



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

PEDRO PAULO SANTOS DE SOUZA

COMPORTAMENTO ARITMÉTICO DE FUNÇÕES
TRANSCENDENTES

Belém

2022

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

PEDRO PAULO SANTOS DE SOUZA

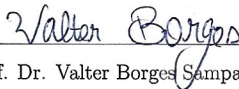
COMPORTAMENTO ARITMÉTICO DE FUNÇÕES TRANSCENDENTES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
para a obtenção do grau de Licenciado em
Matemática da Faculdade de Matemática da
Universidade Federal do Pará e avaliado pela
seguinte banca examinadora:



Prof. Dr. Jean Carlos de Aguiar Lelis (Orientador)

Faculdade de Matemática, UFPA



Prof. Dr. Valter Borges Sampaio Junior (Membro)

Faculdade de Matemática, UFPA



Prof. Dr. Marcel Vinhas Bertolini (Membro)

Faculdade de Matemática, UFPA

DATA DA DEFESA: 15/12/22

Conceito: Excelente

DEDICATÓRIA

Ao Criador de todas as coisas, o único Deus, Meu Senhor e meu Pai. À minha amada família. À minha futura esposa. E minha amada igreja.

AGRADECIMENTOS

A meu único Deus, em três pessoas, Pai, Filho e Espírito Santo. Ao Pai por me salvar dos meus pecados, por fazer em minha vida sua maravilhosa vontade, ser cada vez mais parecido com seu Filho Jesus. Ao Filho por sofrer o castigo por todos os meus pecados contra Deus, por interceder por mim diante do Pai e por estar comigo todos os dias. Ao Espírito Santo por me capacitar a viver uma vida que agrada ao meu único Deus, por ser meu auxiliador nos momentos de bonanza e nos momentos de dificuldades e por me ensinar tudo à respeito de Cristo Jesus. Sem meu Senhor minha vida, meu trabalho, meus prazeres e minhas realizações são insignificantes e impuros. Sem o grandioso perdão de pecados que recebi de Deus em Cristo meu destino seria justo castigo eterno por minhas ofensas contra o Criador. Sem meu Deus todo esse trabalho não passaria de vaidade sem sentido! À Ele seja a glória eternamente, amém.

A UFPA pela oportunidade de formação e estrutura oferecida.

Ao meu orientador doutor Jean Lelis pela oportunidade de aprender com ele, por sua gentileza, mansidão e paciência comigo e pela valiosa e imprescindível ajuda para que esse trabalho fosse possível.

A todos os mestres com carinho.

A minha querida família. Minha mãe Ana Claudia. Meu Pai Jorge Luiz. E minha irmã Rebeca. Por serem me suporte, por meu sustentarem, por serem meu porto-seguro, por sempre estarem comigo em todos os momentos, pelas orações e súplicas ao Senhor por mim e pelo apoio na minha caminhada. Sem eles esse trabalho não seria possível.

À minha futura esposa Ana Beatriz Manito por todo apoio, exortações, carinho, suporte, orações, momentos maravilhosos juntos, companhia, parceria, companheirismo, devocionais juntos, etc. Sem ela esse trabalho não seria possível.

À minha amada igreja (Primeira Igreja Batista do Pará) por me ensinar à respeito do Senhor

meu Deus e por me aceitar como membro dessa congregação de fieis ao nosso Senhor Jesus Cristo.

Aos meus amigos de classe em especial Rafael Barbosa e Marjenny Amélia por toda ajuda, paciência, carinho e respeito. Eles foram essenciais para minha formação.

Ó profundidade da riqueza da sabedoria e do conhecimento de Deus! Quão insondáveis são os seus juízos, e inescrutáveis os seus caminhos! [...] Pois dele, por ele e para ele são todas as coisas. A ele seja a glória para sempre! Amém.

Romanos 11 : 33, 36.

RESUMO

A pesquisa introdutória do comportamento aritmético de funções transcendentess leva ao estudo de funções inteiras, pois, funções inteiras só são algébricas se forem polinômios, fazendo com que o conjunto de funções inteiras transcendentess seja uma família relevante para o estudo de funções transcendentess no geral. Inicialmente serão definidos e estudados resultados, conceitos e definições preliminares como as definições de números transcendentess, números de Liouville, funções transcendentess, funções inteiras e seus conjuntos excepcionais e resultados associados essenciais para o estudo dessas funções. A ênfase será nos problemas e questões de Mahler sobre o comportamento aritmético de funções inteiras e transcendentess, mais especificamente o problema B, C e a questão de Mahler para números de Liouville. E seguida será visto com mais detalhes resultados sobre funções inteiras e transcendentess que levam racionais em racionais.

PALAVRAS-CHAVE: Números de Liouville, Funções transcendentess, Conjunto excepcional.

Sumário

1	NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES	13
1.1	Números Algébricos e Transcendentes	13
1.2	O Teorema de Liouville	16
1.3	Os Números de Liouville	18
2	ALGUNS RESULTADOS SOBRE NÚMEROS TRANSCENDENTES	24
2.1	O Teorema de Hermite-Lindemann	24
2.2	O Teorema de Gelfond-Schneider	25
2.3	O Teorema de Baker	27
2.4	Classificação de Mahler	28
3	COMPORTAMENTO ARITMÉTICO DE FUNÇÕES TRANSCENDENTES	33
3.1	Preliminares	33
3.2	Problema B de Mahler	35
3.3	Problema C de Mahler	36
3.4	Questão de Mahler para Números de Liouville	38
3.5	Comportamento Aritmético de funções transcendentessobre \mathbb{Q}	41
	Referências Bibliográficas.	52

INTRODUÇÃO

Os números transcendentos são aqueles que não são raízes de nenhum polinômio com coeficientes inteiros. Para Euler, a grosso modo, eles merecem esse nome, pois, “transcendem o poder das operações algébricas”. Esses números foram definidos no século XVIII, porém, a existência deles só foi provada e, conseqüentemente, sua teoria inaugurada oficialmente cem anos depois por Liouville [7] em 1844.

Esses primeiros exemplos, dados por ele, foram os chamados números de Liouville que não satisfazem o teorema de Liouville. Esse teorema diz que se α é um número real algébrico, então existe uma constante A positiva, tal que $|\alpha - p/q| > A/q^n$, para todo número racional p/q , com n o grau do polinômio mônico $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de menor grau que tem α como raiz. Desse modo, como não satisfazem uma propriedade que todos os algébricos devem satisfazer, são automaticamente transcendentos e ele provou que $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ é um número de Liouville, mais geralmente, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^{-n!}$ é número de Liouville para todo a_n no conjunto $\{1, \dots, b-1\}$ e $b \geq 2$. Contudo, não é muito eficiente, para provar a transcendência de um número, buscar provar que ele é de Liouville, pois, é possível provar que “quase nenhum” número transcendente é de Liouville, isto é, eles tem medida nula em \mathbb{R} .

Cantor conseguiu mostrar que $\overline{\mathbb{Q}}$ (sendo $\overline{\mathbb{Q}}$ o conjunto dos números complexos algébricos) é enumerável. Pelo fato de $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{T}$, e $\overline{\mathbb{Q}}$ e \mathbb{T} serem disjuntos (com \mathbb{T} o conjunto dos números transcendentos) e de \mathbb{C} ser não-enumerável, ele concluiu que \mathbb{T} é não-enumerável, ou seja, quase todo número complexo é transcendente. Porém, é muito difícil decidir se um número é transcendente, pois, eles são definidos pelo que não são e não pelo que são, por isso, é proveitoso classificá-los da melhor forma possível de acordo com propriedades mais específicas.

A transcendência de e foi provada por Hermite [5] e, ao generalizar os métodos de

Hermite, Lindemann provou que $e^\alpha \in \mathbb{T}$ quando $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ é não nulo e, como consequência, a transcendência de vários outros números, incluindo a do π . Gelfond [4] e Schneider [15] provaram, em 1934, que $\alpha^\beta \in \mathbb{T}$ se $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$ e $\beta \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$. Como generalização do teorema anterior, Baker [1] provou em 1966 que $\sum_{j=1}^n \beta_j \log \alpha_j \neq 0$ quando $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ são algébricos não nulos e $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n$ são linearmente independentes, $n \in \mathbb{N}$ arbitrário. Isso implica que qualquer combinação, finita e não-nula, de logaritmos de números algébricos com coeficientes algébricos é um número transcendente.

A definição de número transcendente nos leva a seguinte generalização: uma função $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, é chamada algébrica se existe um polinômio não-nulo com coeficientes complexos $P(x, y)$ tal que

$$P(z, f(z)) = 0, \quad \forall z \in D.$$

Caso contrário, dizemos que f é transcendente. O teorema de Hermite-Lindemann implica que a função, conhecida, inteira ¹ transcendente e^x leva algébricos não nulos em transcendentos. Isso nos leva a questionar se funções inteiras transcendentos levam, em geral, à menos de um conjunto finito, algébricos em transcendentos.

Strauss, em 1886, tentou provar que uma função analítica, em uma vizinhança da origem, e transcendente não podia levar racionais em racionais, porém, Weierstrass construiu uma função analítica e transcendente que o fazia e questionou a existência funções inteiras e transcendentos que levam o conjunto dos números algébricos nele mesmo.

Weierstrass definiu o conjunto excepcional de uma função f , que denotaremos por S_f , inteira transcendente como o conjunto dos algébricos α tais que $f(\alpha)$ é algébrico. Inspirado pelo teorema de Hermite-Lindemann e por contribuições, de sua autoria, como um exemplo de uma função analítica e transcendente que leva racionais em racionais, Weierstrass elaborou os seguintes questionamentos: existe uma função f inteira e transcendente tal que $S_f = \overline{\mathbb{Q}}$? E outro: Para quais conjuntos $A \subseteq \mathbb{C}$, existe uma função f inteira e transcendente tal que $S_f = A$?

Motivado por esses questionamentos, Stäckel [17] respondeu a primeira questão de Weierstrass utilizando o seguinte teorema, mais geral, provado por ele,

Teorema [Stäckel, 1895]. *Sejam Σ um conjunto enumerável e T um conjunto denso*

¹Uma função é inteira se é analítica em todo plano complexo.

no plano complexo. Então, existe uma função inteira e transcendente f tal que $f(\Sigma) \subseteq T$.

A afirmação de Weierstrass decorre, imediatamente, do teorema de Stäckel fazendo $\Sigma = T = \overline{\mathbb{Q}}$. Em seguida, Stäckel [18] conseguiu construir uma função inteira transcendente tal que $f^{(s)}(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \overline{\mathbb{Q}}$ para todo $s \geq 0$.

Em 2010, J. Huang, D. Marques e M. Mereb [19] generalizaram o teorema de Stäckel e mostraram que qualquer subconjunto de números algébricos é o conjunto excepcional de uma quantidade não enumerável de funções inteiras transcendentais. Ou seja, provaram o seguinte teorema.

Teorema. *Se $A \subset \overline{\mathbb{Q}}$, então, existe uma função inteira e transcendente f tal que $S_{f^{(t)}} = A$ para todo $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

O foco deste trabalho são os avanços na direção dos problemas de Mahler [8] sobre o comportamento aritmético de funções inteiras transcendentais. Esses problemas, denotados por problemas A, B e C de Mahler, foram propostos por ele em [8]. O problema A ainda está em aberto e os problemas B e C foram totalmente resolvidos por Marques e Moreira em [13] e [14]. Veremos com mais detalhes os problemas B e C e suas soluções no capítulo 3. Os enunciados deles são os seguintes.

Problema A. *Existe uma função transcendente analítica na bola $B(0, 1)$ com coeficientes limitados e tal que $f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, 1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$?*

Problema B. *Existe função inteira e transcendente f com coeficientes racionais tal que $f(\overline{\mathbb{Q}}) \cup f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$?*

Problema C. *Seja $\rho \in (0, \infty]$ um número real. Existe, para cada escolha de $S \subseteq B(0, \rho) \cap \overline{\mathbb{Q}}$ (fechado para conjugação complexa e tal que $0 \in S$) uma função analítica transcendente f com coeficientes racionais e raio de convergência ρ , para o qual $S_f = S$?*

Além desses problemas, Mahler também estudou o comportamento aritmético de funções transcendentais no conjunto dos números de Liouville. Maillet [9] provou que uma função racional com coeficientes racionais leva números de Liouville em números de Liouville. Funções racionais são, claramente, algébricas, levando, naturalmente, a seguinte questão, feita por Mahler: existe uma função inteira e transcendente que leva números de Liouville em números de Liouville?

Inspirados no resultado de Maillet, Marques e Moreira mostraram que se existir uma

função f inteira transcendente de modo que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $den(f(p/q))^2 = O(q^v)$ para todo $p/q \in \mathbb{Q}$, $v > 0$ e $q > 1$ suficientemente grande, então $f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$ [12].

Silva mostrou que não existe uma função f inteira transcendente $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]^3$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e

$$den(f(p/q)) = O(q^v)$$

para todo $p/q \in \mathbb{Q}$, com q suficientemente grande e $0 < v < 1$ [16]. Lelis [6] provou que não existe função inteira transcendente $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e

$$den(f(p/q)) = O(q)$$

$\forall p/q \in \mathbb{Q}$, com q suficientemente grande. Permanecendo em aberto o problema para o caso $v > 1$. Esses resultados sobre o comportamento aritmético de funções inteiras transcendentess serão vistos com mais detalhes na última seção do capítulo 3 e também daremos a prova do teorema de Lelis na íntegra.

²onde $den(p/q) = q$ para todo racional não nulo p/q .

³onde $\mathbb{K}[[z]]$ é o conjunto de todas as séries formais com coeficientes em \mathbb{K} .

Capítulo 1

NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

O objetivo principal deste capítulo é apresentar os primeiros números transcendentos, isto é os números de Liouville que não se encaixam nas condições do teorema de Liouville que veremos mais adiante. Iniciaremos definindo, formalmente, números algébricos e transcendentos. Exporemos algumas características do conjunto dos números algébricos e extrairemos deles uma propriedade que será essencial para a verificação da transcendência dos números de Liouville.

1.1 Números Algébricos e Transcendentos

Dados dois corpos L e K , dizemos L é uma *extensão de corpos* de K , denotaremos por $L|K$, quando K for um subcorpo de L . Nesse caso, consideramos L como um K -espaço vetorial.

Definição 1.1.1. *Seja $L|K$ uma extensão de corpos e α um elemento em L . Se existir $P \in K[x]$ não nulo, tal que $P(\alpha) = 0$ dizemos que α é algébrico sobre K . Se $P(\alpha) \neq 0$ para todo P , não nulo, em $K[x]$ dizemos que α é transcendente sobre K .*

Seja $\alpha \in L$ algébrico sobre K . Considere o homomorfismo:

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha : K[x] &\rightarrow L \\ P(x) &\mapsto P(\alpha)\end{aligned}$$

Olhemos para o núcleo de φ_α , denotado por $\ker(\varphi_\alpha)$. Como $K[x] \supset \ker(\varphi_\alpha)$ é um anel de polinômios, então ele é um *domínio principal* o que implica que, sendo $\ker(\varphi_\alpha)$ um ideal de $K[x]$, $\ker(\varphi_\alpha)$ é gerado por um único elemento. Como α é algébrico sobre K temos que $\ker(\varphi_\alpha) \neq \{0\}$, Em vista disso, definimos o *polinômio minimal*, denotado por $P_{\alpha,K}$, de α sobre K como o único polinômio mônico (i.e. com coeficiente líder igual a 1), tal que

$$\ker(\varphi_\alpha) = (P_{\alpha,K}).$$

Para simplificar a linguagem, se um número complexo é algébrico sobre \mathbb{Q} diremos, simplesmente, que ele é *algébrico*, nomearemos de maneira análoga se ele for transcendente sobre \mathbb{Q} . Denotaremos esse conjunto dos números algébricos por $\overline{\mathbb{Q}}$. Se $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, então seu polinômio minimal é o polinômio mônico de menor grau que tem α como raiz. O grau de α é definido como o grau do seu polinômio minimal.

Exemplo 1. *Todo número racional $\frac{p}{q}$ é algébrico. De fato, todo número racional $\frac{p}{q}$ é raiz do polinômio $P(x) = x - \frac{p}{q}$ com coeficientes racionais.*

Exemplo 2. *Os racionais não são os únicos números algébricos, pois, $\sqrt{2}$ é um irracional algébrico. De fato, $\sqrt{2}$ é raiz do polinômio $P(x) = x^2 - 2$ com coeficientes racionais.*

Exemplo 3. *O polinômio $P(z) = z^2 + 1$ não possui nenhuma raiz real, contudo, possui raízes complexas, e uma delas é o número i . Isso implica que $\overline{\mathbb{Q}}$ não está inteiramente contido em \mathbb{R} . Porém, $\overline{\mathbb{Q}}$ deve estar inteiramente contido em \mathbb{C} , pois, o mesmo é algebricamente fechado.*

Teorema 1.1.1. $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável.

Demonstração. Dado $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, o conjunto das raízes de P é denotado por \mathcal{R}_P . Note que \mathcal{R}_P tem no máximo n elementos. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe apenas uma quantidade enumerável de polinômios, em $\mathbb{Q}[x]$, com grau n . De fato, considere $\mathbb{X}_n = \{Q \in \mathbb{Q}[x] : \partial Q = n\}$. Tome $\psi : \underbrace{\mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}^*}_{n+1 \text{ cópias}} \rightarrow \mathbb{X}_n$ dada por

$$\psi(a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

Note que ψ é uma bijeção. Como $\mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}^*$ é enumerável, pois, produto cartesiano finito de enumeráveis é enumerável, então \mathbb{X}_n também é. Definimos $\mathcal{A}_n = \bigcup_{\partial P=n} \mathcal{R}_P$. Pelos comentários feitos anteriormente e pelo fato de que a união enumerável de conjuntos finitos é enumerável, segue-se que \mathcal{A}_n é enumerável. Agora é só observar que

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$$

Daí $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável. □

Desse teorema podemos concluir que existem reais transcendentos, pois, \mathbb{R} é não-enumerável. Pelo fato de $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{T}$, de $\overline{\mathbb{Q}}$ e \mathbb{T} serem disjuntos (com \mathbb{T} o conjunto dos números transcendentos) e de \mathbb{C} , isomorfo a \mathbb{R}^2 , ser não-enumerável (sendo \mathbb{R} não-enumerável), Cantor concluiu que \mathbb{T} é não-enumerável, visto que a união finita de enumeráveis é enumerável. Também, é possível provar que $\overline{\mathbb{Q}}$ tem medida (de Lebesgue) nula em \mathbb{C} , e escrevemos $m(\overline{\mathbb{Q}}) = 0$, isto é:

Teorema 1.1.2. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma quantidade enumerável de bolas abertas $(B(a_n; r_n))_n$ tais que*

- $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(a_n; r_n)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \pi r_n^2 < \varepsilon$.

Demonstração. De fato, dado $\varepsilon > 0$, como $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável, então podemos considerar $\overline{\mathbb{Q}} = \{a_1, a_2, \dots\}$. Defina então as bolas abertas

$$B_n = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_n| < r_n\}, \text{ onde } r_n = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{3\varepsilon}{\pi^2}}$$

Claramente, $\overline{\mathbb{Q}} \subset \cup B_n$, além disso,

$$\begin{aligned} \text{Área} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Área}(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi r_n^2 = \frac{3\varepsilon}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{3\varepsilon}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Segue-se então o resultado onde usamos que $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ □

O teorema anterior nos diz, intuitivamente, que quase todo número complexo é transcendente. Isso é uma importante motivação para o estudo desses números, porém, é muito difícil decidir se um número é transcendente, pois, eles são definidos pelo que não são e não pelo que são, por isso, é proveitoso classificá-los da melhor forma possível de acordo com propriedades mais específicas.

A proposição a seguir nos diz que $\overline{\mathbb{Q}}$ é um corpo.

Proposição 1.1.1. *Dados a e b números algébricos, então:*

$$1) a \pm b \in \overline{\mathbb{Q}};$$

$$2) a \cdot b \in \overline{\mathbb{Q}};$$

$$3) a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

Demonstração. Ver [3] □

1.2 O Teorema de Liouville

Os primeiros exemplos de números transcendentos, dados por Liouville, foram os chamados *números de Liouville*. A transcendência deles pôde ser verificada a partir de uma ideia simples, porém elegante de Liouville que consistia em provar que eles não satisfazem a seguinte propriedade encontrada por ele que é satisfeita por todos os números algébricos:

Teorema 1.2.1 (Liouville). *Seja α é um número real algébrico de grau $n > 1$. Então existe uma constante positiva $c = c(\alpha)$ tal que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^n},$$

para todo racional $\frac{p}{q}$.

Demonstração. Seja $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ o polinômio minimal de α . Como P tem uma quantidade finita de raízes, então existe $\delta > 0$, tal que o conjunto $[\alpha - \delta, \alpha + \delta] \setminus \{\alpha\}$ não possui nenhuma raiz de P .

Dado um $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, temos duas possibilidades: ou $\frac{p}{q} \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ ou $\frac{p}{q} \notin [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$.

Se $\frac{p}{q} \notin [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, então

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \delta > \frac{\delta}{q^n}$$

com δ constante como queremos.

Se $\frac{p}{q} \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, como a função P é contínua e derivável no intervalo com extremos α e $\frac{p}{q}$, pelo teorema do valor médio, existe ξ no intervalo com extremos α e $\frac{p}{q}$ tal que

$$P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right) = P'(\xi) \left(\alpha - \frac{p}{q}\right)$$

Sendo α raiz de P , obtemos

$$\left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| = |P'(\xi)| \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$$

Como P' é contínua em um intervalo fechado com extremos α e $\frac{p}{q}$, então $|P'(x)| \leq M$, para todo $x \in \left[\alpha, \frac{p}{q}\right]$.

Ao mesmo tempo, como $\frac{p}{q}$ não é raiz de P , temos que

$$\begin{aligned} 0 \neq \left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| &= \left| a_0 + a_1 \frac{p}{q} + \dots + a_n \frac{p^n}{q^n} \right| \\ &= \left| \frac{a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \dots + a_n p^n}{q^n} \right| \geq \frac{1}{q^n} \end{aligned}$$

pois, $|a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \dots + a_n p^n|$ é um inteiro maior que zero. Logo, temos que

$$\frac{1}{q^n} \leq M \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \Rightarrow \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{M q^n}$$

Tomando $c(\alpha) = \min \left\{ \delta, \frac{1}{M} \right\}$ obtemos

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c(\alpha)}{q^n}$$

para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. □

Exemplo 4. Como $\alpha = \sqrt{3}$ é raiz de $P(x) = x^2 - 3$ com coeficientes racionais, temos que, ele é algébrico. Isso significa que existe uma constante $c = c(\sqrt{3})$. Afirmamos que

$c = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$. De fato

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1}{q^n} &= \frac{2\sqrt{3} - 3}{3q^n} \\ &\leq \frac{2\sqrt{3}}{3q} - \frac{1}{q} \\ &\leq \sqrt{3} - \frac{1}{q} \leq \left| \frac{1}{q} - \sqrt{3} \right| \leq \left| \frac{p}{q} - \sqrt{3} \right| = \left| \sqrt{3} - \frac{p}{q} \right| \end{aligned}$$

Para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

1.3 Os Números de Liouville

Como podemos definir os números reais como limites de seqüências de Cauchy de racionais, temos que \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} . Ou seja, dado um $\alpha \in \mathbb{R}$, existe um racional tão próximo quanto se queira desse número. Contudo, essa historia muda quando consideramos a “velocidade” de crescimento do denominador desses racionais. Podemos dizer que um número real α é bem aproximável por racionais se existirem uma constante $C > 0$ e uma seqüência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j \geq 1}$ de racionais distintos, com $q_j > 1$ e $\text{mdc}(p_j, q_j) = 1$ tais que

$$\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{C}{q_j^n}$$

para todo $j \geq 1$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Seguindo essa definição, o teorema de Liouville diz que, de certo modo, um número irracional algébrico não pode ser bem aproximado por racionais. O que Liouville fez foi construir números que não obedecem seu teorema.

Definição 1.3.1. Um número real α é chamado número de Liouville se existir uma seqüência de racionais distintos $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j \geq 1}$, com $q_j > 1$, tal que

$$\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Denotaremos o conjunto dos números de Liouville por \mathbb{L} .

Demonstraremos agora que $\mathbb{L} \subset \mathbb{T}$, mas, primeiramente, precisamos de dois lemas.

Lema 1.3.1. A seqüência $(q_j)_{j \geq 1}$ é ilimitada.

Demonstração. Se não fosse, então existiria $M > 0$, tal que $q_j \leq M$, para todo $j \geq 1$. Como $|\alpha - \frac{p_j}{q_j}| < 1$, obtemos

$$|p_j| - |q_j \alpha| < |q_j \alpha - p_j| < q_j,$$

o que implica uma limitação para $(p_j)_{j \geq 1}$, pois, $|p_j| < (\alpha + 1)M$. Mas isso contraria o fato de a sequência $(\frac{p_j}{q_j})_{j \geq 1}$ ser infinita. \square

Lema 1.3.2. *Todo número de Liouville é irracional.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $p/q \in \mathbb{Q}$ é número de Liouville. Então existem infinitos p_j/q_j , diferentes de p/q , tais que

$$\frac{1}{q_j^j} > \left| \frac{p}{q} - \frac{p_j}{q_j} \right| = \left| \frac{pq_j - p_j q}{qq_j} \right| \geq \frac{1}{|q|q_j}$$

Assim $q_j^{j-1} < |q|$, contrariando a ilimitação de $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$. \square

Agora conseguimos provar o seguinte fato:

Teorema 1.3.1. *Todo número de Liouville é transcendente.*

Demonstração. Pelo lema 1.3.2, um número de Liouville α não é racional. Suponha que α é algébrico de grau $n > 1$. Então, pelo teorema de Liouville e pela definição de números de Liouville, temos simultaneamente

$$\frac{c}{q_j^n} < \left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j}$$

Desse modo, $q_j^{j-n} < 1/c$, para todo $j \geq 1$, contrariando, pelo lema 1.3.1, o fato de $(q_j^{j-n})_j$ ser ilimitada. Portanto, α é transcendente. \square

Por esse teorema, é fácil ver que o número $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ é transcendente, pois, escolhendo $q_j = 10^{j!}$ e $p_j = \sum_{n=1}^j 10^{j!-n!}$ temos que

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| &= \sum_{n=j+1}^{\infty} 10^{-n!} \leq 9 \sum_{n=j+1}^{\infty} 10^{-n!} \\ &< 9 \sum_{n=(j+1)!}^{\infty} 10^{-n} = \frac{10}{10^{(j+1)!}} = \frac{1}{a_j^j} \end{aligned}$$

o que nos diz que α é número de Liouville, logo, transcendente. Este número é conhecido como *constante de Liouville* e foi o primeiro exemplo dado por ele de um número de Liouville. O próximo resultado nos dá uma definição equivalente à definição 1.3.1.

Teorema 1.3.2. ξ é um número de Liouville se, e somente se, para todo $n \geq 1$, existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, tal que $q > 1$ e

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

Demonstração. Se ξ é um número de Liouville, dado $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $p = p_n$ e $q = q_n$. Reciprocamente, dado $n \in \mathbb{N}$, vamos escolher $\frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ de modo que $q_n > 1$ e

$$0 < \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n}$$

Seja

$$A = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \frac{p_n}{q_n} \right\}$$

Se A for finito, então existe $\frac{p}{q} \in A$ tal que $|\xi - p/q| < q^{-n}$ para $n \in \mathbb{N}'$, com $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito. Assim, $\xi = \frac{p}{q}$, contradizendo $|\xi - p/q| > 0$. Desse modo, A é infinito, logo, ξ é número de Liouville.

□

Podemos encarar o teorema 1.3.2 como uma definição alternativa para números de Liouville. O teorema a seguir implica, de imediato, que o conjunto dos Números de Liouville é não enumerável, pois, nos fornece, indiretamente, uma bijeção entre ele e o conjunto dos números reais.

Teorema 1.3.3 (Erdős). *Todo número real pode ser escrito como soma de dois números de Liouville.*

Demonstração. Se $\alpha \in \mathbb{Q}$, escolhamos θ um número de Liouville qualquer, fixado. Como funções racionais não constantes levam números de Liouville em números de Liouville (teorema de Maillet), $\tau = \alpha - \theta$ também é número de Liouville e

$$f(\theta, \tau) = \theta + \tau = \theta + (\alpha - \theta) = \alpha.$$

Se α é irracional $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$ onde $[\alpha] \in \mathbb{Z}$ corresponde à parte inteira de α e $\{\alpha\} \in (0, 1)$ corresponde à parte fracionária.. É suficiente provar que ' existem números de Liouville τ_1 e τ_2 tais que $\tau_1 + \tau_2 = \{\alpha\}$. Pois, tomando $\theta = [\alpha] + \tau_1$ e $\tau = \tau_2$, obtemos $f(\theta, \tau) = \theta + \tau = [\alpha] + \tau_1 + \tau_2 = [\alpha] + \{\alpha\} = \alpha$. Como $\{\alpha\} \in (0, 1)$, podemos escrever sua expansão 2-ádica como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{2^k}$$

com $\epsilon_k \in \{0, 1\}$. Em seguida, definimos

$$\tau_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k} \text{ e } \tau_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k}$$

onde para $n! \leq k < (n+1)!$ temos

$$\alpha_k = \epsilon_k \text{ e } \beta_k = 0 \text{ se } n \notin 2\mathbb{Z}$$

$$\alpha_k = 0 \text{ e } \beta_k = \epsilon_k \text{ se } n \in 2\mathbb{Z}$$

Observe que $\tau_1 + \tau_2 = \{\alpha\}$. Verificaremos apenas que τ_2 é número de Liouville, pois, para τ_1 o argumento é análogo.

Dado $n \geq 1$, seja,

$$q_n = 2^{(2n+1)!-1} \text{ e } p_n = q_n \left(\sum_{k=1}^{(2n+1)!-1} \frac{\beta_k}{2^k} \right)$$

Assim,

$$\left| \tau_2 - \frac{p_n}{q_n} \right| = \sum_{k=(2n+1)!-1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k}$$

Note que, $\beta_k = 0$ para $(2n+1)! \geq k < (2n+2)!$. Desse modo,

$$\left| \tau_2 - \frac{p_n}{q_n} \right| = \sum_{k=(2n+2)!}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k} \leq \sum_{k=(2n+2)!}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{(2n+2)!-1}} < \frac{1}{2^{n(2n+1)!-n}} = \frac{1}{q_n^n}.$$

Conclui-se que τ_2 é um número de Liouville. □

Uma consequência direta desse teorema é que \mathbb{T} não pode ser um corpo, pois a soma de dois transcendentos (pelo teorema 1.3.1) pode ser um algébrico. Os teoremas 1.3.1 e 1.3.3 (o segundo por implicar a não-enumerabilidade de \mathbb{L}) nos leva, naturalmente, a

esperança de uma recíproca ser verdadeira. Em outras palavras: todo número transcendente é número de Liouville? Sabemos que o conjunto dos algébricos reais tem medida nula em \mathbb{R} e, conseqüentemente, os transcendentos reais têm medida total em \mathbb{R} . Em vista disso, o teorema a seguir responde à pergunta anterior de maneira negativa.

Teorema 1.3.4. *O conjunto dos números de Liouville tem medida nula em \mathbb{R} .*

Demonstração. Como a união enumerável de conjuntos com medida nula é ainda um conjunto com medida nula, então é suficiente mostrarmos que a medida do conjunto $\mathbb{L} \cap [0, 1]$ é nula. Para isto, note que dado $\epsilon > 0$, existe um inteiro positivo n tal que $\sum_{b=2}^{\infty} \frac{4}{b^{n-1}} < \epsilon$. com efeito, isso é válido, pois a sequência $(a_k)_{k \geq 2}$, dada por $a_k = \sum_{b=2}^{\infty} \frac{4}{b^{k-1}}$ satisfaz

$$0 < \sum_{b=2}^{\infty} \frac{4}{b^{k-1}} \leq 4 \sum_{b=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-3}b^2} = \frac{4}{2^{k-3}} \cdot \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right)$$

portanto, tende a zero (quando $k \rightarrow \infty$) como queremos. Se $\xi \in [0, 1]$ é um número de Liouville, então existem, pelo teorema 1.3.2 inteiros a e b , com $b > 1$, tais que

$$\left| \xi - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^n}. \quad (1.1)$$

Como o lado direito da desigualdade anterior é menor ou igual a $\frac{1}{2}$ e $\xi \in [0, 1]$, então

$$-\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{3}{2} \Rightarrow \left(-\frac{b}{2}, \frac{3b}{2} \right).$$

Desse modo, temos que a é um inteiro em um intervalo de comprimento $2b$. Logo, existem no máximo $2b$ valores possíveis para a , satisfazendo (1.1). Chamemos de C_b o conjunto de tais valores. Desse modo

$$\xi \in \bigcup_{a \in C_b} \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b^n}, \frac{a}{b} + \frac{1}{b^n} \right), \text{ para algum } b \geq 2$$

e assim

$$\mathbb{L} \cap [0, 1] \subseteq \bigcup_{b=2}^{\infty} \bigcup_{a \in C_b} \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b^n}, \frac{a}{b} + \frac{1}{b^n} \right).$$

$$\sum_{b=2}^{\infty} C_b \frac{2}{b^n} \leq \sum_{b=2}^{\infty} 2b \frac{2}{b^n} = \sum_{b=2}^{\infty} \frac{4}{b^{n-1}} < \epsilon,$$

como queríamos demonstrar. □

Isso exclui totalmente a possibilidade de \mathbb{L} ser igual a \mathbb{T} . E, também, eleva a estima do teorema de Paul Erdős, pois, mesmo com \mathbb{L} sendo praticamente invisível no conjunto dos números reais, estão estrategicamente posicionados a ponto de, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = \xi_1 + \xi_2$, com $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{L}$.

Capítulo 2

ALGUNS RESULTADOS SOBRE NÚMEROS TRANSCENDENTES

Este capítulo visa apresentar os resultados mais clássicos em teoria transcendente, a saber, os teoremas de Hermite-Lindemann, de Gelfond-Schneider e o de Baker. Neste capítulo também será apresentada a classificação de Mahler para números complexos. Ela visa dividi-los em quatro conjuntos de acordo com certas propriedades

2.1 O Teorema de Hermite-Lindemann

O teorema a seguir é essencial, pois, a transcendência de e e π são casos particulares dele.

Teorema 2.1.1 (Hermite-Lindemann). *Se $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ são números algébricos distintos, então $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m}$ são linearmente independentes sobre o corpo dos números algébricos.*

Demonstração. Ver [11]

□

Desse teorema podemos verificar, quase que de imediato, a transcendência de vários importantes números.

Corolário 2.1.1. *A constante de Euler é transcendente.*

Demonstração. Na verdade, decorre do teorema 2.1.1 um resultado mais forte: e^α é transcendente para todo α algébrico não nulo. De fato, se fizermos $m = 2$, $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = \alpha$, algébrico não nulo, obtemos

$$\beta_1 + e^\alpha \neq 0, \quad \forall \beta_1 \in \overline{\mathbb{Q}},$$

pois, 1 e e^α são linearmente independentes sobre o corpo dos algébricos, logo e^α não pode ser algébrico. Fazendo $\alpha = 1 \in \overline{\mathbb{Q}}$ obtemos que e é transcendente. \square

Notemos que, do fato de e^α , com α algébrico, ser transcendente, obtemos a transcendência de $\log \alpha$, pois, se $\log \alpha$ fosse algébrico, $e^{\log \alpha} = \alpha$ seria transcendente, uma contradição, pois, supomos $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ diferente de zero.

Corolário 2.1.2. π é transcendente.

Demonstração. Pela relação de Euler obtemos que $e^{i\pi} = -1 \in \overline{\mathbb{Q}}$ o que implica que $i\pi$ deve ser transcendente, caso contrário -1 seria transcendente pelo corolário anterior, como i é raiz do polinômio $z^2 + 1$, e $\overline{\mathbb{Q}}$ forma um corpo (proposição 1.1.1) então π é transcendente. \square

2.2 O Teorema de Gelfond-Schneider

O teorema de Gelfond-Schneider é a resposta para o sétimo problema de Hilbert que questionava a natureza da potenciação de números algébricos.

Teorema 2.2.1 (Gelfond-Schneider). *Seja α um número algébrico diferente de 0 e 1 e β um algébrico irracional. Então, α^β é transcendente.*

Demonstração. Ver [11] \square

Como α^β é algébrico sempre que $\alpha \in \{0, 1\}$ e β é racional, o teorema 2.2.1 explica, na totalidade, a natureza aritmética da potenciação de números algébricos.

Exemplo 5. *Decorre de imediato, do teorema de Gelfond-Schneider a transcendência, por exemplo, 2^i , $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, etc.*

Corolário 2.2.1. e^π é transcendente.

Demonstração. Pela relação de Euler temos o seguinte.

$$\begin{aligned} e^{\pi i} + 1 = 0 &\Rightarrow e^{\pi i} = -1 \\ &\Rightarrow (e^{\pi i})^{-i} = (-1)^{-i} \\ &\Rightarrow e^{\pi} = (-1)^{-i} \end{aligned}$$

E como $-i$ é um algébrico irracional e -1 é algébrico, então pelo teorema 2.2.1 $(-1)^{-i} = e^{\pi}$ é transcendente. \square

Corolário 2.2.2. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \overline{\mathbb{Q}}$, não nulos, com $\log \alpha_1, \log \alpha_2$ linearmente independentes sobre \mathbb{Q} . Então*

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2 \neq 0$$

.

Demonstração. Suponha por absurdo que existem $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, satisfazendo as hipóteses do corolário e tais que

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2 = 0 \tag{2.1}$$

Portanto,

$$-\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\log \alpha_1}{\log \alpha_2}$$

implicando que $\alpha_1 = \alpha_2^{-\frac{\beta_1}{\beta_2}}$ e pelo teorema 2.2.1, $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ é racional. Então existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $\beta_1 = p\beta_2$. Substituindo em (2.1), obtemos

$$p \log \alpha_1 + \log \alpha_2 = 0$$

contrariando a independência linear de $\log \alpha_1, \log \alpha_2$ sobre \mathbb{Q} . Logo,

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2 \neq 0$$

\square

Exemplo 6. *O número $\frac{\log 3}{\log 2}$ é transcendente. De fato, note que $\log 2$ e $\log 3$ são linearmente independentes sobre \mathbb{Q} . Caso contrário, $2^a = 3^b$ para alguns inteiros a, b , contradizendo o Teorema Fundamental da Aritmética. Assim, se $\frac{\log 3}{\log 2} = \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, então teríamos $\log 3 - \alpha \log 2 = 0$, contrariando o corolário anterior.*

2.3 O Teorema de Baker

O teorema de Baker é resultado de uma generalização do corolário 2.2.2 e lhe rendeu a medalha Fields em 1970.

Teorema 2.3.1 (Baker). *Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são números algébricos não nulos tais que $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n$ são linearmente independentes sobre \mathbb{Q} . Então, $1, \log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n$ são linearmente independentes sobre o corpo $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Demonstração. Ver [11] □

Importantes resultados decorrem do teorema de Baker. Do teorema a seguir, consequência do teorema de Baker, decorrem transcendências muito importantes relativas ao produto de alguns dos números transcendentos que já vimos anteriormente.

Teorema 2.3.2. *Dados $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ números algébricos, não nulos, e β_1, \dots, β_n números algébricos tais que*

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n \neq 0$$

Então $\beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n$ é um número transcendente.

Demonstração. É suficiente mostrar que se $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ são números algébricos, com $\alpha_j \neq 0, 1 \leq j \leq n$, então

$$\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n \neq 0$$

Vamos proceder por indução em n . Claramente, se $n = 1$ é válido. Assuma a validade para $n < m$, onde $m \in \mathbb{Z}$; mostraremos então o resultado para $n = m$.

Se $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_m$ são linearmente independentes sobre \mathbb{Q} , suponha que existem $\rho_1, \dots, \rho_m \in \mathbb{Q}$, não todos nulos e tais que

$$\rho_1 \log \alpha_1 + \dots + \rho_m \log \alpha_m = 0.$$

Sem perda de generalidade, suponha $\rho_r \neq 0$. Entretanto, para $\alpha_0 = e$, temos

$$\begin{aligned} \rho_r \sum_{k=0}^m \beta_k \log \alpha_k &= \rho_r (\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_m \log \alpha_m) - \beta_r (\rho_1 \log \alpha_1 + \dots + \rho_m \log \alpha_m) \\ &= \beta'_0 + \beta'_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta'_m \log \alpha_m \end{aligned}$$

onde $\beta'_0 = \rho_r \beta_0$, $\beta'_j = \rho_r \beta_j - \rho_j \beta_r$ para $1 \leq j \leq m$. Com isso,

$$\rho_r(\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_m \log \alpha_m) = \beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_m \log \alpha_m \quad (2.2)$$

Observe que $\beta'_0 \neq 0$ e $\beta'_r = 0$, então, por hipótese de indução, o lado direito de (2.2) é não nulo e como $\rho_r \neq 0$, segue-se que

$$\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_m \log \alpha_m.$$

□

Consideremos o número $\alpha = e^{\beta_0} \alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_n^{\beta_n}$ com $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ algébricos não nulos. Temos que α é transcendente. De fato, se α fosse algébrico, então

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n - \log \alpha_{n+1} = -\beta_0 \neq 0.$$

Desse modo, $\beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n - \log \alpha_{n+1}$ é um número algébrico não nulo, contrariando o teorema 2.3.2. Isso implica, por exemplo, a transcendência do produto de transcendentess obtidos pelos teoremas de Hermite-Lindemann e Gelfond-Schneider como $e \cdot 2^i$, com i a unidade imaginária, sendo i algébrico.

2.4 Classificação de Mahler

Cantor conseguiu mostrar que $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável e, pelo fato de $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{T}$, de $\overline{\mathbb{Q}}$ e \mathbb{T} serem disjuntos (com \mathbb{T} o conjunto dos números transcendentess) e \mathbb{C} ser não-enumerável, ele concluiu que \mathbb{T} é não-enumerável, ou seja, quase todo número complexo é transcendente. Porém, é muito difícil decidir se um número é transcendente, pois, eles são definidos pelo que não são e não pelo que são, por isso, é proveitoso classificá-los da melhor forma possível de acordo com propriedades mais específicas. A classificação de Mahler tem esse fim e se aproveita do seguinte teorema.

Teorema 2.4.1. *Dados um número complexo ξ e inteiros positivo H e N , sejam*

$$\mathcal{P}_{N,H} = \{P(z) \in \mathbb{Z}[z]; \partial P \leq N \text{ e } \mathcal{H}(P) \leq H\}$$

(onde $\mathcal{H}(P)$, conhecido como altura do polinômio P , é o máximo entre os valores absolutos dos coeficientes de P) e

$$\Omega(\xi, N, H) = \min\{|P(\xi)|; P(z) \in \mathcal{P}_{N,H} \text{ e } P(\xi) \neq 0\}$$

Defina $\omega(\xi, N, H)$ como

$$\Omega(\xi, N, H) = H^{-\omega(\xi, N, H) \cdot N},$$

$\omega(\xi, N) := \lim_{H \rightarrow \infty} \sup \omega(\xi, N, H)$ e $\omega(\xi) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \omega(\xi, N)$. Então ξ é transcendente se, e somente se, $\omega(\xi) \neq 0$.

Para provar esse teorema precisamos de dois lemas.

Lema 2.4.1. *Seja α um algébrico de grau d e N um inteiro positivo. Então existe uma constante positiva $c = c(\alpha, N)$ tal que, para todo polinômio $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$, satisfazendo $\partial P \leq N$ e $P(\alpha) \neq 0$, vale*

$$|P(\alpha)| \geq \frac{c}{\mathcal{H}(P)^{d-1}}.$$

Demonstração. Ver [11] □

Lema 2.4.2. *Sejam ξ um número complexo e N um inteiro positivo, de modo que ξ ou é transcendente, ou é algébrico de grau maior do que N . Então existe uma constante $C = C(\xi, N) > 0$ tal que para todo inteiro positivo H , existe um polinômio não nulo $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$, com $\partial P \leq N$ e $\mathcal{H}(P) \leq H$ satisfazendo*

$$|P(\xi)| < \frac{C}{H^{\frac{1}{2}(N-1)}}.$$

Demonstração. Ver [11] □

O lema 2.4.1 é uma generalização do teorema de Liouville que vimos anteriormente e o lema 2.4.2 é uma generalização do teorema de Dirichlet que diz que se $\xi \in \mathbb{R}$ é um número irracional, então existem infinitos racionais $\frac{p}{q}$, com $q \geq 1$, tais que

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

Ou seja, com $P(x) = qx - p$.

Demonstração (Teorema 2.4.1). (\Rightarrow)

Se ξ é transcendente, pelo lema 2.4.2, para todo N e H fixados, existem uma constante positiva $C = C(\xi, N)$ e um polinômio $P(z) \in \mathcal{P}_{N,H}$ tais que

$$\Omega(\xi, N, H) \leq |P(\xi)| < \frac{C}{H^{\frac{1}{2}(N-1)}} \Rightarrow H^{-\omega(\xi, N, H) \cdot N} < \frac{C}{H^{\frac{1}{2}(N-1)}}$$

Aplicando o logaritmo na desigualdade do lado direito da implicação, obtemos

$$-\omega(\xi, N, H) \cdot N \log H < \log C - \frac{1}{2}(N-1) \log H$$

Desse modo

$$\frac{1}{2}(N-1) < \frac{\log C}{\log H} + \omega(\xi, N, H) \cdot N \quad (2.3)$$

Primeiramente, observemos qual o crescimento de $\omega(\xi, N, H)$ para os infinitos valores de H . Não sabemos se o $\lim_{H \rightarrow \infty} \omega(\xi, N, H)$ existe, mas como estamos interessados no maior ponto de acumulação de $\omega(\xi, N, H)$, para N fixo e $H \rightarrow \infty$, basta verificarmos o $\limsup_{H \rightarrow \infty} \omega(\xi, N, H)$ que sempre existe. Assim, definimos

$$\omega(\xi, N) = \limsup_{H \rightarrow \infty} \omega(\xi, N, H).$$

De (2.1) temos

$$\limsup_{H \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}(N-1) \right) \leq \limsup_{H \rightarrow \infty} \left(\frac{\log C}{\log H} \right) + \omega(\xi, N) \cdot N$$

Isto é,

$$\frac{1}{2}(N-1) \leq \omega(\xi, N) \cdot N \Rightarrow \omega(\xi, N) \geq \frac{N-1}{2N}$$

Denotando $\omega(\xi)$ como o maior ponto de acumulação da função $\omega(\xi, N)$ quando $N \rightarrow \infty$, ou seja, $\omega(\xi) := \limsup_{N \rightarrow \infty} \omega(\xi, N)$, vemos que

$$\omega(\xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \omega(\xi, N) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Logo, se ξ é transcendente, então $\omega(\xi) \neq 0$, pois, é maior que meio que é maior que zero.

(\Leftarrow)

Agora devemos estimar $\omega(\xi)$ no caso qm que ξ é algébrico de grau d . Seja $P(z) \in \mathcal{P}_{N,H}$ o polinômio que satisfaz

$$|P(\xi)| = \Omega(\xi, N, H) = H^{-\omega(\xi, N, H) \cdot N}$$

Pelo lema 2.4.1, obtemos

$$\frac{c(\xi, N)}{H^{d-1}} \leq \frac{c(\xi, N)}{\mathcal{H}(P)^{d-1}} \leq |P(\xi)| = H^{-\omega(\xi, N, H) \cdot N}$$

com isso

$$\omega(\xi, N, H) \leq \frac{d-1}{N} - \frac{\log c(\xi, N)}{N \log H}.$$

Logo,

$$c(\xi, N) = \limsup_{H \rightarrow \infty} \omega(\xi, N, H) \leq \frac{d-1}{N} - \underbrace{\limsup_{H \rightarrow \infty} \frac{\log c(\xi, N)}{N \log H}}_{\rightarrow 0}$$

Desse modo,

$$\omega(\xi) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \omega(\xi, N) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{d-1}{2N} \Rightarrow \omega(\xi) \leq 0$$

Por outro lado, como a sequência $(\Omega(\xi, N, H))_{N \geq 1}$ é não crescente, então $\Omega(\xi, N, H) \leq \Omega(\xi, 1, H) \leq 1$, para todo $H \geq |\xi| + 1$. Com isso,

$$\omega(\xi, N, H) = -\frac{\log \Omega(\xi, N, H)}{N \log H} \geq 0$$

quando $H \geq |\xi| + 1$. Assim, $\omega(\xi) \geq 0$ e concluímos que se α é algébrico, então $\omega(\alpha) = 0$.

□

Esse teorema nos diz que um número ξ é transcendente, e só se, $\omega(\xi)$ é maior que 0, ou seja, podemos usar esse critério como definição para números transcendentos. Queremos agora usar esse teorema para classificar os números complexos para além de, simplesmente, algébricos e transcendentos em vista do fato de quase todos os complexos serem transcendentos.

Para isso, definamos $\nu(\xi)$ como sendo o menor inteiro positivo N tal que $\omega(\xi) = \infty$, ou seja, não tem ponto de acumulação. A classificação de Mahler é relativa as seguintes possibilidades para $\omega(\xi)$ e $\nu(\xi)$ (perceba que se $\omega(\xi) = \infty$, $\nu(\xi)$ pode ser finito ou infinito, e se $\omega(\xi, N) < \infty$, para todo N , então $\nu(\xi) = \infty$).

- A -número, se $\omega(\xi) = 0$ e $\nu(\xi) = \infty$
- S -número, se $0 < \omega(\xi) < \infty$ e $\nu(\xi) = \infty$
- U -número, se $\omega(\xi) = \infty$ e $\nu(\xi) < \infty$

- T -número, se $\omega(\xi) = \infty$ e $\nu(\xi) = \infty$

Sabe-se que, se ξ é número de Liouville, então $\nu(\xi) = 1$, ou seja, os números de Liouville são U -número. Sabe-se que se dois números complexos são algebricamente independentes, então devem pertencer a classes diferentes e esse resultado faz da classificação de Mahler uma boa classificação de números complexos.

Em 1929, Popken [21] provou que, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe uma constante positiva $C = C(n)$, tal que

$$|P(e)| \geq H^{-n-C/\log \log H}$$

para todo $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$ de grau n e altura H suficientemente grande. Isso faz de e um S -número.

A prova da existência de T -números só foi apresentada em 1970 por W. Schmidt [22]. A dificuldade dessa prova vem do fato de T -números ter medida nula. Schmidt provou a existência desses números, mas não explicitou nenhum.

Capítulo 3

COMPORTAMENTO ARITMÉTICO DE FUNÇÕES TRANSCENDENTES

O intento deste capítulo é apresentar alguns dos principais resultados sobre o comportamento aritmético de funções transcendentais com ênfase nos problemas de Mahler, em especial, os problemas B e C, que foram totalmente resolvidos, e o problema de Mahler para números de Liouville ainda em aberto. Na última seção apresentaremos, em detalhes, a demonstração de um resultado recente sobre funções inteiras transcendentais que mapeiam racionais em racionais.

3.1 Preliminares

Do teorema de Hermite-Lindemann podemos extrair que a função, analítica em todo plano complexo, e^z interpola algébricos não nulos em \mathbb{T} . Ou seja, a imagem de e^z por algébricos diferentes de zero é transcendente sobre \mathbb{Q} . Isso nos leva a uma importante analogia da definição de números algébricos e, conseqüentemente, da definição de números transcendentais.

Definição 3.1.1. *Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, é chamada algébrica se existe um*

polinômio não-nulo com coeficientes complexos $P(x, y)$ tal que

$$P(z, f(z)) = 0, \forall z \in D.$$

Caso contrário dizemos que f é transcendente.

O teorema a seguir caracteriza totalmente as funções inteiras algébricas.

Teorema 3.1.1. *Uma função inteira é algébrica se, e somente se, é um polinômio.*

Demonstração. Ver [10] □

Ou seja, uma função inteira e transcendente de modo nenhum pode ser um polinômio. Desse modo, como $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, decorre imediatamente do teorema 3.1.1 que a função exponencial é transcendente. Esse resultado nos desperta o interesse em estudar o comportamento de funções inteiras transcendentess. Para começar vejamos a seguinte definição.

Definição 3.1.2. *Seja $0 < \rho \leq \infty$ e $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica na bola de centro zero e raio ρ e transcendente. Definimos o conjunto excepcional de f como o conjunto*

$$S_f := \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, \rho) : f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}\}$$

.

O conjunto $S_{e^x} = \{0\}$ e se considerarmos $f = e^{P(x)}$ com P um polinômio com coeficientes algébricos tais que, as raízes são algébricas, o conjunto dessas raízes será o conjunto excepcional de f , o que nos leva a concluir que qualquer subconjunto finito de algébricos é o conjunto excepcional de f para o polinômio P com coeficientes algébricos tais que eles são raízes.

O primeiro a definir o conjunto excepcional de uma função inteira e transcendente foi Weierstrass e, inspirado pelo teorema de Hermite-Lindemann e por contribuições, de sua autoria, como um exemplo de uma função analítica e transcendente que leva racionais em racionais, fez os seguintes questionamentos: existe uma função f inteira e transcendente tal que $S_f = \overline{\mathbb{Q}}$? E outro: Para quais conjuntos $A \subseteq \mathbb{C}$, existe uma função f inteira e transcendente tal que $S_f = A$? Mais a frente veremos as respostas para essas perguntas.

Mahler [8] também estudou o comportamento aritmético de funções inteiras transcendentais avaliadas em algébricos e, como Weierstrass, deixou seus próprios questionamentos intitulados problemas A, B e C de Mahler. O primeiro ainda está em aberto. Adiante, veremos mais a respeito dos problemas B e C.

3.2 Problema B de Mahler

Strauss, em 1886, tentou provar que uma função analítica, em uma vizinhança da origem, e transcendente não podia levar racionais em racionais, porém, Weierstrass construiu uma função analítica e transcendente que o fazia e conjecturou que existiam funções inteiras e transcendentais que levam o conjunto dos números algébricos nele mesmo. Contudo, esse resultado só foi provado por Stäckel [17] utilizando o seguinte teorema, provado por ele, mais geral.

Teorema 3.2.1 (Stäckel, 1895). *Sejam Σ um conjunto enumerável e T um conjunto denso no plano complexo. Então, existe uma função inteira e transcendente $f(z)$ tal que $f(\Sigma) \subseteq T$.*

A afirmação de Weierstrass decorre, imediatamente, do teorema de Stäckel fazendo $\Sigma = T = \overline{\mathbb{Q}}$. E, em 1902, Stäckel, encontrou uma função $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, com coeficientes a_n racionais, analítica, em uma vizinhança da origem, e transcendente tal que ela e sua inversa assumem valores algébricos em todos os algébricos dessa vizinhança. Esse resultado levou Mahler a questionar se esse resultado podia se estender para funções inteiras. Em outras palavras, ele levantou a seguinte questão: existe função inteira e transcendente $f(z)$ com coeficientes racionais tal que

$$f(\overline{\mathbb{Q}}) \cup f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}?$$

Essa questão é o denominado o problema B de Mahler e foi totalmente resolvida por Marques e Moreira [13] utilizando o seguinte resultado mais forte.

Teorema 3.2.2. *Existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras e transcendentais $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, com coeficientes a_n racionais tal que*

$$f(\overline{\mathbb{Q}}) = f^{-1}(\overline{\mathbb{Q}}) = \overline{\mathbb{Q}}$$

Definição 3.2.1. Dizemos que uma função f é hipertranscendente, se para todo $n \geq 0$, as funções $z, f(z), f'(z), \dots, f^{(n)}(z)$ são algebricamente independentes sobre \mathbb{C} . Uma função que não é hipertranscendente é chamada hipotranscendente.

Toda função hipertranscendente é transcendente, logo, é uma condição mais forte. Sabe-se que funções hipertranscendentes não são solução de nenhuma equação diferencial, e um exemplo de uma dessas funções é a função zeta de Riemann. Em [20], Marques provou algo semelhante ao teorema 3.2.2 com respeito a funções hipertranscendentes.

Teorema 3.2.3. Seja A um subconjunto denso e enumerável de \mathbb{R} . Então existe uma quantidade não enumerável de funções analíticas, bijetivas e hipertranscendentes $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com coeficientes racionais em sua série de MacLaurin e tal que $f(A) = A$

Esse resultado pode ser lido como caso real para o problema B de Mahler para funções de uma variável real.

3.3 Problema C de Mahler

Alguns anos após provar seu teorema, Stäckel [18] construiu ainda uma função inteira e transcendente tal que $f^{(s)}(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \overline{\mathbb{Q}}$ para todo $s \geq 0$. Em 1904, Faber [2] provou que existe uma função inteira transcendente com coeficientes racionais tal que ela e todas as suas infinitas derivadas levam algébricos em algébricos, isto é,

Teorema 3.3.1 (Faber, 1904). *Existe uma função inteira e transcendente*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

com os coeficientes a_i em \mathbb{Q} e $f^{(t)}(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \overline{\mathbb{Q}}$ para todo $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Em 2010, J. Huang, D. Marques e M. Mereb [19] generalizaram o teorema de Stäckel e mostraram que qualquer subconjunto de números algébricos é o conjunto excepcional de uma quantidade não enumerável de funções inteiras transcendentes. Ou seja, provaram o seguinte teorema.

Teorema 3.3.2. *Se $A \subset \overline{\mathbb{Q}}$, então existe uma função inteira e transcendente tal que $S_{f^{(t)}} = A$ para todo $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

J. Huang, D. Marques e M. Mereb utilizaram a seguinte generalização do teorema de Stäckel para provar o teorema 3.3.2.

Teorema 3.3.3 (Generalização do Teorema de Stäckel). *Seja $A \subset \mathbb{C}$ um conjunto enumerável e, para cada $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $\alpha \in A$, fixe um conjunto denso $E_{\alpha,s} \subseteq \mathbb{C}$. Então existe uma função inteira e transcendente tal que $f^{(s)} \in E_{\alpha,s}$ para todo $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $\alpha \in A$.*

Demonstração. Ver [19] □

Em [8] Mahler propôs o seguinte problema, chamado de problema C de Mahler: Seja $\rho \in (0, \infty]$ um número real. Existe, para cada escolha de $S \subseteq B(0, \rho) \cap \overline{\mathbb{Q}}$ (fechado para conjugação complexa e tal que $0 \in S$), uma função analítica transcendente f com coeficientes racionais e raio de convergência ρ , para o qual $S_f = S$? Note que, é necessário que 0 esteja no conjunto S e que ele seja fechado para conjugação complexa, pois, se f está nas condições do problema, então $f(0)$ é racional e, para todo $\alpha \in B(0, \rho)$, $\overline{f(\alpha)} = f(\overline{\alpha})$.

Marques e Moreira [12] conseguiram resolver totalmente o problema C de Mahler. Mais precisamente, mostraram que

Teorema 3.3.4. *Qualquer subconjunto de $\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, \rho)$, com $0 < \rho \leq \infty$, que é fechado para conjugação complexa e que contém o elemento 0 , é o conjunto excepcional de uma quantidade não enumerável de funções analíticas transcendentais com coeficientes racionais e raio de convergência ρ .*

E esse fato decorre do seguinte teorema.

Teorema 3.3.5. *Seja $\rho \in (0, \infty]$ um número real e seja \mathbb{K} um subconjunto denso de \mathbb{C} . Seja A um subconjunto enumerável de $B(0, \rho)$. Para cada $\alpha \in A$, fixe um subconjunto denso $E_\alpha \subseteq \mathbb{C}$ (tal que se $0 \in A$, então $1 \in E_0 \cap \mathbb{K}$). Então existe uma quantidade não enumerável de funções analíticas transcendentais $f \in \mathbb{K}[[z]]$ (com $\mathbb{K}[[z]]$ o conjunto de todas as séries formais com coeficientes em \mathbb{K}), com raio de convergência ρ , tal que $f(\alpha) \in E_\alpha$ para todo $\alpha \in A$.*

Demonstração. ver [14] □

Teorema 3.3.6. *Teorema 3.3.5 \Rightarrow Teorema 3.3.4*

Demonstração. Nas condições do Teorema 3.3.5, escolha $A = \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, \rho)$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Q}^* + i\mathbb{Q}$. Escreva $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ e $\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, \rho) \setminus S = \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$ (um desses conjuntos pode ser finito). Agora defina

$$E_\alpha = \begin{cases} \overline{\mathbb{Q}}, & \text{se } \alpha \in S, \\ \mathbb{K} \cdot \pi^n, & \text{se } \alpha = \beta_n. \end{cases}$$

Então, pelo Teorema 3.3.5, existe uma quantidade não enumerável de funções analíticas transcendentais $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k \in \mathbb{K}[[z]]$ com raio de convergência ρ e tal que $f(\alpha) \in E_\alpha$ para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, \rho)$. Para qualquer f definimos a função $\Psi = \Psi_f$ por

$$\Psi(z) = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2}.$$

Note que $\Psi(z) = \sum_{k \geq 0} \mathcal{R}(a_k) z^k$ tem coeficientes racionais e, além disso, existe uma quantidade não enumerável dessas funções. Como o conjunto de funções algébricas com coeficientes racionais e raio de convergência positivo é enumerável, então uma quantidade não enumerável deve ser transcendente. Claramente, seu raio de convergência é ρ . Por último, é suficiente prova que $S_\Psi = S$. De fato, se $\alpha \in S$, então, $\bar{\alpha} \in S$, e assim, $f(\alpha)$ e $f(\bar{\alpha})$ são números algébricos e também $\Psi(\alpha)$. No caso de $\alpha = \beta_n$, devemos distinguir dois casos: quando $\beta_n \in \mathbb{R}$, então $\Psi(\alpha) = \mathcal{R}(f(\beta_n))$ é transcendente, pois, $f(\beta_n) \in \mathbb{K} \cdot \pi^n$. Quando $\beta_n \notin \mathbb{R}$, então $\bar{\beta}_n = \beta_m$ para algum $m \neq n$. Assim, existem números algébricos diferentes de zero γ_1, γ_2 tais que

$$\Psi(z) = \frac{\gamma_1 \pi^n + \gamma_2 \pi^m}{2},$$

que é transcendente, pois, \mathbb{Q} é algebricamente fechado e π é transcendente (Corolário 2.1.2). Isso conclui a demonstração. □

3.4 Questão de Mahler para Números de Liouville

Mahler foi um dos principais estudiosos do comportamento aritmético das funções transcendentais. E seus estudos geraram o questionamento que é o principal motivador desse tópico: existe uma função f inteira transcendente que leva números de Liouville em números de Liouville?

Maillet [9] provou que se $G(x)$ é uma função racional não constante com coeficientes racionais, então para todo número de Liouville ξ , $G(\xi)$ também é um número de Liouville. Inspirados neste resultado, Marques e Moreira mostraram que se existir uma função f inteira transcendente de modo que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $den(f(p/q))^1 = O(q^v)^2$ (onde $den\left(\frac{a}{b}\right) = b$ para todo racional $\frac{a}{b}$ não nulo) para todo $p/q \in \mathbb{Q}$, $v > 0$ e $q > 1$ suficientemente grande, então $f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$ [12].

Silva mostrou que não existe uma função f inteira transcendente $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e

$$den(f(p/q)) = O(q^v)$$

para todo $p/q \in \mathbb{Q}$, com q suficientemente grande e $0 < v < 1$ [16]. Lelis [6] provou que não existe função inteira transcendente $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e

$$den(f(p/q)) = O(q)$$

$\forall p/q \in \mathbb{Q}$, com q suficientemente grande. Ficando em aberto para o caso $v > 1$. Esses resultados sobre o comportamento aritmético de funções inteiras transcendentess serão vistos com mais detalhes na próxima seção.

Lelis em [6] definiu um subconjunto de números de Liouville para o qual existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras transcendentess que mapeiam ele em \mathbb{L} . Ele chamou esse conjunto de *números fortes de Liouville*.

Definição 3.4.1. Um número real ξ é chamado número forte de Liouville se

$$0 < \left| \xi - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j}, \quad \forall j \geq 1,$$

onde p_j/q_j é o j -ésimo convergente da fração contínua de ξ . Denotemos o conjunto desses números por \mathcal{L} .

Desse modo, Lelis provou o seguinte teorema.

Teorema 3.4.1. Existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras transcendentess f , tais que $f(\mathcal{L}) \subseteq \mathbb{L}$.

Demonstração. Ver [6] □

¹ $den(a/b) = b$ para todo a/b racional não nulo

² $f(x) = O(g(x)) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C$, com C uma constante.

Definição 3.4.2. *Seja X um espaço topológico, diremos que $G \subseteq X$ é subconjunto G_δ de X , se G é a interseção de uma família enumerável de abertos densos em X .*

Proposição 3.4.1. *Sejam I um intervalo, não degenerado, de \mathbb{R} , G um subconjunto G_δ de \mathbb{R} e $(f_n)_{n \geq 0}$ uma sequência de funções definidas em I , contínuas e não localmente constantes. Então*

$$\bigcap_{n \geq 0} f_n^{-1}(G)$$

é um subconjunto G_δ de I .

Seria interessante garantir a existência de funções f inteiras transcendentas para os quais $f(G) \subseteq G$, para algum G subconjunto G_δ de \mathbb{R} , pois, fazendo $f_n = f$ para todo $n \geq 0$, a Proposição 3.4.1 e o *princípio da continuação analítica* implicam que, se existir uma função nas condições da questão de Mahler, existe um subconjunto G_δ em \mathbb{R} tal que $f(G) \subseteq \mathbb{L}$.

É sabido que \mathcal{L} não é G_δ , desse modo, o maior avanço que temos na direção da questão de Mahler, que ainda não foi totalmente respondida, é de Marques e Moreira que provaram que existem funções com tal propriedade. Antes do resultado fazemos a seguinte definição.

Definição 3.4.3. *Um número real ξ é chamado ultra-Liouville se para qualquer inteiro positivo k , existe uma quantidade infinita de números racionais p/q tais que $q > 1$ e*

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\exp^{[k]}(q)},$$

onde $\exp^{[0]}(x) = x$ e $\exp^{[n]}(x) = \exp(\exp^{[n-1]}(x))$ é uma recorrência.

Denotemos por \mathbb{L}_{ultra} o conjunto de todos os números ultra-Liouville. Marques e Moreira mostraram que

Teorema 3.4.2. *Existe uma quantidade não enumerável de funções f inteiras transcendentais tais que $f(\mathbb{L}_{ultra}) \subseteq \mathbb{L}_{ultra}$.*

Eles provaram este fato utilizando o seguinte resultado.

Teorema 3.4.3 (Marques, Moreira). *Existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras transcendentais $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ com $1/2 < f'(x) < 3/2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, tais que $den(f(p/q)) < q^{8q^2}$, para todo $p/q \in \mathbb{Q}$, com $q > 1$.*

Veremos agora que teorema 3.4.3 implica o Teorema 3.4.2.

Teorema 3.4.4. *Teorema 3.4.3 \Rightarrow Teorema 3.4.2*

Demonstração. Dado um número ultra-Liouville ξ e um inteiro positivo k , existe uma infinidade de números racionais p/q com $q \geq 7$ tais que

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\exp^{[k+2]}(q)}.$$

Se f é uma função como no teorema 3.4.2, segue do Teorema do Valor Médio que

$$\left| f(\xi) - f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq \frac{3}{2} \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{3}{2\exp^{[k+2]}(q)}$$

Por fim, verifica-se que $f(p/q) = a/b$ implica $\frac{3}{2}\exp^{[k]}(b) < \exp^{[k+2]}(q)$, para cada $k \geq 1$.

Assim,

$$\left| f(\xi) - \frac{a}{b} \right| = \left| f(\xi) - f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq \frac{3}{2} \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{3}{2\exp^{[k]}(q)}$$

Desse modo, $f(\xi) \in \mathbb{L}_{ultra}$, para todo $\xi \in \mathbb{L}_{ultra}$. □

3.5 Comportamento Aritmético de funções transcendententes sobre \mathbb{Q}

Nesta seção daremos mais detalhes sobre o comportamento aritmético de funções transcendentente que levam racionais em racionais. Daremos especial enfase no teorema principal de [6] e nas dificuldades de provar para $v > 1$. Marques e Moreira [27] que se existir uma função inteira transcendentente que leva racionais em racionais, com denominador de $f\left(\frac{p}{q}\right)$ da ordem de, q^v ela leva número de Liouville em números de Liouville.

Silva [16] mostrou que não existe uma função f inteira transcendentente $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$, $den(f(p/q)) \leq Cq^v$ para $C > 0$ uma constante e, para tod q , suficientemente grande e $0 < v < 1$. A dificuldade de mostrar para $v \geq 1$ na demonstração citada anteriormente é que ela resulta em $\lim_{q \rightarrow \infty} Cq^{v-1} = 0$ que não é verdade para $v \geq 1$. O teorema principal desta seção foi provado por Lelis [6] que provou que

Teorema 3.5.1. *Não existe função inteira transcendentente $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e*

$$den(f(p/q)) = O(q)$$

$\forall p/q \in \mathbb{Q}$, com q suficientemente grande.

Para a prova desse teorema é necessário, inicialmente, desenvolver uma representação para funções inteiras conveniente aritmeticamente. Para isso estudaremos expansões polinomiais de funções inteiras. Em seguida será construído um conjunto de polinômios adequado que no qual qualquer função inteira possa ser representada por uma série desses polinômios. Também será necessário explicitar os coeficientes dessa expansão polinomial para estudar com mais precisão seu crescimento. A seção termina com a demonstração do teorema principal com base nesta teoria desenvolvida.

Expansões polinomiais de funções inteiras

Seja \mathbb{B} o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes complexos, munidos de topologia da convergência uniforme sobre todos os subconjuntos compactos de uma região simplesmente conexa Ω . O completamento de \mathbb{B} é o espaço $U(\Omega)$ de todas as funções analíticas sobre a região Ω . Seja a sequência de polinômios $\Phi = \{\varphi_n(z)\}_{n \geq 0}$ que formam uma base de \mathbb{B} , ou seja, qualquer elemento de \mathbb{B} tem uma única representação $p(x) = \sum c_n \varphi_n(x)$. Então toda $F(z)$ em $U(\Omega)$ é o limite em n de uma sequência de somas finitas em k da forma $\sum a_{k,n} \varphi_k(z)$.

Isso não significa, em geral, que sempre existem constantes c_n tais que $\sum c_n \varphi_n(z)$ converge para $f(z)$. Contudo, como Φ é uma base de \mathbb{B} , existe uma única matriz infinita com linhas finitas, de tal modo que

$$z^k = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{k,i} \varphi_i(z), \quad k \geq 0 \quad (3.1)$$

suponha que $0 \in \Omega$, e seja f uma função analítica na origem, logo podemos escrever

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

usando (3.1) obtemos

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{k,i} \varphi_i(z)$$

ou

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(z) \quad (3.2)$$

com

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{k,n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad (3.3)$$

A expansão (3.2) com coeficientes (3.3) é chamada série básica, introduzida por J. M. Whittaker [23], e estudada com mais detalhes por ele em [32] e pelos seus alunos, entre eles, Eweida em [25] e Makar em [28]. Definiremos agora a ordem e o tipo de um conjunto básico e de uma função inteira.

Seja N_n o número de coeficientes π_{ni} diferentes de zero na representação (3.1), se N_n é tal que $N_n^{1/n} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$, então Φ é chamado conjunto de Cannon. Considere

$$\omega_n(R) = \sum_i |\pi_{ni}| M_i(R)$$

com $M_i(R)$ o módulo máximo de $\varphi_i(z)$ em $|z| < R$. Whittaker [23] definiu a ordem ω e o tipo γ de um conjunto básico de Cannon da seguinte forma

$$\omega = \lim_{R \rightarrow \infty} \omega(R)$$

com

$$\omega(R) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \omega_n(R)}{n \log n}$$

e se $0 < \omega < \infty$,

$$\gamma = \lim_{R \rightarrow \infty} \gamma(R)$$

com

$$\gamma(R) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(\omega_n(R))^{\frac{1}{n\omega}}}{n\omega} e$$

Whittaker [23] mostrou que um conjunto básico de Cannon de ordem ω e tipo γ , representa, na totalidade de \mathbb{C} , toda função inteira f com ordem menor que $1/\omega$ ou ordem igual $1/\omega$ e tipo menor que $1/\gamma$. Lembramos que a ordem de uma função inteira $f(z)$ é definida da seguinte maneira,

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\log \|f\|_{\infty, B_r})}{\log r}$$

com B_r sendo o disco de raio r e $\|f\|_{\infty, B_r}$ a norma do supremo de $f(z)$ sobre B_r . A ordem é um número real não negativo ou infinito. A ordem de $f(z)$ é o ínfimo de todos os m tais

que $f(z) = O(\exp(|z|^m))$ quando $z \rightarrow \infty$. Se $0 < \rho < \infty$ pode-se definir o tipo:

$$\sigma = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \|f\|_{\infty, B_r}}{r^\rho}$$

se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

então a ordem e o tipo de f são dados por

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{-\log |a_n|}$$

e

$$(e\rho\sigma)^{1/\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{1/\rho} |a_n|^{1/n}$$

Para mais detalhes sobre funções inteiras ver [24].

Voltando ao conjunto básico Φ temos que se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D(n)}{n \log n} = 0 \tag{3.4}$$

com $D(n)$ o grau do polinômio de maior grau na representação de z^n em (3.1), temos que $\omega(R)$ é o mesmo para todo $R > 0$ e ele é a ordem ω do conjunto básico [25]. Além disso, a ordem de um conjunto básico satisfazendo (3.4) é dada por

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\max_{ij} \{|\pi_{ni}| |p_{ij}|\})}{n \log n} \tag{3.5}$$

Seja *conjunto simples* o conjunto básico $\Phi = \{\varphi_n(z)\}_{n \geq 0}$ tal que o grau de $\Phi_n(z)$ é n .

O teorema a seguir, provado por Whittaker [23], é muito importante para a demonstração do teorema principal.

Teorema 3.5.2 (Teorema de Whittaker). *Seja $\Phi = \{\varphi_n(z)\}_{n \geq 0}$ um conjunto simples de polinômios com*

$$\varphi_i(z) = p_{i,0} + p_{i,1}z + \dots + p_{i,i-1}z^{i-1} + z^i, \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \tag{3.6}$$

tal que todos os coeficientes satisfazem a desigualdade

$$|p_{ij}| \leq L$$

para algum $L > 0$ e seja $f(z)$ uma função contínua e diferenciável em $|z| < \rho$, onde $\rho > 1+L$.

Então a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(z)$$

converge absolutamente para $f(z)$ em $|z| < \rho$.

Φ_S -representação

Utilizando os resultados anteriores sobre expansão polinomial de funções inteiras, construiremos um conjunto básico de polinômios $\Phi = \{\varphi_n(z)\}_{n \geq 0}$, com propriedades aritméticas convenientes. Ou seja, construiremos um conjunto básico de polinômios de Φ ordem 0 (facilitando o estudo da mesma), e provaremos que qualquer função inteira pode ser representada como uma série de polinômios de Φ .

Seja o conjunto $S = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ e definamos os polinômios $\{\varphi_n(z)\}_{n \geq 0}$ de tal modo que o grau de $\varphi_n(z)$ é n , $\varphi_n(\alpha_n) = 1$ e $\varphi_n(\alpha_k) = 0$ para todo $0 \leq k < n$. Com, $\varphi_0 \equiv 1$, e para $n \geq 1$

$$\varphi_n(z) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (z - \alpha_k)}{\prod_{k=1}^{n-1} (\alpha_n - \alpha_k)},$$

Quando S é finito com n elementos, $\alpha_k = 0$ para todo $k > n$. E o conjunto básico $\Phi = \{\varphi_n(z)\}_{n \geq 0}$ será chamado de conjunto básico associado à S .

Teorema 3.5.3 (Teorema de Φ_S -representação). *Seja*

$$S = \left\{ 0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots \right\}$$

o conjunto formado pelo 0 e os inversos dos números inteiros, assim ordenados. Então Φ_S representa em todo plano complexo, de maneira única, qualquer função inteira. Ou seja, se f é uma função inteira, então existem e são únicos os c_0, c_1, \dots em \mathbb{C} tais que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(z), \forall z \in \mathbb{C} \quad (3.7)$$

(3.7) será a Φ_S -representação de $f(z)$.

Fórmula de inversão

Será essencial calcular os coeficientes c_n da Φ_S -representação para estimarmos seu crescimento. O lema a seguir nos auxilia exatamente nesse sentido.

Lema 3.5.1 (Fórmula de inversão). *Sejam $f(z)$ uma função inteira e $S = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\} \subseteq \mathbb{C}$. Se*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(z), c_n \in \mathbb{C}$$

é sua Φ_S -representação, então

$$c_n = \sum_{k=0}^n \psi_{n,n-k} f(\alpha_k), n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.8)$$

com $\psi_{n,0} = 1$ e

$$\psi_{n,k} = - \sum_{j=1}^k \varphi_{n-j}(\alpha_n) \psi_{n-j,k-j}, \quad (3.9)$$

para $0 \leq k \leq n$

Demonstração. Pela definição de polinômios $\varphi_n(z)$ de Φ_S temos que $c_0 = f(\alpha_0) = \psi_{0,0} f(\alpha_0)$. Provaremos por indução em n , para isso, assumamos que (3.8) vale para todo $0 \leq k \leq n-1$.

Daí temos

$$f(\alpha_n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(\alpha_n) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(\alpha_n)$$

logo

$$\begin{aligned} c_n &= f(\alpha_n) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k(\alpha_n) \\ &= f(\alpha_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(\alpha_n) \sum_{j=0}^k \psi_{k,k-j} f(\alpha_j) \end{aligned}$$

Reordenando o somatório, temos

$$c_n = f(\alpha_n) + \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) \left(- \sum_{j=k}^{n-1} \varphi_j(\alpha_n) \psi_{j,j-k} \right),$$

Segue que

$$c_n = \sum_{k=0}^n \psi_{n,n-k} f(\alpha_k), n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

com $\psi_{n,0} = 1$ e

$$\psi_{n,n-k} = - \sum_{j=k}^{n-1} \varphi_j(\alpha_n) \psi_{j,j-k},$$

para $0 \leq k \leq n-1$

$$\psi_{n,k} = - \sum_{j=1}^k \varphi_{n-j}(\alpha_n) \psi_{n-j,k-j}$$

para $1 \leq k \leq n$

□

Seja, então $S = \{0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots\}$. A partir do lema anterior podemos calcular os coeficientes c_n da Φ_S -representação. Por definição, temos que $\Phi_S = \{\varphi_n\}_{n \geq 0}$, onde $\varphi_0 \equiv 1$, $\varphi(z) = z$,

$$\varphi_{2n}(z) = \frac{z(z - \frac{1}{n}) \prod_{k=1}^{n-1} (z^2 - \frac{1}{k^2})}{(-\frac{1}{n})(-\frac{1}{n} - \frac{1}{n}) \prod_{k=1}^{n-1} (\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2})} \quad (3.10)$$

e

$$\varphi_{2n+1}(z) = \frac{z \prod_{k=1}^n (z^2 - \frac{1}{k^2})}{(\frac{1}{n+1}) \prod_{k=1}^n (\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{k^2})} \quad (3.11)$$

para $n > 0$ e sendo

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2(n-1)}} \prod_{k=1}^{n-1} \binom{n-k}{k} \binom{n+k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2(n-1)}} \frac{(n-1)!(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!n!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2(n-1)}} \binom{2n-1}{n} \end{aligned}$$

Logo podemos reescrever os polinômios $\varphi_i(z)$, obtendo

$$\varphi_{2n}(z) = (-1)^{n-1} \frac{n^{2n}}{2} \binom{2n-1}{n}^{-1} z \left(z - \frac{1}{n} \right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - \frac{1}{k^2} \right) \quad (3.12)$$

e

$$\varphi_{2n+1}(z) = (-1)^n (n+1)^{2n+1} \binom{2n+1}{n}^{-1} z \prod_{k=1}^n \left(z^2 - \frac{1}{k^2} \right) \quad (3.13)$$

com $n > 0$

Para calcular os coeficientes $\psi_{n,k}$ da fórmula de inversão, é necessário calcular $\varphi_k(\alpha_n)$, com $\alpha_k \in \Phi_S$ e $\alpha_n \in S$. da definição de $\varphi_i(z)$, temos que $\forall m \in \mathbb{N}$ o número $\pm \frac{1}{m}$ anula todas as $\varphi_i(z)$ a menos de uma quantidade finita delas, ou seja, $\varphi_i(1/m) = 0$ se $m < i/2$ e $\varphi_i(-1/m) = 0$ se $m < (i-1/2)$. Se $m \geq n+1$, usando (13) temos

$$\begin{aligned}
\varphi_{2n+1} \left(\pm \frac{1}{m} \right) &= (-1)^n (n+1)^{2n+1} \binom{2n+1}{n}^{-1} \left(\pm \frac{1}{m} \right) \prod_{k=1}^n \left(\pm \frac{1}{m^2} - \frac{1}{k^2} \right) \\
&= \pm \left(\frac{n+1}{m} \right)^{2n+1} \frac{n!(n+1)!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{m-k}{k} \right) \left(\frac{m+k}{k} \right) \\
&= \pm \left(\frac{n+1}{m} \right)^{2n+1} \frac{n!(n+1)!(m-1)!(m+n)!}{(2n+1)!n!(m-n-1)!n!m!} \\
&= \pm \left(\frac{n+1}{m} \right)^{2n+2} \binom{m+n}{2n+1}
\end{aligned}$$

De maneira análoga, pode-se mostrar que

$$\varphi_{2n} \left(\pm \frac{1}{m} \right) = \mp \binom{n}{m}^{2n+1} \frac{m \mp n}{m+n} \binom{m+n}{2n} \quad (3.14)$$

Pelo anterior podemos calcular os coeficientes $\psi_{n,k}$ da fórmula de inversão. Ou seja, temos que $\psi_{n,0} = 1$ e

$$\psi_{n,k} = - \sum_{j=1}^k \varphi_{n-j}(\alpha_n) \psi_{n-j,k-j},$$

para $1 \leq k \leq n$. Como $\alpha_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ para $n > 0$, então

$$\psi_{n,k} = - \sum_{j=1}^k \varphi_{n-j} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \right) \psi_{n-j,k-j}$$

por (3.14) e (3.15), temos

$$\psi_{n,k} = - \sum_{j=1}^k \left[(-1)^j \left(\frac{\lfloor \frac{n+1-j}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \right)^{n+1-j} \binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n-j}{2} \rfloor}{n-j} \right] \psi_{n-j,k-j},$$

Se $n = 2k > 0$, $k \in \mathbb{N}$. caso $n = 2|k| + 1$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\psi_{n,k} = - \sum_{j=1}^k \left[(-1)^j \left(\frac{\lfloor \frac{n+1-j}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \right)^{n+1-j} \binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n-1-j}{2} \rfloor}{n-j} \right] \psi_{n-j,k-j}$$

Prova do teorema Φ_S -representação

Agora queremos mostrar que a Φ_S -representação expressa qualquer função inteira. Seguindo o teorema de Whittaker, para mostrar que Φ_S representa, na totalidade de \mathbb{C} , qualquer função inteira, é suficiente mostrar que se $\varphi_i(z) = p_{i0} + p_{i1}z + \dots + p_{ii}z^i$, então existem

uma constante $C > 1$ de modo que $\left| \frac{p_{ij}}{p_{ii}} \right| < C$, então pelo Teorema de Whittaker, o conjunto $\{p_{i,i}^{-1} \varphi_i(z)\}$ representa, na totalidade de \mathbb{C} qualquer função inteira, ou seja, existem e são únicos c_0, c_1, c_2, \dots em \mathbb{C} tais que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_{n,n}^{-1} \varphi_n(z), \forall z \in \mathbb{C}$$

E segue a existência da representação. Desse modo

$$\frac{1}{p_{ii}} \varphi_i(z) = \begin{cases} z \prod_{k=1}^n (z^2 - \frac{1}{k^2}), & \text{se } i = 2n + 1, n \geq 0, \\ z(z - \frac{1}{n}) \prod_{k=1}^{n-1} (z^2 - \frac{1}{k^2}), & \text{se } i = 2n, n \geq 1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Desse modo, basta mostrar que coeficientes de $\prod_{k=1}^n (z^2 - \frac{1}{k^2})$ são limitados $\forall n$. De fato

$$\prod_{k=1}^n (z^2 - \frac{1}{k^2}) = q_{n0} + q_{n2}z^2 + \dots + q_{n2n-2}z^{2n-2} + z^{2n},$$

temos que

$$|q_{n2n-2}| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6},$$

e também

$$\begin{aligned} |q_{n2n-2j}| &= \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_l \leq n} \frac{1}{(k_1 \dots k_j)^2} \\ &\leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_{l-1} \leq n} \frac{1}{(k_1 \dots k_j)^2} \\ &< \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) |q_{n2n-2(j-1)}| < |q_{n2n-2(j-1)}|. \end{aligned}$$

Pelo anterior, tem-se que $\left| \frac{p_{ij}}{p_{ii}} \right| < \frac{\pi^2}{6}$, logo, pelo Teorema de Whittaker, temos que Φ_S representa, na totalidade de \mathbb{C} , qualquer função inteira. A unicidade dos coeficientes c_n decorre do fato de que $c_0 = f(0), c_1 = f(1) - c_0, c_2 = f(-1) - c_0 - c_1 \varphi_1(-1)$, e assim sucessivamente, provando a unicidade dos coeficientes c_n .

Teorema principal

Teorema 3.5.4. *Não existe função inteira transcendente $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e*

$$\text{den}(f(p/q)) = O(q)$$

$\forall p/q \in \mathbb{Q}$, com q suficientemente grande.

Mostraremos que não existe função inteira transcendente nas condições do teorema 3.5.4 buscando contradições com as propriedades aritméticas relativas às funções inteiras e utilizando que uma função f inteira é algébrica se, e somente, se é um polinômio. O próximo lema nos dá informações a respeito dos coeficientes $\psi_{n,k}$ em (3.8) e (3.9)

Lema 3.5.2. *Seja $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$, então $\psi_{n,k} \in \mathbb{Q}$. Além disso,*

$$\text{den}(\psi_{n,k}) \mid \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor^n$$

Demonstração. Como

$$\psi_{n,k} = - \sum_{j=1}^k \varphi_{n-j} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \right) \psi_{n-j,k-j}$$

e também

$$\varphi_{n-j} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \right) = \left(\frac{\lfloor \frac{n+1-j}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \right)^{n+1-j} \varphi_{n-j}^* \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \right),$$

onde

$$\varphi_{n-j}^* \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \right) \in \mathbb{Z}$$

Provemos por indução em n . se $n = 0$, então $\psi_{0,0} = 1$, logo o lema vale para $n = 0$. suponhamos que o lema seja válido para todo $\psi_{m,k}$, com $0 \leq m \leq n-1$ e para todo $0 \leq k \leq m$. logo, para $j \geq 1$, temos

$$\text{den}(\psi_{n-j,k-j}) \mid \left\lfloor \frac{n-j+1}{2} \right\rfloor^{n-1},$$

ou seja, o numerador $\varphi_{n-j} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \right)$ cancela com o denominador de $\text{den}(\psi_{n-j,k-j})$. Logo

$$\text{den}(\psi_{n,k}) \mid \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor^n$$

□

Prova do teorema principal

Demonstração. Suponha que $f(z)$ é uma função inteira satisfazendo $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$, $\text{den}(f(p/q)) = O(q)$, para todo $p/q \in \mathbb{Q}$, com q suficientemente grande. Pelo Teorema 3.5.3 $f(z)$ tem uma

Φ_S -representação, ou seja, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(z)$. E também, pelo lema 3.5.2, temos que

$$c_n = \sum_{k=0}^n \psi_{n,n-k} f(\alpha_k), n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

onde $\alpha_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}$. Por hipótese existe $C \in \mathbb{Z}_{>0}$ uma constante tal que

$$\text{den} \left(f \left(\frac{(-1)^{k+1}}{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \right) \right) \leq C \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$$

pelo lema 3.5.2,

$$\text{den}(\psi_{n,k}) \mid \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor^n$$

Daí temos que, ou $c_n = 0$ para todo n suficientemente grande (e $f(z)$ é um polinômio), ou

$$|c_n| \geq \frac{1}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor^n d_n},$$

com $d_n = \text{mmc}(1, 2, 3, \dots, C \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)$. Contudo, é uma consequência do Teorema do número primo que $d_n \sim 3^{C \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ [26]. Portanto, concluímos que, ou $c_n = 0$ para n suficientemente grande, ou

$$|c_n| \geq \frac{1}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor^n \rho^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \quad (3.16)$$

com $\rho = 3^C$.

Por outro lado, $f(z)$ é inteira, logo $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(R)$ é absolutamente convergente para todo $R > 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n \varphi_n(R)|} = 0$$

de (3.12) e (3.13), segue que

$$|c_n| \leq \frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor^n (R-1)^n} < \frac{2^n}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor^n (R-1)^n} < \frac{1}{(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \frac{R-1}{2})^n} \quad (3.17)$$

Como (3.16) e (3.17) não podem ser simultaneamente verdadeiras para infinitos n , concluímos que $c_n = 0$ para todo n suficientemente grande, logo $f(z)$ é um polinômio, logo, não é uma função transcendente.

□

Ao mostrar que não existe função inteira transcendente $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $\text{den}(f(p/q)) = O(q)$, $\forall p/q \in \mathbb{Q}$, com q suficientemente grande, vamos na direção do problema ainda em aberto referente a existência de uma função nas mesmas condições, porém, da ordem de q^v com $v > 1$, pois para o caso $v < 1$ não existe uma função (demostrado por Silva [16]). A dificuldade de mostrar a inexistência de tal função para o caso $v > 1$ é que a limitação inferior, estudada neste trabalho, para a norma dos coeficientes c_n , no caso c_n diferente de zero, é insuficiente para garantir a convergência da série na totalidade de \mathbb{C} . Pois teríamos que calcular o $\text{mmc}(1, 2, 3, \dots, C \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor^v)$, o que não é mais da forma ρ^n , para algum ρ fixo. Como o é para $v = 1$. É possível que, melhorando a estimativa para as normas dos coeficientes c_n , seja possível provar a inexistência de tais funções. Outra possibilidade é considerar outro conjunto $S = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ para mudar a Φ_S -representação, pois, para um conjunto onde $\text{den}(\alpha_n)$ cresça de forma mais lenta, é possível que a estimativa de $|\alpha_n|$ seja mais conveniente.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Baker. Transcendental number theory. Cambridge university press, 2022.
- [2] G. Faber. Über arithmetische eigenschaften analytischer funktionen. *Mathematische Annalen*, 58(4):545–557, 1904.
- [3] D. G. Figueiredo. Números irracionais e transcendentos. 3a edição. Coleção Iniciação Científica, SBM, Rio de Janeiro, 2002.
- [4] A. Gelfond. Sur le septieme probleme de hilbert. . . , (4):623–634, 1934.
- [5] C. Hermite. Sur la fonction exponentielle. 1874.
- [6] J. C. d. A. Lelis. Sobre números de Liouville e funções transcendentos. 2018.
- [7] J. Liouville. Sur des classes tres-etendues de quantites dont la valeur n'est ni algebrigue ni meme reductible a des irrationnelles algebriques. *CR Acad. Sci. Paris*, 18:883–885, 1844.
- [8] K. Mahler. Lectures on transcendental numbers, volume 546. Springer, 2006.
- [9] E. Maillet. Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions. Gauthier-Villars, 1906.
- [10] D. Marques. O problema de Lang e uma generalização dos teoremas de Stäckel. PhD thesis, Ph. D thesis, Universidade de Brasília, 2009.
- [11] D. Marques. Teoria dos números transcendentos. SBM, 2013.
- [12] D. Marques and C. G. Moreira. On a variant of a question proposed by k. mahler concerning liouville numbers. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 91(1):29–33, 2015.

- [13] D. Marques and C. G. Moreira. A positive answer for a question proposed by k. mahler. *Mathematische Annalen*, 368(3):1059–1062, 2017.
- [14] D. Marques and C. G. Moreira. A note on a complete solution of a problem posed by k. mahler. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 98(1):60–63, 2018.
- [15] T. Schneider. *Transzendenzuntersuchungen periodischer funktionen i. transzendenz von potenzen*. 1935.
- [16] E. C. d. S. Silva. *Alguns problemas de mahler sobre funções transcendentas e resultados relacionados*. 2019.
- [17] P. Stäckel. Ueber arithmetische eigenschaften analytischer functionen. *Mathematische Annalen*, 46(4):513–520, 1895.
- [18] P. Stäckel. Arithmetische eigenschaften analytischer functionen. *Acta Mathematica*, 25(1):371–383, 1902.
- [19] Huang, J., Marques, D., Mereb, M. Algebraic values of transcendental functions at algebraic points. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 82(2), 322-327, 2010.
- [20] Marques, D. The solution of a version of a Mahler’s question. *Journal of Number Theory*, 163, 510-519, 2016.
- [21] Popken, J. Zur Transzendenz von e. *Mathematische Zeitschrift*, 29(1), 525-541, 1929.
- [22] Schmidt, W. *T*-numbers do exist, *Symposia Math.* 6 (1970) 3-26.
- [23] Whittaker, J. M. (1935). *Interpolatory function theory* (No. 33). The University Press.
- [24] Levin, B. Y. (1996). *Lectures on entire functions* (Vol. 150). American Mathematical Soc..
- [25] Eweida, M. T. (1950). On the convergence properties of basic series representing integral functions. In *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt* (Vol. 4, pp. 31-38).
- [26] Beukers, F. (2004). A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$. In *Pi: A Source Book* (pp. 434-438). Springer, New York, NY.

- [27] Marques, D., e Moreira, C. G. (2015). On a variant of a question proposed by K. Mahler concerning Liouville numbers. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 91(1), 29-33.
- [28] Makar, R., e Fawzy, L. (1973). Order and type of basic sets of polynomials associated with functions of algebraic semi block matrices. *Periodica Mathematica Hungarica*, 4(2-3), 207-215.