpendicular, até ela

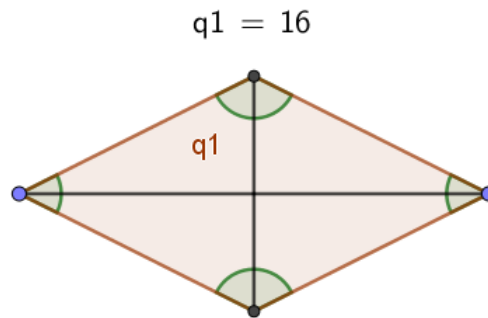
tocar na semicircunferência, determinando a altura r de um triângulo retângulo. Daí teremos, pela relação métrica discutida aqui, que $r^2 = a \cdot \frac{h}{2}$. Isto é, o quadrado do comprimento r é a área do triângulo original!

Dessa forma podemos expandir esse raciocínio a fim de, para qualquer triângulo, obter sua área! Consideremos o triângulo da figura 4.6a, sendo conhecidas as medidas da altura h e da base a . Para encontrarmos geometricamente a área desse triângulo, basta-nos tomar a metade dessa altura e juntar à medida da base a num segmento, e seguir a construção como feita no parágrafo anterior. A medida r dessa construção será o tamanho do lado do quadrado, cuja área é a do triângulo considerado!

4.6 Quadratura do Losango

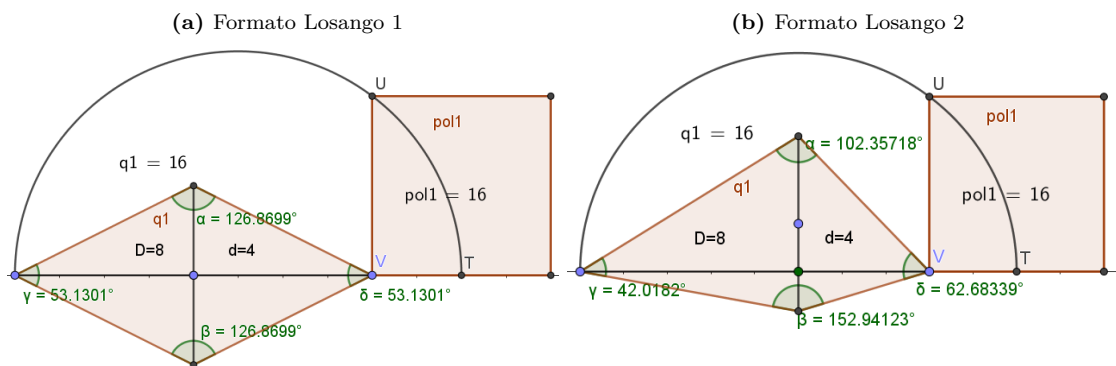
O losango é um quadrilátero (polígono de quatro lados) convexo cuja medida de seus lados são iguais. Além disso, possui os ângulos opostos iguais.

Figura 4.7: Losango



Fonte: do autor

Figura 4.8: Ilustração da Quadratura do Losango



Fonte: do autor

Construímos, nas imagens da figura 4.8a e 4.8b dois polígonos: um losango, dentro do rigor das suas definições, e o outro, um polígono quadrilátero, de formato “parecido” com o losango, para um experimento: ver se os dois objetos poderiam ter suas quadraturas feitas pelo mesmo método. Para isso, asseguramos para os dois objetos as mesmas medidas das diagonais - que são elas as variáveis da equação da fórmula que calcula a área do losango. Na construção dessas figuras existe um encadeamento, com o gráfico da raiz geométrica,

para garantir que qualquer alteração nas dimensões do polígono a quadratura seja corrigida simultaneamente. E o que verificamos é que o movimento da diagonal menor, na direção vertical ou na horizontal, deforma o losango, porém, a medida da área continua a mesma; o quadrado (pol1=16) se mantém intacto, imóvel, do mesmo tamanho. E esse experimento mostra, em relação aos quadriláteros desses formatos, que o fator que determina o tamanho das suas áreas não é o formato mas, a medida das suas diagonais.

Construção:

Do losango tomamos a diagonal maior com 8 unidades de comprimento e a metade da diagonal menor com 4 unidades ($4/2$), dois segmentos para compor o diâmetro da semicircunferência: um de tamanho 8 e o outro de tamanho 2. O segmento \overline{UV} é gerado no gráfico, partindo do ponto V , perpendicular ao diâmetro até tocar no arco - esse segmento é a raiz geométrica procurada, que resulta do produto dos dois segmentos do diâmetro - é o lado do quadrado da quadratura.

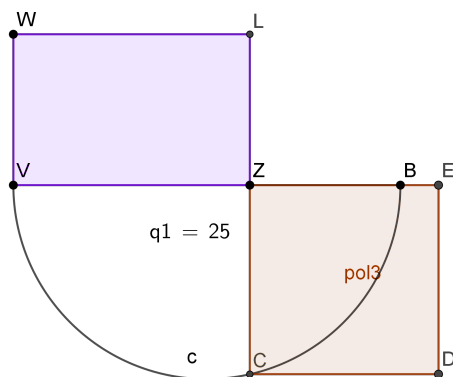
Confirmação algébrica: Área do losango: $A_l = (D \times d)/2 = (8 \times 2) = 16$.

Área do quadrado: $A_q = l^2 = 4^2 = 16$.

4.7 Quadratura do Retângulo

Esse caso é simples! Tomamos um dos lados como base, e concatenamos ele com o segmento de comprimento da altura do retângulo. Do ponto-médio desse segmento construímos a semicircunferência com diâmetro tal segmento. A partir da extremidade da base traçamos a perpendicular, que delimitará a altura na intersecção com a semi-circunferência. Novamente, tal medida compreenderá o lado do quadrado cuja área será a do retângulo.

Figura 4.9: Retângulo



Fonte: do autor

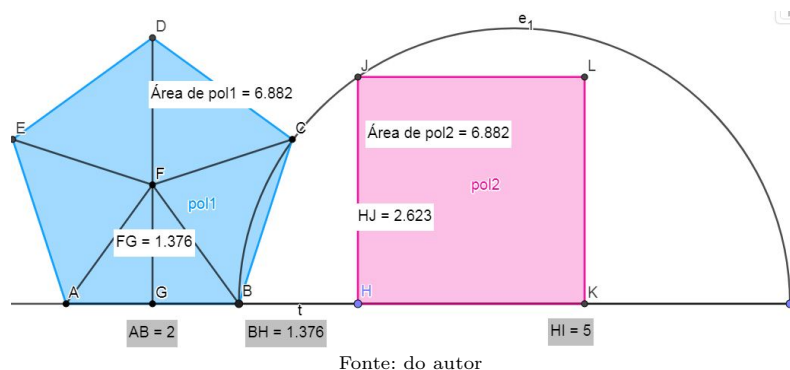
Construção:

Na construção ilustrada na figura 4.9 temos duas medidas do retângulo cuja área é $q1$, ou seja, a base e a altura, compõem o diâmetro da semicircunferência; sendo o segmento $\overline{VL} = \overline{ZB}$. E o segmento \overline{VC} , perpendicular ao diâmetro no ponto Z , é a raiz geométrica do produto $\overline{VZ} \times \overline{ZB}$. Pela fórmula da área temos, que $\overline{VC}^2 = \overline{VZ} \times \overline{ZB}$.

4.8 Quadratura do Pentágono

Nas quadraturas anteriores, trabalhamos com a medida da base da figura e a média da sua altura - para triângulos e losangos, e com a base e altura inteira da figura - para os retângulos. Agora, a partir do polígono pentágono, as medidas das figuras implicadas no processo serão: o apótema tomado a partir do centro de gravidade do polígono (centro da circunferência que circunscreve o polígono) até o ponto médio de um lado; e o semi-perímetro da figura. Ou seja, em qualquer polígono regular vale $A = a \cdot \frac{p}{2}$ (DOLCE; POMPEO, 2013b). O ponto Médio ou o centro de gravidade pode ser obtido acionando a ferramenta Ponto Médio, ou com o comando “CentroDeGravidade(<Polígono>)”, no Campo de Entrada do aplicativo, entrando com o nome da figura no argumento do comando. A construção geométrica baseia-se então na determinação de um triângulo retângulo cuja altura é média geométrica de a e $\frac{p}{2}$. Isso é conseguido colocando-se essas medidas concatenadas, tirado o ponto-médio do segmento total e traçada a semicircunferência; e em seguida traçando-se a altura na extremidade do segmento representando o apótema.

Figura 4.10: Ilustração da quadratura do pentágono



Como queremos formatar dois segmentos, para como eles compor o diâmetro da circunferência, tomamos a metade da medida do perímetro do pentágono ($p/2$) mais a medida do apótema (a). O pentágono reúne em sua volta cinco segmentos de medida 2, que são as cinco bases dos triângulos isósceles que compõem o pentágono; e o fato de se somar as cinco bases e dividir por dois e multiplicar pelo apótema (altura) para calcular a área, na prática, é o mesmo raciocínio utilizado na fórmula do triângulo, com a diferença de se usar a base toda e metade da altura, o que é indiferente. Então, vamos calcular a área do pentágono e, também, a área do quadrado pra vermos se houve a conversão:

$$\text{Pentágono: } A = (10 \times 1,376)/2 = 6,88$$

$$\text{Quadrado: } A = (2,623)^2 = 6,88$$

Temos a quadratura confirmada pelos resultados.

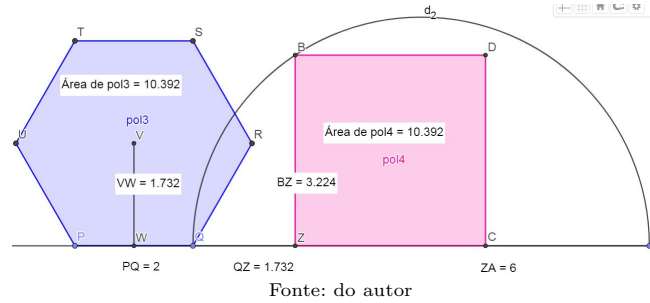
4.9 Quadratura do Hexágono

Este belo polígono - o hexágono - possui uma simetria interessante, é composto por 6 triângulos equiláteros com ângulos e lados iguais e todos os seus vértices estão equidistantes. Dentro da categoria dos polígonos só existem dois, formados por triângulo equilátero: o hexágono e o próprio triângulo equilátero.

Sabemos que a fórmula da área do hexágono é dada por $A = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2} = 3\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. E já que o hexágono é formado por 6 triângulos equiláteros, então a última expressão pode ser interpretada como sendo do produto

do semiperímetro do hexágono, pela medida da altura do triângulo equilátero responsável pelo hexágono (ou simplesmente apótema do hexágono). Dessa forma a quadratura é obtida tomando-se essas medidas num segmento que definirá o diâmetro da semicircunferência da determinação para a média geométrica trabalhada em todos os nossos casos anteriores.

Figura 4.11: Ilustração da quadratura do Hexágono



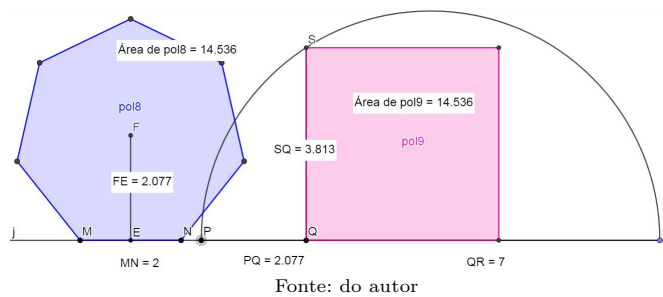
Por exemplo, consideremos um hexágono de comprimento de lado $\ell = 2$. Logo $A = (3 \times \ell^2 \times \sqrt{3})/2$. Consequentemente temos que o segmento QZ está representando o valor numérico $\sqrt{3}$; e o segmento ZA é a metade do perímetro do hexágono e está representando o valor numérico 6, e a média geométrica é o segmento $BZ = 3, 224$. Portanto, o segmento BZ é o lado do quadrado *pol4* de área igual a do hexágono *pol3*.

4.10 Quadratura do Heptágono

O heptágono é um polígono regular formado internamente por sete triângulos isósceles.

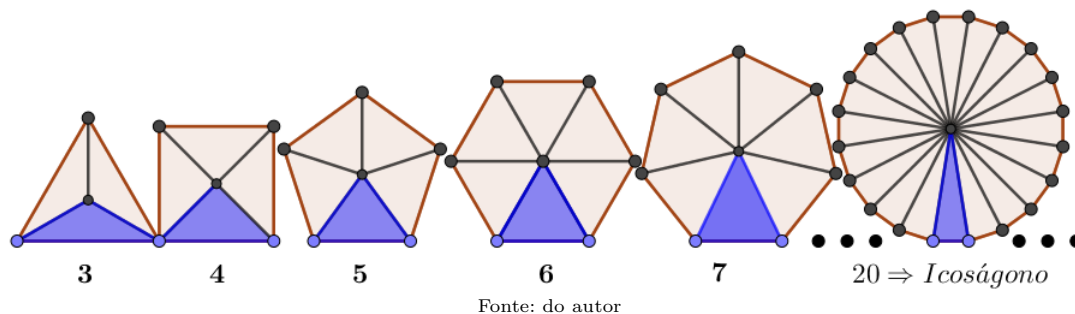
Nesta construção usamos o apótema do triângulo e metade do perímetro da figura *pol8* para formar o diâmetro do gráfico, e obtivemos o comprimento do segmento \overline{SQ} como a raiz geométrica - lado da figura quadrada *pol9* de área igual.

Figura 4.12: Ilustração da quadratura do heptágono



Agora já podemos observar a repetição do mesmo procedimento nas quadraturas dos polígonos regulares compostas por triângulos: a conversão das suas medidas básicas em um produto de duas parcelas (apótema \times $p/2$), formando os dois segmentos para o diâmetro. E a raiz geométrica desses dois segmentos será, portanto, a medida do lado do quadrado procurado.

Figura 4.13: Ilustração da Convergência dos Polígonos



Fonte: do autor

A figura 4.13 é a elaboração de uma seqüência de polígonos regulares com o destaque para os triângulos que compõem as mesmas e, estão realçados em azul. A título de informação: todos eles têm origem no centro de massa do polígono. Olhando para as figuras é fácil observar que, a partir do primeiro polígono, os triângulos azuis vão mudando as suas dimensões, por exemplo: o vértice oposto à base vai se distanciando, ao passo que a base vai diminuindo em relação aos lados. Com relação as medidas dos lados é fácil ver, também, que predomina o triângulo do tipo isósceles - que tem dois lados congruentes. E podemos constatar, já de forma empírica que, à medida que entram mais triângulos na composição os lados se aproximam um do outro e, relativamente, a base diminui; e, seguindo esse fluxo de formação, os lados do triângulo vão ficando tão próximos que a base tende a ficar quase insignificante, no entanto, ela nunca desaparecerá. Podemos afirmar isso baseados no primeiro item de definição de polígonos, dentre os cinco que estão apresentados no início deste tópico (4.2), que diz: Todos os seus lados são congruentes (têm a mesma medida). Ou seja, esses lados são as bases dos triângulos componentes do polígono. E os outros itens ainda dizem que os polígonos têm ângulos internos e externos; nos que têm número de lados ímpar nenhuma das suas diagonais passa pelo centro do polígono; Se o número de lados for par, então o número de diagonais que passam pelo centro do polígono é igual a metade do número de lados. Portanto, ainda que um polígono se aproxime, em extremo, do formato do círculo, essas definições garantem que os polígonos regulares manterão, sempre, as suas características fundamentais. E que exclui, terminantemente, o círculo ou disco, da classificação de polígono.

4.11 Quadratura do Círculo

Agora vamos proceder à quadratura mais importante mediante o método de Euclides, obedecendo rigorosamente aos critérios estabelecidos para o processo de quadratura que permite usar, apenas, compasso e régua não graduada. Pra isso contamos com a capacidade do nosso aplicativo Geogebra.

Segundo Arquimedes

Proposição 1: “A área de qualquer círculo é igual a um triângulo retângulo no qual um dos lados ao redor do ângulo reto é igual ao raio, e o outro [lado é igual] à circunferência do círculo”. (ASSIS, 2019)

Mas, a nossa missão aqui é construir, da área de um círculo, um quadrado e não um triângulo; entretanto, essa importante afirmação será a nossa premissa.

Nas quadraturas já desenvolvidas neste trabalho observamos que nos polígonos retangulares (quadrado e retângulo) as dimensões usadas na fórmula de cálculo das áreas são as medidas de dois lados adjacentes; todavia, se nos quadriláteros - convexos - forem consideradas as dimensões diagonais, então, a fórmula será a mesma, usada para triângulos - tomando-se uma diagonal por base e a outra por altura e dividindo por

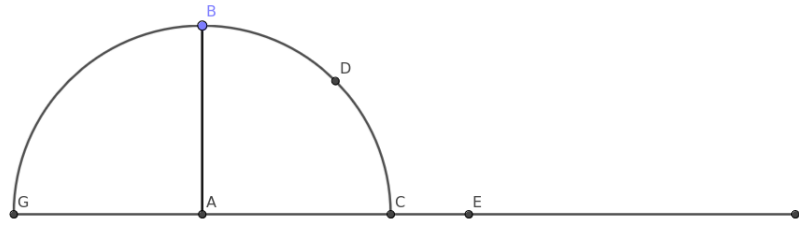
dois (como fizemos na seção 4.6 e ilustrada da figura 4.8a). E nos demais polígonos regulares, a partir do pentágono, as dimensões usadas são o apótema e o semi-perímetro.

Para o processamento da área do círculo vamos partir da premissa de Arquimedes e tratar a área do círculo no formato triangular, e usar o mesmo critério da fórmula: $A_t = \frac{b \cdot h}{2}$. A base do círculo é o seu perímetro, portanto, $(2\pi r)$ e a altura, é o raio: $A_t = \frac{2\pi r \cdot r}{2} \iff A_t = \pi r^2$. Mas, atentemos para o detalhe que precisamos separar o r^2 no produto, desta forma: $A_t = r \cdot \pi r$. Podemos, aqui, mudar a nomenclatura da fórmula e chamar de área do círculo: $A_c = r \cdot \pi r$. Então, um dos segmentos é o raio (r) e o outro é a metade da circunferência (πr). Bem, o raio já vem no formato adequado mas, a semicircunferência não é tão simples de formatar, fazer uma curva virar um segmento de reta; para isso precisaremos proceder com um processo de retificação do arco.

4.11.1 Retificação da Circunferência

A figura 4.14 a seguir mostra uma construção gráfica que elaboramos para fazer a retificação do arco de circunferência. Este gráfico foi construído dentro do ambiente do aplicativo Geogebra obedecendo as regras do método de Euclides, de sorte que, ele pode ser reproduzido, manualmente, com compasso e régua não graduada.

Figura 4.14: Retificação da circunferência



Fonte: do autor

Sendo conhecida a semicircunferência de centro em A e arco G, B e C, com raio r , traçamos o ponto D dividindo o arco BC pela metade. A partir de D traçamos a circunferência de mesmo raio r , que ao tocar a semireta GA determina um ponto E. Ao se tomar um raio r' sendo da circunferência de centro em E que passa pelo ponto B, marcamos o ponto F. Vamos provar que o comprimento \overline{AF} é uma aproximação do comprimento da semicircunferência dada.

Inicialmente notemos que \overline{AE} é hipotenusa do triângulo retângulo ADE já que E foi obtido a partir de D dividindo o arco BC pela metade, caracterizando $\widehat{CAD} = 45^\circ$, e $\overline{DE} = \overline{AD} = r$. Conseqüentemente, $\overline{AE} = r\sqrt{2}$.

Agora deveremos determinar qual o valor de $r' = \overline{EF} = \overline{BE}$. Vamos tomar como recurso a geometria analítica! Consideremos que $A(0,0)$, $B(0,r)$, $E(x_e,0)$ e $D(x_d,y_d)$. Já que E foi obtido pela circunferência centrada em D com raio r , então satisfaz à equação $(x-x_d)^2 + (y-y_d)^2 = r^2$. Mas, como D pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, teremos que $x_d = y_d$, que nos permite dizer então que $(x_e - x_d)^2 + x_d^2 = r^2$, ou que $x_e = \sqrt{r^2 - x_d^2} + x_d = \sqrt{y_d^2} + x_d = 2x_d$ ¹; obtida a penúltima igualdade pelo uso da equação da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ que caracteriza a circunferência centrada em A, raio r e que contém D. Conseqüentemente a distância de E a B será $\overline{BE} = \sqrt{x_e^2 + r^2} = \sqrt{4x_d^2 + r^2}$. Mas, novamente por $x^2 + y^2 = r^2$, com $x_d = y_d$

¹Assumindo que D está no primeiro quadrante, $\sqrt{y_d^2} = |y_d| = y_d$

substituídos nela, chegamos a $x_d^2 = \frac{r^2}{2}$. Logo $\overline{EF} = \overline{BE} = r\sqrt{3}$. Portanto

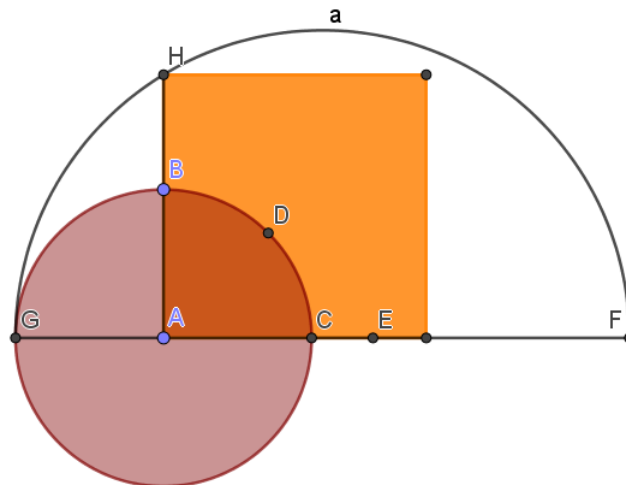
$$\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EF} = r \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} \right) \approx r \cdot 3,14626437$$

Se $r = 1$ apresentamos então uma aproximação do π com duas casa decimais, mas existem muitas outras aproximações. Uma com 4 casas decimais e outra com 6 estão descritas em Kumayama (1992). Reparemos no entanto que a aproximação obtida aqui é por excesso, e conseqüentemente o cálculo da quadratura por essa medida retratará uma área do círculo superior que a área real.

4.11.2 Quadratura do Círculo

Agora, já de posse do arco retilíneo vamos inserir os segmentos nessa importante ferramenta, em destaque na produção de quadraturas neste TCC e que é um poderoso algoritmo geométrico.

Figura 4.15: Quadratura do círculo com o comprimento retificado da semicircunferência



Fonte: do autor

Recordando que a quadratura remonta à fórmula da média geométrica $h = \sqrt{m \cdot n}$, teremos na figura 4.15 o segmento $m = r = \overline{AG}$, o raio do círculo, e $n = \pi r = \overline{AF}$ o semiperímetro do círculo. Portanto, o quadrado de lado (AH) retrata a quadratura da área do círculo com a precisão de duas casas decimais.

Teoremas de Pappus-Guldin

São teoremas que calculam áreas de superfícies e volumes de sólidos de revolução com método não convencional. Teorema este que precisa da determinação do centróide ou centro de gravidade do objeto para efetuar o cálculo da área e do volume.

Esses teoremas teriam sido descobertos por Pappus de Alexandria que viveu em torno do ano 300 D.C, os quais foram retomados pelo matemático suíço Paul Guldin (1577-1642), por volta de 1600, por isso o nome de Teorema de Pappus-Guldin (TREVISAN, 2017).

5.1 Centróide

O Centróide é o centro de gravidade ou ponto de inércia de um objeto com densidade uniforme. Para um objeto unidimensional uniforme de comprimento L o centróide é o ponto médio do segmento de linha. Para um triângulo o centróide é o ponto de intersecção de suas três medianas - o baricentro. O centróide de uma figura geométrica é o seu centro da simetria. Para qualquer outro objeto de forma irregular de duas dimensões o centróide é o ponto em que um suporte simples pode equilibrar esse objeto na horizontal. Em geral o centróide de um objeto bidimensional ou tridimensional pode ser obtido por integrais duplas ou triplas (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

5.2 Demonstração Geométrica dos Teoremas

5.2.1 Teorema da Área

É o primeiro teorema; que determina que a área de uma superfície de revolução é obtida pelo produto do comprimento da curva geratriz pela distância do caminho percorrido pelo centróide dessa mesma curva ao longo do ângulo que gera a superfície, Ou seja:

$$A = \theta \bar{x} L \tag{5.1}$$

sendo:

θ : ângulo do movimento em torno do eixo de rotação;

\bar{x} : distância do centróide ao eixo de rotação;

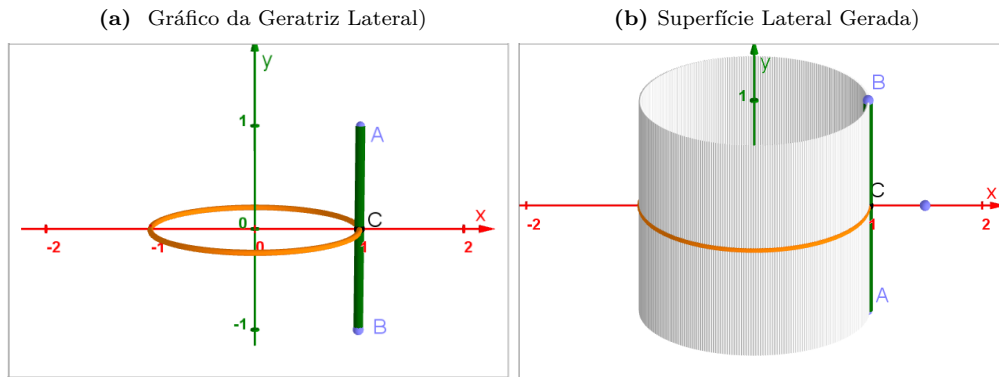
L : extensão longitudinal da curva geratriz da superfície.

5.2.2 Geratrizes Retilíneas

Dado um segmento \overline{AB} podemos constituir-lo geratriz para uma variedade de superfícies, dependendo da sua posição em relação ao eixo de rotação. Vamos fazer alguns exemplos usando o mesmo segmento $\overline{AB} = 2$ em posições diferentes com o eixo central, mas obrigatoriamente no mesmo \bar{x} . Vamos também fazer uma troca de nomenclatura dentro da fórmula do Teorema, do \bar{x} por r , pelo fato de termos colocado nos gráficos uma circunferência como caminho do giro do centróide, e o seu raio já determina, portanto, a distância ao eixo. Trocaremos também o (L) de longitude pelo (C) de comprimento, pois ambos os termos representam o tamanho da linha ou da curva geratriz. E vamos substituir o ângulo θ por 2π , posto que os giros dos centróides serão completos. E, finalmente, a fórmula ficará com a seguinte nomenclatura: $A = \theta \bar{x} L \iff A = 2\pi r C$.

Exemplo 1 (Com o segmento sendo paralelo a um eixo). *Área da superfície gerada: modo convencional:* $A = 2\pi r h = 2\pi \times 1 \times 2 = 4\pi$. *Pelo teorema:* $A = 2\pi r C = 2\pi \times 1 \times 2 \Rightarrow A = 4\pi$

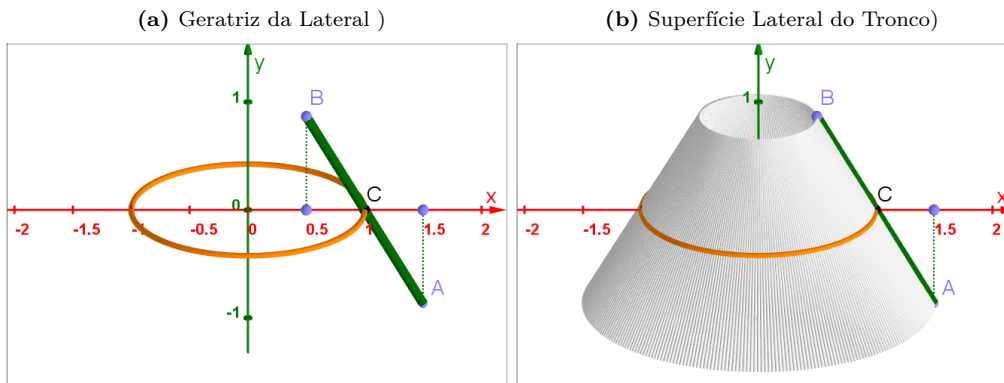
Figura 5.1: Ilustração da Construção do cilindro.



Fonte: do autor

Exemplo 2 (Com segmento inclinado em relação a um eixo). *Área da superfície gerada: modo convencional:* $A = \pi \cdot g(r + R) \Rightarrow \pi \cdot 2(0.5 + 1.5) \Rightarrow A = 4\pi$; *Pelo teorema:* $A = 2\pi r C \Rightarrow 2\pi \times 1 \times 2 \Rightarrow A = 4\pi$. *Atente-se que \overline{AB} ainda é 2!*

Figura 5.2: Ilustração de geratriz de Tronco de Cone



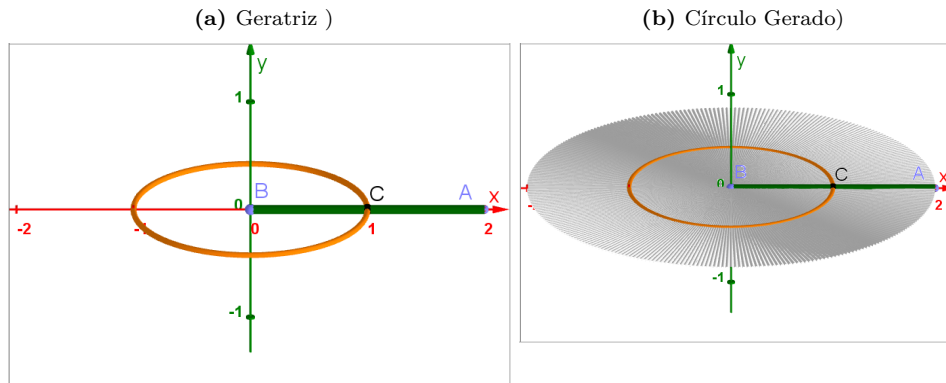
Fonte: do autor

Exemplo 3 (Com segmento ortogonal a um eixo). *Área da superfície gerada:*

modo convencional: $A = \pi \cdot r^2 \Rightarrow \pi \cdot 2^2 = \pi \cdot 4 \Rightarrow A = 4\pi$.

Pelo teorema: $A = 2\pi rC \Rightarrow 2\pi \times 1 \times 2 \Rightarrow A = 4\pi$

Figura 5.3: Ilustração da Construção do Círculo



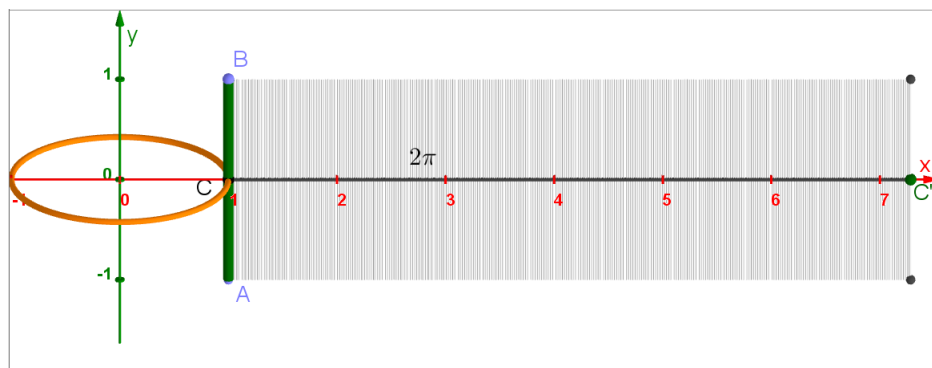
Fonte: do autor

Observando o comportamento do segmento geratriz nos três exemplos nota-se um detalhe interessante: a posição do segmento \overline{AB} mudou, o formato da figura mudou, mas, a área não mudou. As construções das próximas imagens nos mostrarão os fatores que realmente determinam e mantêm a mesma área nas superfícies.

5.2.2.1 Planificação da área

Vamos elaborar a planificação da superfície para vermos o que acontece no processo; saberemos, intuitivamente apenas, porque o comprimento da área corresponde à extensão do caminho percorrido pelo centróide; e saberemos também, porque as variáveis implicadas é que determinam o tamanho da área.

Figura 5.4: Planificação

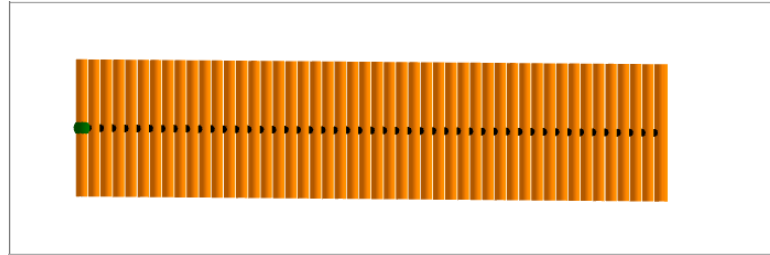


Fonte: do autor

Temos então na figura 5.4, a planificação da superfície lateral do cilindro mostrado no exemplo 1 (figura 5.1b). É um retângulo que tem a sua largura do mesmo tamanho do segmento $\overline{AB} = 2$; e tem o comprimento da circunferência de raio 1 percorrida pelo centróide, ou seja, 2π . E a área dos retângulos tem uma fórmula simples: o produto da base pela altura; e a superfície planificada mede: $A = 2\pi \cdot 2 \Rightarrow A = 4\pi$.

Nos três exemplos observamos que a posição da geratriz não alterou o tamanho da área da figura. Na construção seguinte temos a ilustração do que acontece com a superfície. A imagem da figura 5.5 é formada por pequenos retângulos unidos por uma corda preta esticada que passa pelos centroides dos segmentos, dando forma a um retângulo.

Figura 5.5: Formação retangular



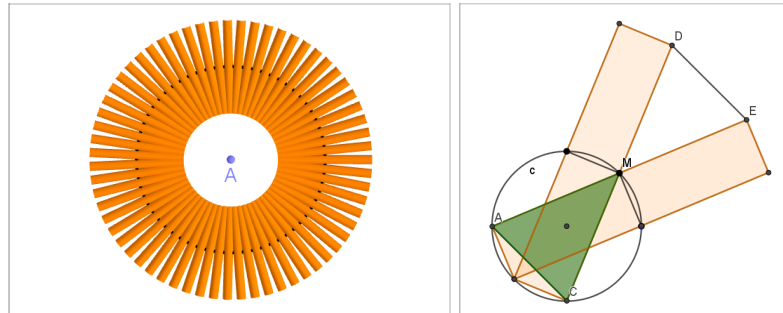
Fonte: do autor

Agora vamos unir as pontas da corda no formato circular com toda a superfície no mesmo plano. E na imagem da figura 5.6a a corda agora é uma curva fechada circunferencial que converge a superfície para uma coroa circular. Mas vemos que a superfície não é contínua, que há pequenas brechas partindo do centróide para as bordas externas. No entanto, devemos ver também que existe uma aglutinação de superfícies a partir do centróide para a borda interna da figura, o que podemos presumir, vai compensar os espaços vazios.

Figura 5.6: Demonstração da Função do Centróide

(a) Círculo Formado por Retângulos

(b) Detalhe da Área Sobreposta

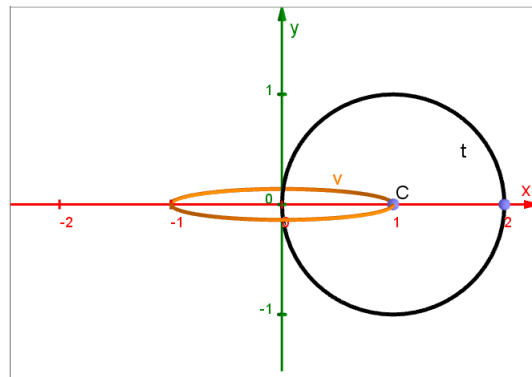


Fonte: do autor

Na figura 5.6b detalhe podemos ver que a superfície que está sobreposta pode corresponder à que falta. Posto que temos o ponto M como o centróide da superfície, então, ele também é o ponto médio dos segmentos (AE e CD) e, também ele denota dois ângulos opostos pelo vértice, o que garante que os triângulos (AMC e MDE) são congruentes e, portanto, correspondem às áreas de mesma medida. Concluimos, então, que o caminho do centróide é o ponto de equilíbrio da quantidade de massa do objeto; que independente da trajetória ser retilínea ou uma curva, haverá sempre a mesma quantidade de superfície de um lado e de outro, dela; que o centróide tem função importantíssima quando o assunto é medida de superfície.

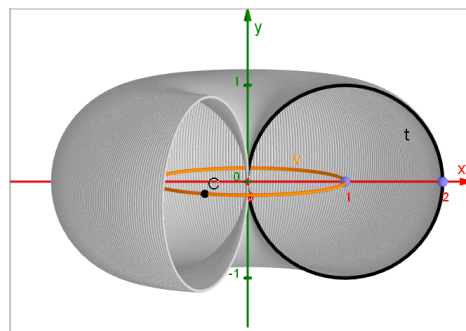
5.2.3 Geratrizes Curvilíneas

Seguindo o mesmo procedimento anterior vamos utilizar linhas curvas como geratrizes das superfícies. Vamos usar uma curva fechada como geratriz de uma superfície, a circunferência cujo centróide é facilmente encontrado que é o seu centro.

Figura 5.7: Geratriz do Touro de revolução

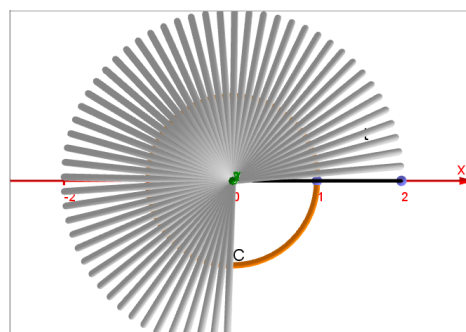
Fonte: do autor

A circunferência t de raio 1 está no plano XY e vai rotacionar em torno do eixo Y no sentido anti-horário e, o seu centróide C vai percorrer um ângulo de 250 graus pela circunferência v de centro $(0,0,0)$ e de raio 1, que está em posição transversal ao plano XY , gerando uma superfície aberta, portanto parcial, do toróide de revolução.

Figura 5.8: Seção da Superfície do toróide de revolução

Fonte: do autor

Esta imagem sanfonada da figura 5.9 é a superfície parcial do toróide de revolução vista de cima, na qual podemos ver que há uma concentração ou superposição de superfícies a partir da circunferência para o interior, o que acarreta sobras na mesma quantidade que falta da metade até à borda externa.

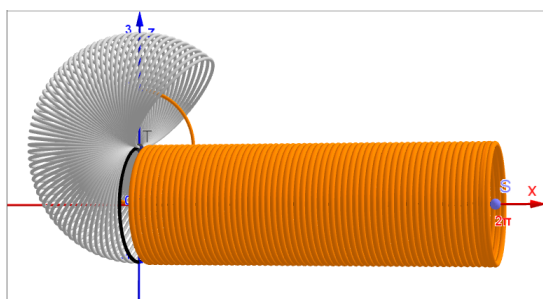
Figura 5.9: Seção do toróide de revolução – Vista de Cima

Fonte: do autor

A construção da figura 5.10 mostra dois objetos geométricos gerados por circunferências de mesmo comprimento mas, com movimentos diferentes: na parte cinza o centróide, que é o centro da circunferência geratriz, faz o movimento sobre o seu eixo de simetria - que é outra circunferência, portanto, esse movimento é circular; já na parte alaranjada a circunferência percorre um eixo retilíneo, centrado no seu interior.

Então, se a geratriz fizer um movimento com o mesmo comprimento, sobre seus eixos de simetria, não importa a direção do movimento, ela produzirá superfícies com a mesma medida em outros formatos. No gráfico desta figura estão a superfície parcial de um toro de revolução e, a da lateral de um cilindro, objetos diferentes. E o que é muito interessante, é que o cálculo da área dessas superfícies de formatos diferentes é feito por uma fórmula única - o Teorema da área.

Figura 5.10: Superfícies conjugadas



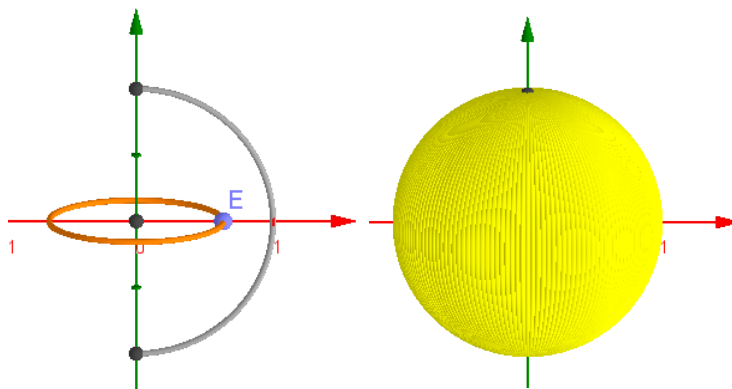
Fonte: do autor

As próximas construções mostram outros exemplos interessantes, agora, de contrastes de objetos. Uma mesma geratriz gera uma superfície insana, pelo simples fato de estar posicionada diferentemente em relação ao eixo de rotação. No gráfico da figura 5.11a temos a geratriz da superfície da esfera, que é um arco de circunferência que toca o eixo de rotação com seus dois extremos; e a circunferência centrada na origem dos eixos e passando pelo ponto E - este ponto é o centróide do arco geratriz.

Figura 5.11: Formação da Superfície da Esfera

(a) Geratriz da Superfície

(b) Superfície Normal Esfera

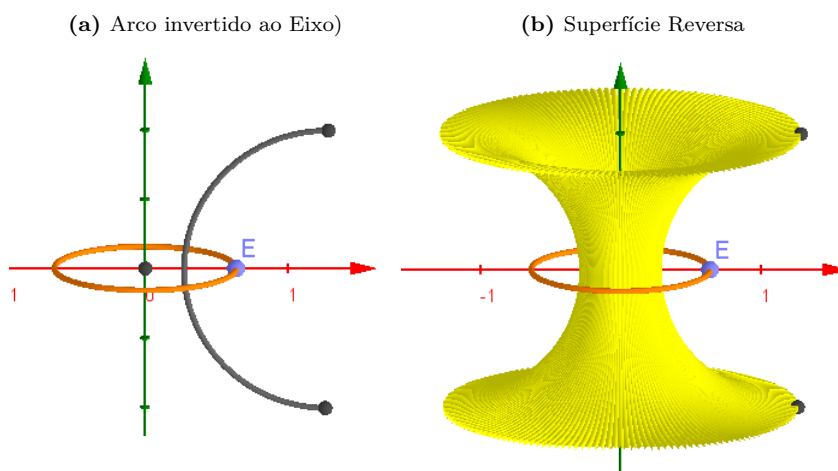


Fonte: do autor

O cálculo da área dessa figura é bem simplório, $4\pi r^2$; pelo gráfico temos que o raio é de uma unidade, então, a conta fica fácil: área = 4π . Mas, a próxima imagem tem uma superfície um pouco fora da curva, ou fora do eixo, digamos assim. Nesta imagem da figura 5.12a temos o mesmo gráfico da figura anterior, o mesmo caminho do centróide, que é a circunferência central em alaranjado e, o mesmo centróide no ponto E,

e, também, um arco de circunferência com a mesma longitude do arco da imagem anterior, contudo, ele está invertido, de costas para o eixo. Aqui o trabalho de calcular a área dessa superfície do modo convencional parece ficar mais complicada. É agora que entra em cena o Teorema da área de Pappus-Guldin (CARDOSO, 2020), que requer o conhecimento de algumas informações básicas sobre o objeto, como: o centróide da geratriz, a que distância ele está do eixo e, o comprimento da curva. No caso de uma semicircunferência (não confundir com semicírculo) o centróide é obtido por $\frac{2r}{\pi}$, sendo r o raio da semicircunferência, localizado sobre o raio ortogonal ao diâmetro, vide ponto E figura 5.11a.

Figura 5.12: Superfície Reversa da Esfera



Fonte: do autor

E, então, esta bela superfície da figura 5.12b já sabemos que tem área igual a da esfera mostrada na figura 5.11b, pelo fato de que o movimento do gráfico em torno do seu centróide não afeta o tamanho da superfície, muito embora deforme por completo o formato do objeto. Mas, vamos utilizar o Teorema da área e mostrar a precisão desse algoritmo: $A = 2\pi\bar{x}C$. Vamos usar os valores de \bar{x} e de C , que são as variáveis da equação. O \bar{x} é o raio da circunferência centrada no eixo passando no centróide - o ponto E. O seu valor numérico com quatro casas decimais é $\frac{2r}{\pi} = 0,6366$, e o valor de C é π , que é o comprimento do arco de circunferência de raio 1; e, colocados na fórmula $A = 2\pi(0,6366)(\pi)$ temos a medida da superfície reversa da esfera com área de 4π u. a.

Mas podemos melhorar a organização dos valores na fórmula para termos um resultado bem compacto; retirando o valor numérico e colocando o valor simbólico correspondente ($\bar{x} = \frac{2r}{\pi} = 0,6366\dots$), teremos: $A = \frac{2\pi \cdot 2r \cdot \pi}{\pi}$, e colocando o valor 1 para o raio, fica: $A = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 1 \cdot \pi}{\pi} \Rightarrow A = 4\pi$

5.3 Teorema do Volume

O segundo teorema define que o volume de um sólido de revolução é igual ao produto da área da superfície geratriz pelo comprimento do caminho percorrido pelo centróide dessa mesma superfície ao longo do ângulo que gera o volume (CARDOSO, 2020).

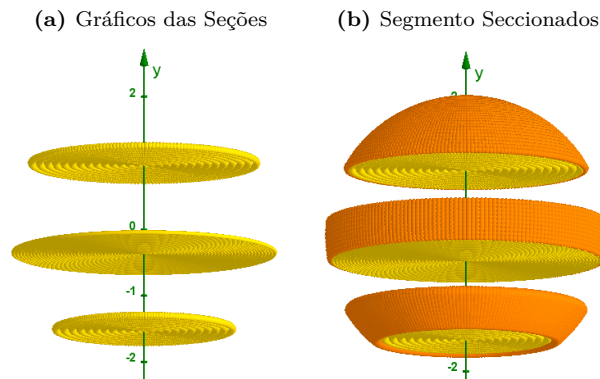
Sendo (θ) o ângulo de revolução, (\bar{x}) a distância do centróide ao eixo de simetria e (A) a área da superfície geratriz, temos a seguinte nomenclatura para a fórmula do volume:

$$V = \theta\bar{x}A$$

5.3.1 Volume do Segmento Esférico

O segmento esférico é uma parte intermediária da esfera em que foram cortadas as duas calotas polares transversais ao diâmetro considerado, ficando uma parte do corpo da esfera limitada por duas seções planas e paralelas entre si; isto porque, no caso de um segmento esférico gerado em processo de revolução, a lateral sempre será uma zona esférica de mesma largura em torno do diâmetro, acarretando a formação de seções sempre paralelas e jamais, inclinadas. A próxima construção mostrará uma ilustração desses detalhes.

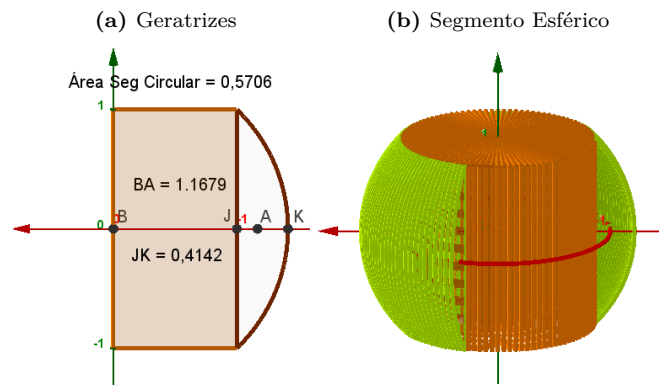
Figura 5.13: Gráficos Demonstrativos Segmentos Esféricos



Fonte: do autor

Vamos apresentar a construção por revolução de um segmento esférico, e o cálculo do seu volume por dois métodos diferentes.

Figura 5.14: Construção de Segmento Esférico



Fonte: do autor

Figura 5.15: Comandos geradores dos Gráficos

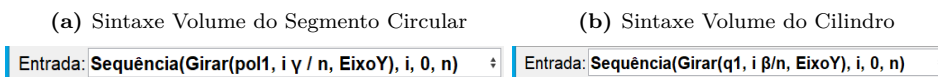
(a) Sintaxe sequência do Arco

(b) Sintaxe do Setor Circular

Entrada: Sequência(Girar((-1, 1), i α / n, (0, 0)), i, 0, n) ↕

Entrada: Polígono(L_1) ↕

Consideremos o sólido da figura 5.14b cuja camada externa em verde tem sua sintaxe na figura 5.16a. Internamente temos o cilindro cuja fórmula do volume é $V_c = \pi r^2 \cdot h$, ou seja, o produto da área da base pela altura do cilindro; lançando as medidas que estão no gráfico, temos: $V_c = \pi 1^2 \cdot 2 \implies V_c = 2\pi$.

Figura 5.16: Comandos geradores dos Volumes

Agora vamos calcular o volume da camada verde gerada pelo segmento circular, que tem a mesma altura do cilindro mas, desta vez, vamos utilizar a fórmula de Pappus Guldin para volume ($V_{seg} = \theta \bar{x}A$) (CARDOSO, 2020); onde θ é o ângulo do movimento, (\bar{x}) é a distância do centróide da geratriz ao eixo de rotação, e (A) é a área da geratriz, que é o segmento circular. Os valores para \bar{x} e A estão expostos no gráfico da geratriz na figura 5.14a e são: ($\bar{x} = BA = 1,1679$) e a área do segmento circular é ($A = 0,5706^1$). Fazendo o lançamento dos valores na fórmula, temos: $V_{seg} = 2\pi\bar{x}A \iff V_{seg} = 2\pi(1,1679)(0,5706) \implies V_s = 1,333\pi$; e o volume total do segmento esférico será a soma dos dois volumes: $2\pi + 1,333\pi = 3,333\pi$. Vamos calcular o volume total da esfera para uma tira-teima: baseado no quadrado de lado um (1) da metade do retângulo do cilindro, a diagonal mede $\sqrt{2}$ e corresponde ao raio da esfera, e colocando na fórmula $V_e = \frac{4}{3}\pi r^3$, temos: $V_e = \frac{4}{3}\pi\sqrt{2}^3 \implies V_e = 3,77\pi$. Subtraindo da esfera o volume do segmento ($V = 3,77\pi - 3,333\pi$) vai restar ($V = 0,43\pi$) que corresponde às duas calotas polares. Agora vamos calcular o valor das calotas usando a fórmula do volume de calotas: $V_{cal} = \frac{\pi h(3a^2 + h^2)}{6} \iff V_{cal} = \frac{\pi 0,4142[3 \cdot 1 + (0,4142)^2]}{6} \iff V_{cal} = \frac{\pi 0,4142(3 + 0,1715)}{6} \implies V_{cal} = \frac{1,31\pi}{6}$. Não esquecendo que esse valor é de uma calota apenas, devemos multiplicar por dois, ainda: $V_{cal} = \frac{2(1,31)\pi}{6} \implies V = 0,43\pi$. Portanto, teima tirada.

5.3.1.1 Ponderações

Diante da exibição desses exemplos de construção de figuras de várias formas já podemos compreender o mecanismo que encadeia as estruturas dos corpos geométricos; podemos ver, também, um importante conceito da Física aplicado na ideia do equilíbrio do movimento dos corpos, ou seja, todo o peso do objeto converge para um único ponto - o centróide. E essa constatação explica o raciocínio dos autores dos teoremas na composição da fórmula, pois, adotaram o centróide da figura como uma variável “coringa” que dispensa informações complicadas, como: direção de movimento, inclinação da curva em relação ao eixo de rotação - e dependendo tipo de curva, aplicar parametrização, e etc. Portanto, temos comprovado a praticidade deste importante algoritmo no tratamento sobre sólidos e superfícies de revolução em variados formatos e, de forma mais fácil, a obtenção das suas medidas, através do bem elaborado Teorema de Pappus-Guldin.

¹Valor retornado pelo próprio Geogebra.

6

Considerações Finais

Vamos fazer, neste tópico, uma abordagem sintética dos conteúdos tratados, que parte de uma perspectiva que procura indicar uma didática mais efetiva na aplicação do ensino, através de ferramentas tecnológicas que são de fácil acesso e, até mesmo, sem custos econômicos. Toda essa abordagem teve o seu direcionamento para uma área da matemática que fascinou, e ainda o faz, a muitos estudiosos, incluídos aqui, leigos e acadêmicos em todos os tempos - estamos falando da Geometria, que em tempos primordiais o seu campo de atuação era, literalmente, o campo, as medidas da terra - como a etimologia do seu nome expressa ([significados \(2023\)](#)). A utilização dos conceitos da geometria e a sua aplicabilidade tem destaque nos trabalhos de profissionais de varias áreas de atividades, que vai da construção civil até a produção artística. Portanto, eis porque a grande importância de se proporcionar um aprendizado muito bem elaborado destes conteúdos que têm um campo muito vasto de aplicação.

Inicialmente, as construções começaram com a produção de imagens das telas da área de trabalho do Geogebra, com figuras contidas nelas, para fazer - como abertura dos trabalhos - a apresentação do software que iria protagonizar nas criações geométricas. Em seguida, entra a primeira seção da geração, propriamente dita, dos objetos geométricos com enfoque no desenvolvimento dos conteúdos; figuras que são os objetos da aplicação dos conceitos da matéria em estudo; as estruturas de formação das bases necessárias para a geração dos diferentes formatos dos corpos geométricos, bem como, os recortes da caixa de entrada de comandos do aplicativo contendo as respectivas sintaxes de seus protocolos de construção. O seguinte tópico apresenta o desenvolvimento de um processo de quadratura dos polígonos regulares, trazendo à baila um dos dilemas gregos: a quadratura do círculo. Por fim, a demonstração geométrica do Teorema de Pappus-Guldin ilustra os princípios da dinâmica de movimentos aplicados na formulação dos algoritmos.

E são apresentados nos tópicos os processos de formação de vários objetos geométricos que são gerados por revolução, suas estruturas e parâmetros de dimensão; isto, por certo, empolgará a qualquer leitor a reproduzir as criações geométricas apresentadas aqui, e a aproveitar este trabalho como ponto de partida para ir bem mais fundo no aprendizado. Posto, que as construções geométricas tem cada passo do Geogebra sendo descrito, e a matemática envolvida nelas também é discutida. Isso fornece um ferramental ao leitor não só na reprodução com também no aprendizado de desenvolvimento de códigos para temas semelhantes. Também se destaca o apoio visual das imagens multicores das figuras geométricas produzidas pelo aplicativo, de forma a proporcionar uma leitura mais lúdica para a jornada do leitor, do início até ao último tópico.

Referências

- ANDRADE, M. A. R. *Conceito de linha curva*. 2017. <<https://conceitos.com/linha-curva/>>. Acessado em 18/08/2023. 17
- ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo – Volume 2*. Porto Alegre, RS: Bookman Editora, 2014. 53
- ASSIS c C. P. Magnaghi e A. K. T. O método de Arquimedes. 2019. 50
- BRASILESCOLA. *Sólidos Geométricos*. 2008. <<https://brasilescola.uol.com.br/matematica/solidos-geometricos.htm#Outros>>. Acessado em 15/09/2023. 18, 37
- CARDOSO, I. C. da S. *Centróides, Teorema de Pappus–Guldin e o cálculo de volume de sólidos de revolução: uma proposta para futuros professores do Ensino Mé'dio*. Ouro Preto, MG: [s.n.], 2020. 59, 61
- COSTA, C. *Geometria Espacial*. 2020. <https://www.youtube.com/watch?v=JHmbt5_tPtU>. Acessado em 21/11/2023. 29
- COUTO, R. F. de A. *Desigualdades das médias: uma ferramenta para resolução de problemas de otimização*. Petrolina, PE: [s.n.], 2017. 43
- CRIPPA, D. *A solução cartesiana da quadratura do círculo*. 2010. <<https://doi.org/10.1590/S1678-31662010000400005>>. Acessado em 12/10/2023. 42
- DIAS, V. G. *Quadratura: da antiguidade à atualidade*. Campina Grande, PB: [s.n.], 2014. 42
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos da Matemática Elementar. Geometria Espacial: posição e métrica*. São Paulo, SP: Atual Editora, 2013. v. 10. 34, 35
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar: geometria plana*. São Paulo, SP: Atual Editora, 2013. v. 9. 48
- FERRETTO, P. *Ângulo Central e Ângulo Inscrito na Circunferência*. 2019. <<https://blog.professorferretto.com.br/angulo-central-e-angulo-inscrito/>>. Acessado em 15/12/2023. 43
- ÍTALLO professor P. *Mundo Educação*. 2018. <<https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/area-do-cone.htm>>. Acessado em 05/08/2023. 33
- JUNIOR, A. bento. *(Demonstração) da Área da Calota esférica*. 2013. <<http://www.youtube.com/watch?v=JU3LXj1UBbk>>. Acessado em 13/09/2023. 24
- KILHIAN, K. *Volume de uma calota Esférica*. 2010. <<https://www.obaricentrodamente.com/2010/09/volume-de-uma-calota-esferica.html>>. Acessado em 22/12/2023. 39
- KUMAYAMA, H. Retificação de uma circunferência e a determinação geométrica de π . *Revista do Professor de Matemática*, v. 20, n. 20, p. 39–41, 1992. 52
- LINO professor P. S. *Segmento Esférico*. 2021. <<https://www.youtube.com/watch?v=H1eFD6fo8cI>>. Acessado em 22/09/2023. 34, 36
- MELO, K. *Área da superfície esférica (Demonstração)*. 2021. <<https://www.youtube.com/watch?v=hxxgdM6PwQk>>. Acessado em 17/10/2023. 26

- NUNES, V. F. R. *O que é um polígono Regular?* 2023. <<https://www.matematica.pt/faq/poligono-regular.php>>. Acessado em 29/11/2023. 43
- ONODY, P. R. N. *O número Pi com 62,8 trilhões de casas decimais*. 2021. <<https://www2.ifsc.usp.br/portal-ifsc/o-numero-pi-com-628-trilhoes-de-casas-decimais/>>. Acessado em 25/10/2023. 42
- PERPÉTUA, H. *Os três Célebres Problemas da Antiguidade*. 2011. <<https://www.passeiospelamatematica.net/descobrimdo-geometria/os-tr%C3%aas-celebre-problemas-da-antiguidade/>>. Acessado em 05/12/2023. 42
- PORTO, E. *Quadratura no Dicionário infopédia da Língua Portuguesa*. 2023. <<https://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa/quadratura>>. 42
- SARAIVA, K. de Souza Oliveira Filho e Maria de F. O. *Trigonometria da Esfera*. 2012. <<http://astro.if.ufrgs.br/trigesf/trigesf.htm>>. Acessado em 13/09/2023. 18
- SIGNIFICADOS, E. *O que é Geometria*. 2023. <<http://www.significados.com.br/geometria/>>. Acessado em 13/10/2023. 62
- SILVA, D. D. da. *Área de Polígonos Irregulares*. 2015. <<https://www.infoescola.com/matematica/area-de-poligonos-irregulares/#poligonos-irregulares>>. Acessado em 15/12/2023. 43
- TREVISAN, E. P. A formação de professores no ensino de ciências e matemática: perspectivas e desafios – uma entrevista com Irene Cristina de Mello. *Eventos Pedagógicos*, v. 8, n. 1, p. 574–581, 2017. 53
- WIKIPÉDIA. *Retificação da Circunferência*. 2017. <https://pt.wikipedia.org/wiki/Retifica%C3%A7%C3%A3o_da_circunfer%C3%Aancia>. Acessado em 05/11/2023. 42