



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE FÍSICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS**

Álvaro Alves dos Santos Neto

**Boa colocação e análise de estabilidade de uma Ponte suspensa
com cabo termo elástico**

**SALINÓPOLIS-PA
MAIO/2026**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE FÍSICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS

Álvaro Alves dos Santos Neto

**Boa colocação e análise de estabilidade de uma Ponte suspensa
com cabo termo elástico**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Física, Campus Salinópolis da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado pleno em Física.

Área de Concentração: Equações Diferenciais Parciais

Orientador: Prof. Dr. LUIZ GUTEMBERG ROSARIO MIRANDA - Universidade Federal do Pará

SALINÓPOLIS-PA

Maio/2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE FÍSICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS

Álvaro Alves dos Santos Neto

**Boa colocação e análise de estabilidade de uma Ponte suspensa
com cabo termo elástico**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Física, Campus Salinópolis da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado pleno em Física.

Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **LUIZ GUTEMBERG ROSÁRIO MIRANDA**
Data: 03/06/2026 18:05:53-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Luiz Gutemberg Rosário Miranda (Orientador)
UFPA/Salinópolis

Documento assinado digitalmente
 **EDINALDO TEIXEIRA**
Data: 03/06/2026 13:46:32-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof Dr. Edinaldo Teixeira (Membro interno)
UFPA/Salinópolis

Documento assinado digitalmente
 **LINDOMAR MIRANDA RIBEIRO**
Data: 02/06/2026 11:03:15-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro (Membro interno)
UFPA/Salinópolis

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por que sem Ele jamais teria conseguido chegar até aqui. Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Luiz Gutemberg, pela inestimável orientação, paciência e incentivo durante todo o processo de elaboração deste trabalho. Sua expertise e dedicação foram fundamentais para a superação dos desafios encontrados. À minha família, em especial aos meus pais, pelo apoio incondicional, amor e por todos os sacrifícios feitos para que eu pudesse concluir esta etapa da minha vida.

Resumo

Consideramos um sistema de ponte suspensa de comprimento l onde os cabos de suspensão sofrem efeitos termo-elástico. A teoria que modela matematicamente as pequenas flexões na vigas do tabuleiro é a teoria de Timoshenko modela o tabuleiro. Utilizamos a teoria de semigrupos. A existência e unicidade da solução são obtidas pelo teorema de Lumer-Phillips. Para o comportamento assintótico, apresentamos, sob certas restrições, uma condição necessária e suficiente para garantir a estabilidade exponencial. Contudo, em um caso específico, não observamos decaimento exponencial, independentemente da relação entre os coeficientes do sistema; nesse caso, provamos o decaimento polinomial.

Palavras-chave: Ponte suspensa; viga de Timoshenko; equações diferenciais parciais; teorema de Lummer-Phillips.

Abstract

We consider a suspension bridge system of length l where the suspension cables are subject to thermoelastic effects. The theory that mathematically models the small bends in the deck beams is Timoshenko's theory, which models the deck. We use semigroup theory. The existence and uniqueness of the solution are obtained using the Lumer-Phillips theorem. For the asymptotic behavior presented, under certain restrictions, a necessary and sufficient condition is required to guarantee exponential stability. However, in a specific case, we do not observe exponential decay, regardless of the relationship between the system coefficients; in this case, we prove polynomial decay.

Key-words: Suspension bridge; Timoshenko-Enrenfest beam; Partial differential equations; Lumer-Phillips Theorem.

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Espaços Hilbert	5
1.1.1 Espaços de Hilbert mais uasados	7
1.1.2 Desigualdades notáveis	8
1.2 Transformações lineares limitadas	9
1.3 Operador dissipativo e operador resolvente	10
1.4 Teoremas de Lax-Milgram e da regularidade elíptica	10
1.5 Teoria de Semigrupo	11
2 Configuração de semigrupos	14
2.1 Funcional Energia do sistema	14
2.2 Hipóteses e problema de Cauchy	17
3 Boa colocação do problema	20
4 Análise de estabilidade	35
4.1 Lemas Técnicos	35
4.2 Estabilidade exponencial	41
4.3 Estabilidade polinomial	44
5 Conclusões e trabalhos futuros	46
Referências	46

Introdução

Desde os primórdios da civilização, a necessidade de transpor obstáculos naturais como rios, vales e desfiladeiros impulsionou o ser humano a desenvolver diferentes tipos de pontes. Entre essas soluções, destacam-se as pontes suspensas, que, ao longo da história, evoluíram de estruturas rudimentares para verdadeiras obras-primas da engenharia moderna.

As primeiras pontes suspensas surgiram de maneira simples e empírica, muitas vezes construídas com cordas, cipós e madeira. Povos antigos, especialmente em regiões montanhosas como os Andes e partes da Ásia, utilizavam materiais naturais para criar passagens estreitas e flexíveis, sustentadas por cabos presos às margens. Essas estruturas, embora frágeis, demonstravam um importante princípio físico: a capacidade de distribuir o peso por meio da tração. Com o avanço das técnicas construtivas e o desenvolvimento de novos materiais, como o ferro e posteriormente o aço, as pontes suspensas passaram por uma significativa transformação. Durante os séculos XVIII e XIX, com a Revolução Industrial, esse tipo de ponte ganhou destaque por permitir a construção de vãos mais longos e resistentes, tornando-se essencial para o crescimento urbano e o transporte.



Figura 1: Ponte Çanakkale 1915

Atualmente os avanços obtidos pela engenharia permitem que sejam construídas estruturas cada vez mais longas e seguras. Este é o caso da ponte Ponte 1915, (Figura 1), a maior ponte suspensa do mundo que está localizada na Turquia, com um vão principal de 2.023 metros, que conecta a Europa e a Ásia sobre o Estreito de Dardanelos. Esta ponte foi inaugurada em março de 2022, ela superou a ponte anteriormente recordista, a Ponte Akashi-Kaikyo no Japão, (Figura 2), que tinha um vão de 1.991 metros.



Figura 2: Ponte Akashi-Kaikyo

Porém o que mais impressiona nestas estruturas não são suas dimensões faraônicas, mas sim a alta tecnologia usada na sua construção e manutenção, entre elas os mecanismos estabilizadores, por exemplo, molas e pêndulos, aplicados localmente na ponte para minimizar as oscilações produzidas por ventos, tremores ou maremotos. (Figura 3)

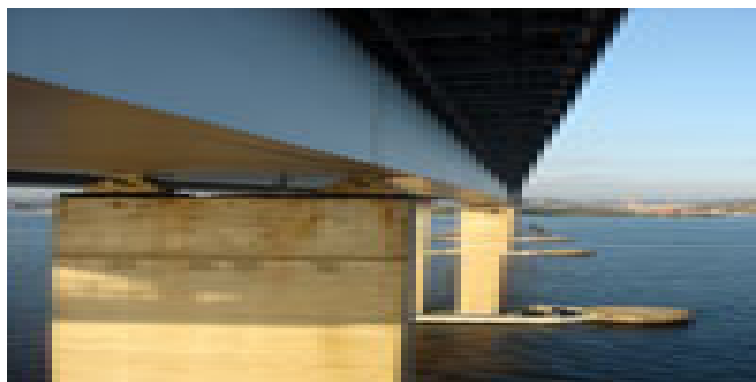


Figura 3: Mecanismos estabilizadores

No dia 7 de novembro de 1940 aconteceu o colapso da ponte Tacoma Narrows, localizada nos Estados Unidos (ver Figura 4). Esse acontecimento mudou a visão sobre problemas oscilatórios.



Figura 4: Colapso da ponte Tacoma Narrows

Tendo sido inaugurada em Julho do mesmo ano, após ser atingida por ventos com velocidade de cerca de 70km/h a ponte caiu. Entretanto, a queda da ponte Tacoma Narrows não ocorreu devido à ressonância mecânica, mas à um efeito aeroelástico chamado flutter (quando uma superfície de sustentação apresenta característica oscilatória auto-excitada a partir de uma determinada velocidade). Devido a esta catástrofe, os estudos sobre problemas oscilatórios em estruturas de vigas intensificaram-se bastante.

Apresentamos um modelo de uma ponte suspensa, conforme ilustrado na Figura 5, concebida como uma estrutura mecânica que suporta cargas verticais através dos cabos principais, modelados por uma corda elástica $u = u(x, t)$, a qual é acoplada ao tabuleiro por meio de cabos de suspensão, onde x representa a distância ao longo da linha central do tabuleiro em sua configuração de equilíbrio e t a variável de tempo.

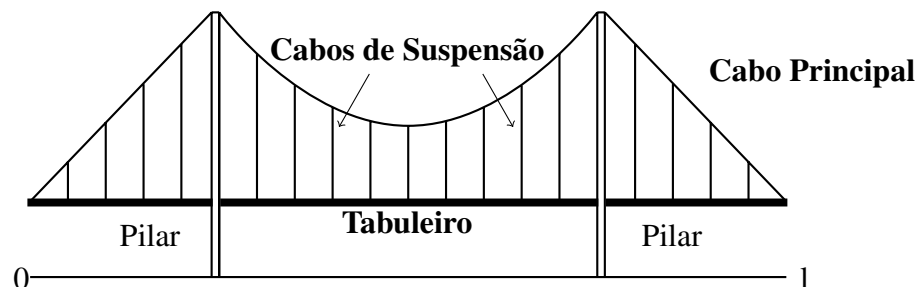


Figura 5: Ponte Suspensa. Esta figura é encontrada na referência [5].

Em 1945, Timoshenko publicou um trabalho sobre pontes suspensas, intitulado “The Theory of Suspension Bridges” (ver [13]). Deste trabalho, obtemos um modelo matemático unidimensional dado por

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) = 0, \text{ em } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) = 0, \text{ em } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \text{ em } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (3)$$

onde, denotamos por $\varphi = \varphi(x, t)$ o deslocamento da seção transversal no ponto $x \in (0, l)$, e por $\psi = \psi(x, t)$ o ângulo de rotação da seção transversal e as constantes $\alpha, \lambda, \rho_1, \rho_2, \kappa$ e b são constantes positivas.

Uma ponte suspensa com amortecimento interno foi considerada em [5], onde Raposo et al. obtiveram que a solução não apenas decai exponencialmente, mas também é analítica, posteriormente, Gutemberg et al. em [10] analisaram o mesmo sistema realizando uma análise mais completa e descobriram a falta estabilidade exponencial para algumas situações. Sobre o uma ponte suspensa, temos o trabalho de [12], onde os autores analisaram um sistema de viga térmica de Timoshenko com tirantes e amortecimento do tipo Kelvin-Voigt, onde a lei de Cattaneo fornecia o calor. Mas recentemente, temos o trabalho de Gutemberg et al. em [11] onde os autores analisaram uma ponte suspensa sob o efeito térmico atuando na força de cisalhamento do tabuleiro.

Neste trabalho, consideraremos uma ponte suspensa, onde os cabos sofrem o efeito térmico. Para representar essa dinâmica térmica usaremos o lei de Fourier. Assim, temos o seguinte sistema

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma \theta_x = 0, \text{ em } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (4)$$

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) = 0, \text{ em } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (5)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \mu \psi_t = 0, \text{ em } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (6)$$

$$\theta_t - \delta \theta_{xx} + \gamma u_{tx} = 0, \text{ em } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (7)$$

onde $\theta = \theta(x, t)$ representa a temperatura atuando no cabo e as constantes γ, μ e δ são positivas. Consideramos também, as seguintes condições de contorno

$$u(0, t) = u(l, t) = \varphi(0, t) = \varphi(l, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(l, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

e as seguintes condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad u_t(x, 0) = u_1(x); \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x); \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x \in (0, l), \quad (9)$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x); \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x); \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad x \in (0, l). \quad (10)$$

Para este modelo, nosso objetivo é mostrar a boa colocação da solução e realizar uma análise de comportamento assintótico.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, colocamos as definições, propriedades e resultados mais relevantes de Análise funcional que contribuirão como suporte para que este trabalho seja bem desenvolvido.

1.1 Espaços Hilbert

Nesta seção, estamos interessados em estabelecer a definição adequada dos espaços de Hilbert, estes são de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Definição 1.1. *Seja X um espaço vetorial. Dizemos que a função*

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned}$$

é uma métrica, quando para quaisquer $x, y, z \in X$ tem-se que

- (i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- (ii) $d(x, y) > 0$ sempre que $x \neq y$;
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Além disso, $X = (X, d)$ é chamado espaço métrico com a métrica d .

Definição 1.2. *Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico X . Dizemos que (x_n) converge para x , quando*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n \geq n_0 \implies d(x_n, x) < \epsilon.$$

Em caso afirmativo, isto é, denotamos a convergência por

$$x_n \rightarrow x \in X.$$

Definição 1.3. O fecho de um espaço métrico X é o conjunto de todos os pontos x para o qual existe uma sequência (x_n) em X tal que $x_n \rightarrow x$. Tal conjunto é denotado por $\overline{X}$.

Definição 1.4. Sejam os espaços métricos X e Y tal que $X \subset Y$. Dizemos que X é denso em Y quando, tem-se que $\overline{X} = Y$.

Definição 1.5. Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico X . Dizemos que (x_n) é de Cauchy em X , quando

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n, m \geq n_0 \implies d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Definição 1.6. Seja o espaço métrico X . Dizemos que X é um espaço métrico completo quando, toda sequência de Cauchy (x_n) em X converge em X .

Definição 1.7. Seja X um espaço vetorial. Dizemos que a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_X : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|_X \end{aligned}$$

é uma norma, quando para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tem-se

- (i) $\|x\|_X \geq 0$ e $\|x\|_X = 0 \iff x = 0$;
- (ii) $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \|x\|_X$;
- (iii) $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$.

Além disso, $X = (X, \|\cdot\|_X)$ é chamado espaço normado munido da norma $\|\cdot\|_X$.

Observação 1.1. Toda norma $\|\cdot\|_X$ em X induz uma métrica em X , dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|_X.$$

Definição 1.8. Seja o espaço normado X . Dizemos que X é um espaço de Banach, quando este é um espaço completo na métrica $d(x, y) = \|x - y\|_X$.

Definição 1.9. Seja X um espaço vetorial. Dizemos que a função

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_X : X \times X &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle_X \end{aligned}$$

é um produto interno, quando para quaisquer $x, y, z \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tem-se

$$(i) \langle x, y \rangle_X = \overline{\langle y, x \rangle_X};$$

$$(ii) \langle \lambda x, y \rangle_X = \lambda \langle x, y \rangle_X;$$

$$(iii) \langle x + y, z \rangle_X = \langle x, z \rangle_X + \langle y, z \rangle_X;$$

$$(iv) \langle x, x \rangle_X \geq 0 \text{ e } \langle x, x \rangle_X = 0 \iff x = 0.$$

Além disso, $X = (X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ é chamado espaço munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$.

Definição 1.10. Seja X um subespaço vetorial de um espaço H munido com produto interno. O complemento ortogonal de X em relação a H é o conjunto

$$X^\perp = \{u \in H; \langle u, x \rangle_H = 0, \forall x \in X\}$$

Proposição 1.1. Seja X um subespaço vetorial de um espaço de Hilbert H . Então X é denso em H se, e somente se, $X^\perp = \{0\}$.

Observação 1.2. Todo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ em X induz uma norma em X , dada por

$$\|x\|_X = \sqrt{\langle x, x \rangle_X}.$$

Por outro lado, tem norma em X que não induz um produto interno em X .

Definição 1.11. Seja o espaço de Banach H . Dizemos que H é um espaço de Hilbert quando $\|\cdot\|_H$ induz um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$.

1.1.1 Espaços de Hilbert mais usados

1. **Espaço $L^2(0, l)$.** Definimos $L^2(0, l)$ como o espaço de hilbert das funções mensuráveis $f : (0, l) \rightarrow \mathbb{C}$ cujo o quadrado do valor absoluto é Lebesgue integrável, isto é, se $f \in L^2(0, l)$, então

$$\int_0^l |f(x)|^2 dx < \infty$$

munido com o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^l f(x) \overline{g(x)} dx,$$

onde $\overline{g(x)}$ é o conjugado de $g(x)$. Este produto interno é induzido pela norma

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^l |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. **Espaço** $L_*^2(0, l)$. Definimos $L_*^2(0, l)$ como o espaço de hilbert das funções que pertencem ao $L^2(0, l)$ e tem média nula, isto é, se $f \in L_*^2(0, l)$, então $f \in L^2(0, l)$ e $\int_0^l f(x)dx = 0$. $L_*^2(0, l)$ está munido com o mesmo produto interno de $L^2(0, l)$.

3. **Espaço** $H^m(0, l)$. Definimos $H^m(0, l)$, com $m \geq 1$, sendo o espaço de hilbert das funções que estão em $L^2(0, l)$ tais que suas derivadas de até a ordem m também estejam em $L^2(0, l)$. Este espaço está munido com o produto interno

$$\langle f, g \rangle_{H^m} = \langle f, g \rangle + \langle f', g' \rangle + \cdots + \langle f^{(m)}, g^{(m)} \rangle$$

induzido pela norma

$$\|f\|_{H^m} = \left(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 + \cdots + \|f^{(m)}\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $f^{(m)}$ representa a derivada de ordem m .

4. **Espaço** $H_0^1(0, l)$. Definimos $H_0^1(0, l)$, o espaço de hilbert das funções que pertencem $H^1(0, l)$ e se anula nas extremidades do intervalo $(0, l)$, munido com o produto interno

$$\langle f, g \rangle_{H_0^1} = \langle f', g' \rangle$$

induzido pela norma

$$\|f\|_{H_0^1} = \|f'\|_2.$$

5. **Espaço** $H_*^1(0, l)$. Definimos $H_*^1(0, l) = H^1(0, l) \cap L_*^2(0, l)$, munido com o produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle_{H_*^1} = \langle f, g \rangle_{H_0^1}.$$

1.1.2 Desigualdades notáveis

(i) Desigualdade de Cauchy-schwartz

Seja H um espaço de Hilbert. Se $f, g \in H$, então

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_H \|g\|_H.$$

(ii) **Desigualdade de Young**

Se a e b são constantes não negativas, então para todo $\epsilon > 0$ tem-se que

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2.$$

(iii) **Desigualdade de Poincaré**

Se $f \in H_0^1(0, l)$ ou $f \in H_*^1(0, l)$ então existe $\lambda_1 > 0$ tal que

$$\lambda_1 \|f\|_2^2 \leq \|f_x\|_2^2,$$

onde $\lambda_1 > 0$ é a constante de Poincaré (o menor autovalor de $-\partial_{xx}$).

1.2 Transformações lineares limitadas

Nesta seção, citaremos algumas definições e resultados importantes da análise funcional, estes contribuirão de maneira essencial para o bom desenvolvimento deste trabalho. Para maiores detalhes e demonstrações, remetemos o leitor às referências clássicas [3, 4, 8].

Definição 1.12. *Sejam os espaços vetoriais X e Y . Dizemos que $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ é uma transformação linear quando, dados $u, v \in X$ e $a \in \mathbb{C}$ tem-se que*

$$\mathcal{A}(au + v) = a\mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v).$$

Por outro lado, dizemos que $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ é uma transformação antilinear quando, dados $u, v \in X$ e $a \in \mathbb{C}$ tem-se que

$$\mathcal{A}(au + v) = \bar{a}\mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v),$$

onde $\bar{a}$ é o conjugado de $a \in \mathbb{C}$.

Além disso, quando $X \subset Y$, a transformação é chamada de operador e quando $Y = \mathbb{C}$, a transformação é chamada de funcional.

Definição 1.13. *Sejam os espaços vetoriais métricos X e Y . Dizemos que uma transformação $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ é contínua em um ponto $u \in X$ se, para toda sequência (u_n) em X tal que $u_n \rightarrow u$ tem-se que $\mathcal{A}(u_n) \rightarrow \mathcal{A}(u)$.*

Definição 1.14. *Sejam os espaços vetoriais normados X e Y . Dizemos que uma transformação $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ é limitada quando, existe $M > 0$ tal que*

$$\|\mathcal{A}(u)\|_Y \leq M\|u\|_X, \quad \text{para todo } u \in X.$$

Lema 1.1. *Sejam os espaços vetoriais normados X e Y . Se $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ é uma transformação linear (ou antilinear) limitada. Então, $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ é contínuo.*

Teorema 1.1. *Sejam X e Y espaços de Banach e $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ uma transformação linear contínua. Se $\mathcal{A}$ é bijetiva, então, a inversa $\mathcal{A}^{-1} : Y \rightarrow X$ é contínua.*

Definição 1.15. *Definimos $\mathcal{L}(X, Y)$ o conjunto de todas as transformações lineares limitadas.*

Lema 1.2. *A função $\|\cdot\|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|u\|_X \leq 1} \{\|\mathcal{A}(u)\|_Y\},$$

onde $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ define uma norma em $\mathcal{L}(X, Y)$.

Portanto, $\mathcal{L}(X, Y) = (\mathcal{L}(X, Y); \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ é um espaço normado.

Definição 1.16. *Chamamos de dual topológico o espaço normado $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$.*

1.3 Operador dissipativo e operador resolvente

Definição 1.17. *Seja H um espaço de hilbert. O operador linear $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$ é denominado dissipativo quando*

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}u, u \rangle_H \leq 0,$$

onde $\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}u, u \rangle_H$ representa a parte real do complexo $\langle \mathcal{A}u, u \rangle_H$.

Definição 1.18. *Sejam H um espaço de hilbert, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$ um operador linear e $\beta \in \mathbb{C}$. Chamamos o operador linear $(\beta I - \mathcal{A}) : D(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$ de operador resolvente de $\mathcal{A}$. O número complexo β será denominado valor regular de $\mathcal{A}$ quando:*

- i) $\beta I - \mathcal{A}$ é sobrejetivo;
- ii) A inversa à direita $(\beta I - \mathcal{A})^{-1}$ é contínuo. O conjunto de todos os valores regulares é chamado resolvente de $\mathcal{A}$ e o denotamos por $\varrho(\mathcal{A})$.

1.4 Teoremas de Lax-Milgram e da regularidade elíptica

Definição 1.19. *Sejam X um espaço vetorial. O operador $\mathcal{B} : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ é uma forma sesquilinear se for linear na primeira entrada e antilinear na outra. Isto é, fixando $x \in X$, temos que $\mathcal{B} : x \times X \rightarrow \mathbb{C}$ é linear e $\mathcal{B} : X \times x \rightarrow \mathbb{C}$ é antilinear.*

Definição 1.20. Sejam H um espaço de Hilbert e $\mathcal{B} : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear. Dizemos que $\mathcal{B}$ é coerciva quando existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\mathcal{B}(u, u)| \geq C\|u\|_H^2, \quad \text{para todo } u \in H.$$

Além disso, $\mathcal{B}$ é contínua quando existe um $C > 0$ tal que

$$|\mathcal{B}(u, v)| \leq C\|u\|_H\|v\|_H, \quad \text{para todo } u, v \in H.$$

Teorema 1.2 (Lax-Milgram). Se $\mathcal{B} : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ é uma forma sesquilinear contínua e coerciva e $\mathcal{F} : H \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional antilinear contínuo, com H um espaço de Hilbert. Então a equação

$$\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{F}(v), \quad \text{para todo } v \in H,$$

possui uma única solução $u \in H$.

Teorema 1.3 (Regularidade Elíptica). Seja $u \in H^1(0, l)$ uma solução fraca da equação $-u_{xx}(x) = f(x)$ em $0, l$. Se $f \in L^2(0, l)$, então $u \in H^2(0, l)$

Corolário 1.1. Seja $u \in H_0^1(0, l)$ uma solução fraca da equação $-u''(x) = f(x)$ em $0, l$. Se $f \in L^2(0, l)$, então $-u''(x) = f(x)$ no sentido quase sempre.

Corolário 1.2. Seja $u \in H_*^1(0, l)$ uma solução fraca da equação $-u''(x) = f(x)$ em $0, l$. Se $f \in L_*^2(0, l)$, então $-u''(x) = f(x)$ no sentido quase sempre.

1.5 Teoria de Semigrupo

Neste capítulo, colocamos as definições, propriedades e resultados mais relevantes da Teoria de Semigrupos de Operadores lineares que contribuirão como suporte para que este trabalho seja bem desenvolvido (ver [1]).

Definição 1.21. Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores $S(t) : X \rightarrow X$, $t \in \mathbb{R}_+$ lineares contínuos satisfazendo

$$(i) \quad S(0) = I, \text{ operador identidade;}$$

$$(ii) \quad S(t + s) = S(t) \circ S(s).$$

é chamado de semigrupo.

Definição 1.22. Seja $S(t) : X \rightarrow X$ um semigrupo. O operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$, onde

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \in X \right\} \quad (1.1)$$

definido por

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad (1.2)$$

é chamado de gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)$ definido em X .

Dessa forma, da definição anterior podemos escrever o domínio do operador $\mathcal{A}$ como

$$D(\mathcal{A}) = \{x \in X; \mathcal{A}x \in X\} \quad (1.3)$$

Definição 1.23. Diremos que um semigrupo $S(t)$ é fortemente contínuo, ou C_0 -semigrupo, se

$$\lim_{t \rightarrow 0} S(t)x = x, \quad \forall x \in X. \quad (1.4)$$

Teorema 1.4. Seja $S(t)$ um semigrupo C_0 e $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Se $x \in X$, então

$$\lim_{t \rightarrow t_0} S(t)x = S(t_0)x. \quad (1.5)$$

Além disso, se $x \in D(\mathcal{A})$, então

$$\lim_{t \rightarrow t_0} S'(t)x = S'(t_0)x. \quad (1.6)$$

Este teorema nos diz que, para todo elemento $x \in X$ a função $S(t)x$ é contínua. Isto é,

$$t \mapsto S(t)x \in C(\mathbb{R}_+; X).$$

e, para todo elemento $x \in D(\mathcal{A})$ a função derivada $S'(t)x$ é contínua. Isto é,

$$t \mapsto S(t)x \in C(\mathbb{R}_+; D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}_+; X).$$

Definição 1.24. Diremos que um semigrupo $S(t)$ é de contração quando

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup \left\{ \frac{\|S(t)x\|_X}{\|x\|_X} \mid x \in X \right\} \leq 1.$$

Teorema 1.5. [Teorema da boa colocação] Seja o problema de Cauchy

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t) \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Se $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)$ definido no espaço de Banach X , então $U(t) = S(t)U_0$ é solução única do sistema (1.7) tal que para $U_0 \in X$

$$t \mapsto U(t) \in C(\mathbb{R}_+; X).$$

e, para $U_0 \in D(\mathcal{A})$

$$t \mapsto S(t)x \in C(\mathbb{R}_+; D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}_+; X).$$

Observação 1.3. O espaço de Banach X é também chamado de espaço de fase e, é obtido a parti da definição do funcional energia do problema.

Observação 1.4. Para que o problema (1.7) tenha uma boa colocação basta mostrar que o operador $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$.

Definição 1.25. Dizemos o operador $\mathcal{A}$ é autônomo quando $\mathcal{A}$ não depende de t .

Teorema 1.6 (Teorema de Lummer-Philips). *Seja $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H$, com H hilbert, um operador autonômico. Se $\mathcal{A}$ é linear, dissipativo, com $0 \in \rho(\mathcal{A})$ e domínio denso em H e, então $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t)$.*

Uma vez garantida a boa definição do sistema, estudamos o comportamento assintótico da solução em relação à ausência de decaimento exponencial e aos tipos de estabilização: exponencial ou polinomial. Os estudos relacionados à estabilidade exponencial são baseados no Teorema de Gearhart-Herbst-Prüss-Huang para sistemas dissipativos(ver [6, 7]).

Teorema 1.7 (Gearhart-Herbst-Prüss-Huang). *Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um C_0 -semigrupo de contrações no espaço de Hilbert H . Então $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se, $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ e*

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty, \quad (1.8)$$

where $\rho(\mathcal{A})$ is the resolvent set of the linear operator $\mathcal{A}$.

Por outro lado, para provar a estabilidade polinomial, usamos o Teorema 2.4 em [2].

Teorema 1.8. *Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um C_0 -semigrupo de contrações em um espaço de Hilbert H com gerador $\mathcal{A}$ tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. Então*

$$\frac{1}{|\beta|^\alpha} \|(i\beta - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C, \quad \beta \rightarrow \infty \iff \|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.9)$$

Capítulo 2

Configuração de semigrupos

2.1 Funcional Energia do sistema

Nosso objetivo nesta seção é construir o funcional energia do sistema, pois este, é muito importante para nossas análises, a saber, para a definição do espaço funcional que vamos utilizar. Para este propósito, começamos multiplicando a equação (4) por u_t e integramos na variável x em $[0, l]$, resultando em

$$\int_0^l [u_{tt} - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma \theta_x] u_t dx = 0,$$

onde pela linearidade da integral, obtemos

$$\int_0^l u_{tt} u_t dx - \alpha \int_0^l u_{xx} u_t dx - \lambda \int_0^l (\varphi - u) u_t dx + \gamma \int_0^l \theta_x u_t dx = 0.$$

Aplicando a integração por partes, chegamos à

$$\int_0^l u_{tt} u_t dx - \alpha u_x u_t \Big|_0^l + \alpha \int_0^l u_x u_{tx} dx - \lambda \int_0^l (\varphi - u) u_t dx + \gamma \theta u_t \Big|_0^l - \gamma \int_0^l \theta u_{tx} dx = 0.$$

e usando as condições de contorno, obtemos

$$\int_0^l u_{tt} u_t dx + \alpha \int_0^l u_x u_{tx} dx - \lambda \int_0^l (\varphi - u) u_t dx - \gamma \int_0^l \theta u_{tx} dx = 0. \quad (2.1)$$

Agora, multiplicando a equação (5) por φ_t e integrando na variável x em $[0, l]$, obtemos

$$\int_0^l [\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u)] \varphi_t dx = 0,$$

de onde resulta que

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi_t dx - \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi)_x \varphi_t dx + \lambda \int_0^l (\varphi - u) \varphi_t dx = 0.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi_t dx - \kappa(\varphi_x + \psi) \varphi_t \Big|_0^l + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \varphi_{tx} dx + \lambda \int_0^l (\varphi - u) \varphi_t dx = 0.$$

e usando as condições de contorno, resulta que

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_{tt} \varphi_t dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \varphi_{tx} dx + \lambda \int_0^l (\varphi - u) \varphi_t dx = 0. \quad (2.2)$$

Agora, multiplicando a equação (6) por ψ_t e integrando na variável x em $[0, l]$, obtemos

$$\int_0^l [\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \mu \psi_t] \psi_t dx = 0,$$

de onde chegamos à

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi_t dx - b \int_0^l \psi_{xx} \psi_t dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \mu \int_0^l |\psi_t|^2 dx = 0.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi_t dx - b \psi_x \psi_t \Big|_0^l + b \int_0^l \psi_x \psi_{tx} dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \mu \int_0^l |\psi_t|^2 dx = 0.$$

e usando as condições de contorno, chegamos à

$$\rho_2 \int_0^l \psi_{tt} \psi_t dx + b \int_0^l \psi_x \psi_{tx} dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \mu \int_0^l |\psi_t|^2 dx = 0. \quad (2.3)$$

Por fim, multiplicando a equação (7) por θ e integrando por partes em $[0, l]$, obtemos

$$\int_0^l [\theta_t - \delta \theta_{xx} + \gamma u_{tx}] \theta dx = 0,$$

resultando que

$$\int_0^l \theta_t \theta dx - \delta \int_0^l \theta_{xx} \theta dx + \gamma \int_0^l u_{tx} \theta dx = 0.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$\int_0^l \theta_t \theta dx - \delta (\theta_x) \theta \Big|_0^l + \delta \int_0^l |\theta_x|^2 dx + \gamma \int_0^l u_{tx} \theta dx = 0,$$

e usando as condições de contorno, obtemos

$$\int_0^l \theta_t \theta dx + \delta \int_0^l |\theta_x|^2 dx + \gamma \int_0^l u_{tx} \theta dx = 0. \quad (2.4)$$

Somando as equações (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4), chegamos à

$$\begin{aligned} & \int_0^l u_{tt}u_t dx + \rho_1 \int_0^l \varphi_{tt}\varphi_t dx + \rho_2 \int_0^l \psi_{tt}\psi_t dx + \int_0^l \theta_t \theta dx + \alpha \int_0^l u_x u_{tx} dx \\ & + \lambda \int_0^l (\varphi - u)(\varphi - u)_t dx + \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi)(\varphi_x + \psi)_t dx + b \int_0^l \psi_x \psi_{tx} dx \\ & + \mu \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \delta \int_0^l |\theta_x|^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Usando a identidade $f_t f = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [f^2]$, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^l |u_t|^2 dx + \rho_1 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \rho_2 \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \int_0^l |\theta|^2 dx + \alpha \int_0^l |u_x|^2 dx \right. \\ & \quad \left. + \lambda \int_0^l |\varphi - u|^2 dx + \kappa \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx + b \int_0^l |\psi_x|^2 dx \right) \\ & \quad + \mu \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \delta \int_0^l |\theta_x|^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Portanto, definimos a energia total associada ao sistema como

$$\begin{aligned} E(t) := & \frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx \\ & + \frac{b}{2} \int_0^l |\psi_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |\theta|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^l |\varphi - u|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

E, concluimos que a energia total satisfaz a lei de de dissipação dada por

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\mu \int_0^l |\psi_t|^2 dx - \delta \int_0^l |\theta_x|^2 dx \leq 0, \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

Integrando a desigualdade acima sobre o intervalo $(0, t)$, para todo $t \geq 0$ obtemos

$$\int_0^t \frac{d}{dt} E(s) ds \leq \int_0^t 0 ds, \quad t \geq 0, \quad (2.7)$$

implicando que

$$E(s)|_0^t \leq 0, \quad t \geq 0, \quad (2.8)$$

logo,

$$E(t) - E(0) \leq 0, \quad t \geq 0, \quad (2.9)$$

e chegamos à

$$E(t) \leq E(0), \quad t \geq 0, \quad (2.10)$$

isto é, a energia total, e consequentemente a solução do sistema, tende a se estabilizar com o passar do tempo. Dessa forma, é importante analisar qual o tipo de estabilidade que está acontecendo.

2.2 Hipóteses e problema de Cauchy

Para analisarmos a existência e unicidade de solução e, posteriormente, a estabilidade do sistema (4)–(10), utilizaremos a Teoria de Semigrupos. Inicialmente, definimos o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$ por

$$\mathcal{H}_1 := [H_0^1(0, l) \times L^2(0, l)]^2 \times H_*^1(0, l) \times L_*^2(0, l) \times L_*^2(0, l), \quad (2.11)$$

munido do seguinte produto interno

$$\begin{aligned} \langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}_1} = & \langle v, \tilde{v} \rangle + \alpha \langle u_x, \tilde{u}_x \rangle + \rho_1 \langle \Phi, \tilde{\Phi} \rangle + \rho_2 \langle \Psi, \tilde{\Psi} \rangle + b \langle \psi_x, \tilde{\psi}_x \rangle \\ & + \lambda \langle (\varphi - u), (\tilde{\varphi} - \tilde{u}) \rangle + k \langle (\varphi_x + \psi), (\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) \rangle + \langle \theta, \tilde{\theta} \rangle, \end{aligned}$$

onde $U = (u, v, \varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)'$ e $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\varphi}, \tilde{\Phi}, \tilde{\psi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\theta})'$. Além disso, este produto interno é induzido pela norma

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 &= \langle U, U \rangle_{\mathcal{H}_1} \\ &= \|v\|_2^2 + \alpha \|u_x\|_2^2 + \rho_1 \|\Phi\|_2^2 + \rho_2 \|\Psi\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 + \lambda \|\varphi - u\|_2^2 + k \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \|\theta\|_2^2. \end{aligned}$$

Lema 2.1. *Sejam $\varphi \in H_0^1(0, l)$ e $\psi \in H_*^1(0, l)$. Existe uma constante positiva κ_0 tal que*

$$\|\varphi_x\|_2^2 \leq \kappa_0 (b \|\psi_x\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2). \quad (2.12)$$

Demonstração:

Note que

$$\|\varphi_x + \psi\|_2^2 = \langle \varphi_x + \psi, \varphi_x + \psi \rangle = \|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi\|_2^2 + \langle \varphi_x, \psi \rangle + \langle \psi, \varphi_x \rangle.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos

$$\|\varphi_x + \psi\|_2^2 \geq \|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi\|_2^2 - 2\|\varphi_x\|_2 \|\psi\|_2 = \|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi\|_2^2 - \|\varphi_x\|_2 (2\|\psi\|_2),$$

e usando a desigualdade de Young com $\epsilon = \frac{1}{2}$, chegamos à

$$\|\varphi_x + \psi\|_2^2 \geq \|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi\|_2^2 - \frac{1}{2}\|\varphi_x\|_2^2 - 2\|\psi\|_2^2 = \frac{1}{2}\|\varphi_x\|_2^2 - \|\psi\|_2^2.$$

Resultando que

$$\|\varphi_x\|_2^2 \leq 2\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + 2\|\psi\|_2^2.$$

Agora, usando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\|\varphi_x\|_2^2 \leq 2\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \frac{2}{\lambda_1} \|\psi_x\|_2^2,$$

Portanto, para finalizar a demonstração do Lema, basta tomar $\kappa_0 = \max\{\frac{2}{\kappa}, \frac{2}{b\lambda_1}\}$.

□

A partir da desigualdade de Poncaré e do Lema (2.1), obtemos uma desigualdade que será muito útil no decorrer deste trabalho.

$$\|\varphi\|_2^2 \leq \gamma_1 (b\|\psi_x\|_2^2 + \kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2), \quad (2.13)$$

onde $\gamma_1 = \kappa_0\lambda_1^{-1}$.

Lema 2.2. *Se $U \in \mathcal{H}_1$. Então,*

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 \geq \|v\|_2^2 + \alpha\|u_x\|_2^2 + \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + \kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \|\theta\|_2^2.$$

Além disso, existe uma constante K tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq K (\|v\|_2^2 + \alpha\|u_x\|_2^2 + \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + \kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \|\theta\|_2^2).$$

Demonstração. A primeira desigualdade sai diretamente, pois $\lambda\|\varphi - u\|_2^2 > 0$. Para a segunda desigualdade, começamos notando que pelas propriedades de norma temos que

$$\|\varphi - u\|_2^2 \leq \|\varphi\|_2^2 + \|u\|_2^2.$$

E, usando a desigualdade de Poincaré e a desigualdade (2.13) obtemos

$$\|\varphi - u\|_2^2 \leq \gamma_1 (b\|\psi_x\|_2^2 + \kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2) + \frac{1}{\lambda_1}\|u_x\|_2^2.$$

Resultando que

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 &\leq \|v\|_2^2 + \left(\alpha + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u_x\|_2^2 + \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 \\ &\quad + (1 + \lambda\gamma_1)(b\|\psi_x\|_2^2 + \kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2) + \|\theta\|_2^2. \end{aligned}$$

Tomando $K = \max\left\{\alpha + \frac{\lambda}{\lambda_1}, 1 + \lambda\gamma_1\right\}$ chegamos à desigualdade desejada.

□

Agora, escreveremos o sistema (4)-(10) como um problema de evolução de Cauchy de primeira ordem. Introduzimos a função vetorial $U = (u, v, \varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)'$, onde, $u_t = v$, $\varphi_t = \Phi$ e $\psi_t = \Psi$. Então,

$$U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \varphi_t \\ \Phi_t \\ \psi_t \\ \Psi_t \\ \theta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \alpha u_{xx} + \lambda(\varphi - u) - \gamma\theta_x \\ \Phi \\ \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\lambda}{\rho_1}(\varphi - u) \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\mu}{\rho_2}\Psi \\ \delta\theta_{xx} - \gamma v_x \end{pmatrix} = \mathcal{A}U,$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha \partial_{xx} - \lambda I & 0 & \lambda I & 0 & 0 & 0 & -\gamma \partial_x \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{\rho_1} I & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1} \partial_{xx} - \frac{\lambda}{\rho_1} I & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa}{\rho_2} \partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2} \partial_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2} I & -\frac{\mu}{\rho_2} I & 0 \\ 0 & -\gamma \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \partial_{xx} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

O sistema (4)-(10) é reduzido ao seguinte problema inicial abstrato de uma equação de evolução de primeira ordem,

$$\begin{cases} U_t - \mathcal{A}U = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (2.15)$$

onde

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$$

é um operador linear ilimitado no espaço de fase $\mathcal{H}_1$ com domínio

$$D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H}_1; \mathcal{A}U \in \mathcal{H}_1\} = \{U \in \mathcal{H}_2; \psi_x(0) = \psi_x(l) = \theta_x(0) = \theta_x(l) = 0\}.$$

onde

$$\mathcal{H}_2 = [H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l) \times H_0^1(0, l)]^2 \times H_*^2(0, l) \times H_*^1(0, l) \times H_*^2(0, l).$$

No próximo capítulo iremos mostrar que o problema de Cauchy (2.15) está bem colocado.

Capítulo 3

Boa colocação do problema

Inicialmente, desejamos provar que $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações. $S(t) = e^{\mathcal{A}t}, t \geq 0$, em $\mathcal{H}_1$. Para atingirmos nosso objetivo, consideremos os três lemas a seguir.

Lema 3.1. *O operador $\mathcal{A}$ é dissipativo.*

Demonstração. Seja $U = (u, v, \varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)' \in D(\mathcal{A})$, pela definição de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1}$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}_1} &= \langle \alpha u_{xx} + \lambda(\varphi - u) - \gamma \theta_x, v \rangle + \alpha \langle v_x, u_x \rangle + \rho_1 \left\langle \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\lambda}{\rho_1}(\varphi - u), \Phi \right\rangle \\ &\quad + \rho_2 \left\langle \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\mu}{\rho_2} \Psi, \Psi \right\rangle + b \langle \Psi_x, \psi_x \rangle + \lambda \langle \Phi - v, \varphi - u \rangle \\ &\quad + k \langle \Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi \rangle + \langle \delta \theta_{xx} - \gamma v_x, \theta \rangle, \end{aligned}$$

usando a propriedade distributiva do produto interno, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}_1} &= \alpha \langle u_{xx}, v \rangle + \lambda \langle \varphi - u, v \rangle - \gamma \langle \theta_x, v \rangle + \alpha \langle v_x, u_x \rangle + \kappa \langle (\varphi_x + \psi)_x, \Phi \rangle \\ &\quad - \lambda \langle \varphi - u, \Phi \rangle + b \langle \psi_{xx}, \Psi \rangle - \kappa \langle \varphi_x + \psi, \Psi \rangle - \mu \|\Psi\|_2^2 + b \langle \Psi_x, \psi_x \rangle \\ &\quad + \lambda \langle \Phi - v, \varphi - u \rangle + k \langle \Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi \rangle + \delta \langle \theta_{xx}, \theta \rangle - \gamma \langle v_x, \theta \rangle \\ &= \alpha \langle u_{xx}, v \rangle - \lambda \langle \varphi - u, \Phi - v \rangle - \gamma \langle \theta_x, v \rangle + \alpha \langle v_x, u_x \rangle + \kappa \langle (\varphi_x + \psi)_x, \Phi \rangle \\ &\quad + b \langle \psi_{xx}, \Psi \rangle - \kappa \langle \varphi_x + \psi, \Psi \rangle - \mu \|\Psi\|_2^2 + b \langle \Psi_x, \psi_x \rangle + \lambda \langle \Phi - v, \varphi - u \rangle \\ &\quad + k \langle \Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi \rangle + \delta \langle \theta_{xx}, \theta \rangle - \gamma \langle v_x, \theta \rangle. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Integrando por partes, obtemos que

$$\begin{aligned}
\langle u_{xx}, v \rangle &= \int_0^l u_{xx}(x) \overline{v(x)} dx \\
&= u_x(x) \overline{v(x)} \Big|_0^l - \int_0^l u_x(x) \overline{v_x(x)} dx \\
&= u_x(l) \overline{v(l)} - u_x(0) \overline{v(0)} - \langle u_x, v_x \rangle \\
&= -\langle u_x, v_x \rangle.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Analogamente, temos que

$$\langle \theta_x, v \rangle = -\langle \theta, v_x \rangle, \quad \langle (\varphi_x + \psi)_x, \Phi \rangle = -\langle (\varphi_x + \psi), \Phi_x \rangle, \tag{3.3}$$

$$\langle \psi_{xx}, \Psi \rangle = -\langle \psi_x, \Psi_x \rangle \quad \text{e} \quad \langle \theta_{xx}, \theta \rangle = -\|\theta_x\|_2^2. \tag{3.4}$$

Substituindo (3.2)–(3.4) em (3.1) ficamos com

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}_1} &= -\alpha \langle u_x, v_x \rangle - \lambda \langle \varphi - u, \Phi - v \rangle + \gamma \langle \theta, v_x \rangle + \alpha \langle v_x, u_x \rangle - \kappa \langle \varphi_x + \psi, \Phi_x \rangle \\
&\quad - b \langle \psi_x, \Psi_x \rangle - \kappa \langle \varphi_x + \psi, \Psi \rangle - \mu \|\Psi\|_2^2 + b \langle \Psi_x, \psi_x \rangle + \lambda \langle \Phi - v, \varphi - u \rangle \\
&\quad + k \langle \Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi \rangle - \delta \|\theta_x\|_2^2 - \gamma \langle v_x, \theta \rangle
\end{aligned}$$

e reagrupando os termos da soma, chegamos à

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}_1} &= \alpha (\langle v_x, u_x \rangle - \langle u_x, v_x \rangle) + \lambda (\langle \Phi - v, \varphi - u \rangle - \langle \varphi - u, \Phi - v \rangle) \\
&\quad + \kappa (\langle \Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi \rangle - \langle \varphi_x + \psi, \Phi_x + \Psi \rangle) + b (\langle \Psi_x, \psi_x \rangle - \langle \psi_x, \Psi_x \rangle) \\
&\quad - \mu \|\Psi\|_2^2 - \delta \|\theta_x\|_2^2 + \gamma (\langle \theta, v_x \rangle - \langle v_x, \theta \rangle).
\end{aligned}$$

Usando a propriedade de produto interno dada por $\langle X, Y \rangle = \overline{\langle Y, X \rangle}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}_1} &= \alpha \left(\langle v_x, u_x \rangle - \overline{\langle v_x, u_x \rangle} \right) + \lambda \left(\langle \Phi - v, \varphi - u \rangle - \overline{\langle \Phi - v, \varphi - u \rangle} \right) \\
&\quad + \kappa \left(\langle \Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi \rangle - \overline{\langle \Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi \rangle} \right) + b \left(\langle \Psi_x, \psi_x \rangle - \overline{\langle \Psi_x, \psi_x \rangle} \right) \\
&\quad - \mu \|\Psi\|_2^2 - \delta \|\theta_x\|_2^2 + \gamma \left(\langle \theta, v_x \rangle - \overline{\langle \theta, v_x \rangle} \right).
\end{aligned}$$

Netse ponto, usaremos a propriedade de números complexos que diz: A diferença entre um número complexo e o seu conjugado é sempre um imagiário puro. Assim, a parte real do número acima é

$$\Re \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}_1} = -\mu \|\Psi\|_2^2 - \delta \|\theta_x\|_2^2 \leq 0. \tag{3.5}$$

Então, $\mathcal{A}$ é dissipativo. □

Lema 3.2. $0 \in \rho(\mathcal{A})$, onde $\rho(\mathcal{A})$ é o conjunto resolvente do operador $\mathcal{A}$.

Demonstração. Dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)' \in \mathcal{H}_1$ vamos mostrar que existe $U(\mathcal{A})$ solução da equação resolvente $-\mathcal{A}U = F$ em $\mathcal{H}_1$. Em termos das coordenadas de U e F , a equação resolvente é equivalente ao seguinte sistema,

$$-v = f_1 \text{ em } H_0^1(0, l), \quad (3.6)$$

$$-\alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma \theta_x = f_2 \text{ em } L^2(0, l), \quad (3.7)$$

$$-\Phi = f_3 \text{ em } H_0^1(0, l), \quad (3.8)$$

$$-\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) = \rho_1 f_4 \text{ em } L^2(0, l), \quad (3.9)$$

$$-\Psi = f_5 \text{ em } H_*^1(0, l), \quad (3.10)$$

$$-b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \mu\Psi = \rho_2 f_6 \text{ em } L_*^2(0, l), \quad (3.11)$$

$$-\delta\theta_{xx} + \gamma v_x = f_7 \text{ em } L_*^2(0, l). \quad (3.12)$$

Substituindo (3.6) em (3.12) e (3.10) em (3.11), obtemos

$$-\alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma \theta_x = f_2 := g_1 \in L^2(0, l), \quad (3.13)$$

$$-\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) = \rho_1 f_4 := g_2 \in L^2(0, l), \quad (3.14)$$

$$-b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = \mu f_5 + \rho_2 f_6 := g_3 \in L_*^2(0, l), \quad (3.15)$$

$$-\delta\theta_{xx} = \gamma f_{1x} + f_7 := g_4 \in L_*^2(0, l). \quad (3.16)$$

Em (3.16), temos $g_4 \in L_*^2(0, l)$, pois $\int_0^l f_{1x} dx = f_1(l) - f_1(0) = 0$ já que $f_1 \in H_0^1(0, l)$.

Multiplicando as equações (3.13), (3.14), (3.15) e (3.16) pelos conjugados das funções $\tilde{u}, \tilde{\varphi} \in H_0^1(0, l)$ e $\tilde{\psi}, \sigma\tilde{\theta} \in H_*^1(0, l)$, respectivamente, e integrando por partes obtemos

$$\alpha\langle u_x, \tilde{u}_x \rangle - \lambda\langle \varphi - u, \tilde{u} \rangle + \gamma\langle \theta_x, \tilde{u} \rangle = \langle g_1, \tilde{u} \rangle, \quad (3.17)$$

$$\kappa\langle \varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_x \rangle + \lambda\langle \varphi - u, \tilde{\varphi} \rangle = \langle g_2, \tilde{\varphi} \rangle, \quad (3.18)$$

$$b\langle \psi_x, \tilde{\psi}_x \rangle + \kappa\langle \varphi_x + \psi, \tilde{\psi} \rangle = \langle g_3, \tilde{\psi} \rangle, \quad (3.19)$$

$$\sigma\delta\langle \theta_x, \tilde{\theta}_x \rangle = \sigma\langle g_4, \tilde{\theta} \rangle, \quad (3.20)$$

onde σ será escolhido adequadamente.

Denotando $\mathcal{V} = H_0^1(0, l) \times H_0^1(0, l) \times H_*^1(0, l) \times H_*^1(0, l)$ e adicionando (3.17), (3.18), (3.19) e (3.20) construímos um problema variacional

$$\mathbb{B}_\sigma((u, \varphi, \psi, \theta), (\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})) = \mathbb{L}_\sigma(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}), \quad (3.21)$$

onde $\mathbb{B}_\sigma : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_\sigma((u, \varphi, \psi, \theta), (\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})) &= \alpha\langle u_x, \tilde{u}_x \rangle + \lambda\langle \varphi - u, \tilde{\varphi} - \tilde{u} \rangle + \kappa\langle \varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} \rangle \\ &\quad + b\langle \psi_x, \tilde{\psi}_x \rangle + \sigma\delta\langle \theta_x, \tilde{\theta}_x \rangle + \gamma\langle \theta_x, \tilde{u} \rangle \end{aligned}$$

e $\mathbb{L}_\sigma : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ é dado por

$$\mathbb{L}_\sigma(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}) = \langle g_1, \tilde{u} \rangle + \langle g_2, \tilde{\varphi} \rangle + \langle g_3, \tilde{\psi} \rangle + \sigma \langle g_4, \tilde{\theta} \rangle.$$

Definimos em $\mathcal{V}$ a norma

$$\|(u, \varphi, \psi, \theta)\|_{\mathcal{V}}^2 = \|u\|_2^2 + \|\varphi - u\|_2^2 + \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|\theta_x\|_2^2.$$

Afirmamos que:

a) $\mathbb{B}_\sigma$ é sesquilinear em $\mathcal{V}$.

De fato, sejam $U_1 = (u_1, \varphi_1, \psi_1, \theta_1)$, $U_2 = (u_2, \varphi_2, \psi_2, \theta_2)$ e $\tilde{U} = (\tilde{u}_1, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\psi}_1, \tilde{\theta}_1)$ em $\mathcal{V}$ e $\beta \in \mathbb{C}$. Como

$$\beta U_1 + U_2 = \beta(u_1, \varphi_1, \psi_1, \theta_1) + (u_2, \varphi_2, \psi_2, \theta_2) = (\beta u_1 + u_2, \beta \varphi_1 + \varphi_2, \beta \psi_1 + \psi_2, \beta \theta_1 + \theta_2).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_\sigma(\beta U_1 + U_2, \tilde{U}) &= \alpha \langle (\beta u_1 + u_2)_x, \tilde{u}_x \rangle + b \langle (\beta \psi_1 + \psi_2)_x, \tilde{\psi}_x \rangle \\ &\quad + \lambda \langle \beta \varphi_1 + \varphi_2 - (\beta u_1 + u_2), \tilde{\varphi} - \tilde{u} \rangle \\ &\quad + \kappa \langle (\beta \varphi_1 + \varphi_2)_x + \beta \psi_1 + \psi_2, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} \rangle \\ &\quad + \sigma \delta \langle (\beta \theta_1 + \theta_2)_x, \tilde{\theta}_x \rangle + \gamma \langle (\beta \theta_1 + \theta_2)_x, \tilde{u} \rangle \\ &= \alpha \langle \beta u_{1x} + u_{2x}, \tilde{u}_x \rangle + b \langle \beta \psi_{1x} + \psi_{2x}, \tilde{\psi}_x \rangle \\ &\quad + \lambda \langle \beta \varphi_1 + \varphi_2 - \beta u_1 - u_2, \tilde{\varphi} - \tilde{u} \rangle \\ &\quad + \kappa \langle \beta \varphi_{1x} + \varphi_{2x} + \beta \psi_1 + \psi_2, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} \rangle \\ &\quad + \sigma \delta \langle \beta \theta_{1x} + \theta_{2x}, \tilde{\theta}_x \rangle + \gamma \langle \beta \theta_{1x} + \theta_{2x}, \tilde{u} \rangle. \end{aligned}$$

Pelas propriedades de produto interno, chegamos à

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_\sigma(\beta U_1 + U_2, \tilde{U}) &= \alpha \langle \beta u_{1x}, \tilde{u}_x \rangle + \alpha \langle u_{2x}, \tilde{u}_x \rangle + b \langle \beta \psi_{1x}, \tilde{\psi}_x \rangle + b \langle \psi_{2x}, \tilde{\psi}_x \rangle \\ &\quad + \lambda \langle \beta \varphi_1 - \beta u_1, \tilde{\varphi} - \tilde{u} \rangle + \lambda \langle \varphi_2 - u_2, \tilde{\varphi} - \tilde{u} \rangle \\ &\quad + \kappa \langle \beta \varphi_{1x} + \beta \psi_1, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} \rangle + \kappa \langle \varphi_{2x} + \psi_2, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} \rangle \\ &\quad + \sigma \delta \langle \beta \theta_{1x}, \tilde{\theta}_x \rangle + \sigma \delta \langle \theta_{2x}, \tilde{\theta}_x \rangle + \gamma \langle \beta \theta_{1x}, \tilde{u} \rangle + \gamma \langle \theta_{2x}, \tilde{u} \rangle \\ &= \beta \alpha \langle u_{1x}, \tilde{u}_x \rangle + \alpha \langle u_{2x}, \tilde{u}_x \rangle + \beta b \langle \psi_{1x}, \tilde{\psi}_x \rangle + b \langle \psi_{2x}, \tilde{\psi}_x \rangle \\ &\quad + \beta \lambda \langle \varphi_1 - u_1, \tilde{\varphi} - \tilde{u} \rangle + \lambda \langle \varphi_2 - u_2, \tilde{\varphi} - \tilde{u} \rangle \\ &\quad + \beta \kappa \langle \varphi_{1x} + \psi_1, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} \rangle + \kappa \langle \varphi_{2x} + \psi_2, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} \rangle \\ &\quad + \beta \sigma \delta \langle \theta_{1x}, \tilde{\theta}_x \rangle + \sigma \delta \langle \theta_{2x}, \tilde{\theta}_x \rangle + \beta \gamma \langle \theta_{1x}, \tilde{u} \rangle + \gamma \langle \theta_{2x}, \tilde{u} \rangle, \end{aligned}$$

de onde resulta que

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_\sigma(\beta U_1 + U_2, \tilde{U}) &= \beta \left[\alpha \langle u_{1x}, \tilde{u}_x \rangle + b \langle \psi_{1x}, \tilde{\psi}_x \rangle + \lambda \langle \varphi_1 - u_1, \tilde{\varphi} - \tilde{u} \rangle + \kappa \langle \varphi_{1x} + \psi_1, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sigma \delta \langle \theta_{1x}, \tilde{\theta}_x \rangle + \gamma \langle \theta_{1x}, \tilde{u} \rangle \right] + \alpha \langle u_{2x}, \tilde{u}_x \rangle + b \langle \psi_{2x}, \tilde{\psi}_x \rangle \\ &\quad + \lambda \langle \varphi_2 - u_2, \tilde{\varphi} - \tilde{u} \rangle + \kappa \langle \varphi_{2x} + \psi_2, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} \rangle + \sigma \delta \langle \theta_{2x}, \tilde{\theta}_x \rangle + \gamma \langle \theta_{2x}, \tilde{u} \rangle \\ &= \beta \mathbb{B}_\sigma(U_1, \tilde{U}) + \mathbb{B}_\sigma(U_2, \tilde{U})\end{aligned}$$

Sejam $U = (u, \varphi, \psi, \theta)$, $\tilde{U}_1 = (\tilde{u}_1, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\psi}_1, \tilde{\theta}_1)$ e $\tilde{U}_2 = (\tilde{u}_2, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\psi}_2, \tilde{\theta}_2)$ em $\mathcal{V}$ e $\beta \in \mathbb{C}$. Como $\beta \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 = \beta(\tilde{u}_1, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\psi}_1, \tilde{\theta}_1) + (\tilde{u}_2, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\psi}_2, \tilde{\theta}_2) = (\beta \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2, \beta \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2, \beta \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2, \beta \tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2)$.

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_\sigma(U, \beta \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2) &= \alpha \langle u_x, (\beta \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2)_x \rangle + b \langle \psi_x, (\beta \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2)_x \rangle \\ &\quad + \lambda \langle \varphi - u, \beta \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 - (\beta \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2) \rangle \\ &\quad + \kappa \langle \varphi_x + \psi, (\beta \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2)_x + \beta \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2 \rangle \\ &\quad + \sigma \delta \langle \theta_x, (\beta \tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2)_x \rangle + \gamma \langle \theta_x, \beta \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 \rangle \\ &= \alpha \langle u_x, \beta \tilde{u}_{1x} + \tilde{u}_{2x} \rangle + b \langle \psi_x, \beta \tilde{\psi}_{1x} + \tilde{\psi}_{2x} \rangle \\ &\quad + \lambda \langle \varphi - u, \beta \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 - \beta \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \rangle \\ &\quad + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \beta \tilde{\varphi}_{1x} + \tilde{\varphi}_{2x} + \beta \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2 \rangle \\ &\quad + \sigma \delta \langle \theta_x, \beta \tilde{\theta}_{1x} + \tilde{\theta}_{2x} \rangle + \gamma \langle \theta_x, \beta \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 \rangle\end{aligned}$$

Pelas propriedades de produto interno, chegamos à

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_\sigma(U, \beta \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2) &= \alpha \langle u_x, \beta \tilde{u}_{1x} \rangle + \alpha \langle u_x, \tilde{u}_{2x} \rangle + b \langle \psi_x, \beta \tilde{\psi}_{1x} \rangle + b \langle \psi_x, \tilde{\psi}_{2x} \rangle \\ &\quad + \lambda \langle \varphi - u, \beta \tilde{\varphi}_1 - \beta \tilde{u}_1 \rangle + \lambda \langle \varphi - u, \tilde{\varphi}_2 - \tilde{u}_2 \rangle \\ &\quad + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \beta \tilde{\varphi}_{1x} + \beta \tilde{\psi}_1 \rangle + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_{2x} + \tilde{\psi}_2 \rangle \\ &\quad + \sigma \delta \langle \theta_x, \beta \tilde{\theta}_{1x} \rangle + \sigma \delta \langle \theta_x, \tilde{\theta}_{2x} \rangle + \gamma \langle \theta_x, \beta \tilde{u}_1 \rangle + \gamma \langle \theta_x, \tilde{u}_2 \rangle \\ &= \bar{\beta} \alpha \langle u_x, \tilde{u}_{1x} \rangle + \alpha \langle u_x, \tilde{u}_{2x} \rangle + \bar{\beta} b \langle \psi_x, \tilde{\psi}_{1x} \rangle + b \langle \psi_x, \tilde{\psi}_{2x} \rangle \\ &\quad + \bar{\beta} \lambda \langle \varphi - u, \tilde{\varphi}_1 - \tilde{u}_1 \rangle + \lambda \langle \varphi - u, \tilde{\varphi}_2 - \tilde{u}_2 \rangle \\ &\quad + \bar{\beta} \kappa \langle \varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_{1x} + \tilde{\psi}_1 \rangle + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_{2x} + \tilde{\psi}_2 \rangle \\ &\quad + \bar{\beta} \sigma \delta \langle \theta_x, \tilde{\theta}_{1x} \rangle + \sigma \delta \langle \theta_x, \tilde{\theta}_{2x} \rangle + \bar{\beta} \gamma \langle \theta_x, \tilde{u}_1 \rangle + \gamma \langle \theta_x, \tilde{u}_2 \rangle,\end{aligned}$$

de onde resulta que

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_\sigma(U, \beta\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2) &= \bar{\beta} \left[\alpha \langle u_x, \tilde{u}_{1x} \rangle + b \langle \psi_x, \tilde{\psi}_{1x} \rangle + \lambda \langle \varphi - \beta u, \tilde{\varphi}_1 - \tilde{u}_1 \rangle + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_{1x} + \tilde{\psi}_1 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sigma \delta \langle \theta_x, \tilde{\theta}_{1x} \rangle + \gamma \langle \theta_x, \tilde{u}_1 \rangle \right] + \alpha \langle u_x, \tilde{u}_{2x} \rangle + b \langle \psi_x, \tilde{\psi}_{2x} \rangle \\ &\quad + \lambda \langle \varphi - u, \tilde{\varphi}_2 - \tilde{u}_2 \rangle + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_{2x} + \tilde{\psi}_2 \rangle + \sigma \delta \langle \theta_x, \tilde{\theta}_{2x} \rangle + \gamma \langle \theta_x, \tilde{u}_2 \rangle \\ &= \bar{\beta} \mathbb{B}_\sigma(U, \tilde{U}_1) + \mathbb{B}_\sigma(U, \tilde{U}_2)\end{aligned}$$

b) $\mathbb{B}_\sigma$ é contínuo em $\mathcal{V}$.

De fato, sejam $U = (u, \varphi, \psi, \theta)$ e $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})$ em $\mathcal{V}$, temos que

$$\begin{aligned}|\mathbb{B}_\sigma(U, \tilde{U})| &= |\mathbb{B}_\sigma((u, \varphi, \psi, \theta), (\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}))| \\ &= \left| \alpha \langle u_x, \tilde{u}_x \rangle + \lambda \langle \varphi - u, \tilde{\varphi} - \tilde{u} \rangle + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} \rangle \right. \\ &\quad \left. + b \langle \psi_x, \tilde{\psi}_x \rangle + \sigma \delta \langle \theta_x, \tilde{\theta}_x \rangle + \gamma \langle \theta_x, \tilde{u} \rangle \right|.\end{aligned}$$

Usando as propriedades de módulo de números complexos, chegamos

$$\begin{aligned}|\mathbb{B}_\sigma(U, \tilde{U})| &\leq |\alpha \langle u_x, \tilde{u}_x \rangle| + |\lambda \langle \varphi - u, \tilde{\varphi} - \tilde{u} \rangle| + |\kappa \langle \varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} \rangle| \\ &\quad + |b \langle \psi_x, \tilde{\psi}_x \rangle| + |\sigma \delta \langle \theta_x, \tilde{\theta}_x \rangle| + |\gamma \langle \theta_x, \tilde{u} \rangle| \\ &= \alpha |\langle u_x, \tilde{u}_x \rangle| + \lambda |\langle \varphi - u, \tilde{\varphi} - \tilde{u} \rangle| + \kappa |\langle \varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} \rangle| \\ &\quad + b |\langle \psi_x, \tilde{\psi}_x \rangle| + \sigma \delta |\langle \theta_x, \tilde{\theta}_x \rangle| + \gamma |\langle \theta_x, \tilde{u} \rangle|.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\begin{aligned}|\mathbb{B}_\sigma(U, \tilde{U})| &\leq \alpha \|u_x\|_2 \|\tilde{u}_x\|_2 + \lambda \|\varphi - u\|_2 \|\tilde{\varphi} - \tilde{u}\|_2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2 \|\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}\|_2 \\ &\quad + b \|\psi_x\|_2 \|\tilde{\psi}_x\|_2 + \sigma \delta \|\theta_x\|_2 \|\tilde{\theta}_x\|_2 + \gamma \|\theta_x\|_2 \|\tilde{u}\|_2.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré obtemos

$$\begin{aligned}|\mathbb{B}_\sigma(U, \tilde{U})| &\leq \alpha \|u_x\|_2 \|\tilde{u}_x\|_2 + \lambda \|\varphi - u\|_2 \|\tilde{\varphi} - \tilde{u}\|_2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2 \|\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}\|_2 \\ &\quad + b \|\psi_x\|_2 \|\tilde{\psi}_x\|_2 + \sigma \delta \|\theta_x\|_2 \|\tilde{\theta}_x\|_2 + \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda_1}} \|\theta_x\|_2 \|\tilde{u}\|_2.\end{aligned}$$

Pela definição da norma em $\mathcal{V}$ obtemos

$$\begin{aligned}|\mathbb{B}_\sigma(U, \tilde{U})| &\leq \alpha \|U\|_{\mathcal{V}} \|\tilde{U}\|_{\mathcal{V}} + \lambda \|U\|_{\mathcal{V}} \|\tilde{U}\|_{\mathcal{V}} + \kappa \|U\|_{\mathcal{V}} \|\tilde{U}\|_{\mathcal{V}} \\ &\quad + b \|U\|_{\mathcal{V}} \|\tilde{U}\|_{\mathcal{V}} + \sigma \delta \|U\|_{\mathcal{V}} \|\tilde{U}\|_{\mathcal{V}} + \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda_1}} \|U\|_{\mathcal{V}} \|\tilde{U}\|_{\mathcal{V}} \\ &= \left(\alpha + \lambda + \kappa + b + \sigma \delta + \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda_1}} \right) \|U\|_{\mathcal{V}} \|\tilde{U}\|_{\mathcal{V}}.\end{aligned}$$

Assim, a forma sesquilinear é limitada, portanto, é contínua.

c) Para todo $\sigma > \frac{\gamma^2}{2\alpha\lambda_1\delta}$, segue que $\mathbb{B}_\sigma$ é coercivo em $\mathcal{V}$.

De fato, seja $U = (u, \varphi, \psi, \theta)$ em $\mathcal{V}$, temos que

$$\begin{aligned} |\mathbb{B}_\sigma(U, U)| &= |\mathbb{B}_\sigma((u, \varphi, \psi, \theta), (u, \varphi, \psi, \theta))| \\ &= \left| \alpha \langle u_x, u_x \rangle + \lambda \langle \varphi - u, \varphi - u \rangle + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \varphi_x + \psi \rangle \right. \\ &\quad \left. + b \langle \psi_x, \psi_x \rangle + \sigma \delta \langle \theta_x, \theta_x \rangle + \gamma \langle \theta_x, u \rangle \right| \\ &= \left| \alpha \|u_x\|_2^2 + \lambda \|\varphi - u\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 + \sigma \delta \|\theta_x\|_2^2 + \gamma \langle \theta_x, u \rangle \right|. \end{aligned}$$

Usando as propriedades de módulo de números complexos, chegamos

$$\begin{aligned} |\mathbb{B}_\sigma(U, U)| &\geq \alpha \|u_x\|_2^2 + \lambda \|\varphi - u\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 + \sigma \delta \|\theta_x\|_2^2 - |\gamma \langle \theta_x, u \rangle| \\ &= \alpha \|u_x\|_2^2 + \lambda \|\varphi - u\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 + \sigma \delta \|\theta_x\|_2^2 - \gamma |\langle \theta_x, u \rangle|. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$|\mathbb{B}_\sigma(U, U)| \geq \alpha \|u_x\|_2^2 + \lambda \|\varphi - u\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 + \sigma \delta \|\theta_x\|_2^2 - \gamma \|\theta_x\|_2 \|u\|_2,$$

usando a desigualdade de Young obtemos

$$|\mathbb{B}_\sigma(U, U)| \geq \alpha \|u_x\|_2^2 + \lambda \|\varphi - u\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 + \sigma \delta \|\theta_x\|_2^2 - \frac{\gamma^2}{4\epsilon} \|\theta_x\|_2^2 - \epsilon \|u\|_2^2,$$

usando a desigualdade de Poincaré obtemos

$$\begin{aligned} |\mathbb{B}_\sigma(U, U)| &\geq \alpha \|u_x\|_2^2 + \lambda \|\varphi - u\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 + \sigma \delta \|\theta_x\|_2^2 - \frac{\gamma^2}{4\epsilon} \|\theta_x\|_2^2 - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \|u_x\|_2^2 \\ &= \left(\alpha - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \|u_x\|_2^2 + \lambda \|\varphi - u\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 + \left(\sigma \delta - \frac{\gamma^2}{4\epsilon} \right) \|\theta_x\|_2^2. \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon = \frac{\alpha\lambda_1}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned} |\mathbb{B}_\sigma(U, U)| &\geq \left(\alpha - \frac{\alpha}{2} \right) \|u_x\|_2^2 + \lambda \|\varphi - u\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 + \left(\sigma \delta - \frac{\gamma^2}{4\frac{\alpha\lambda_1}{2}} \right) \|\theta_x\|_2^2 \\ &= \frac{\alpha}{2} \|u_x\|_2^2 + \lambda \|\varphi - u\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 + \left(\sigma \delta - \frac{\gamma^2}{2\alpha\lambda_1} \right) \|\theta_x\|_2^2 \\ &\geq \min \left\{ \frac{\alpha}{2}, \lambda, \kappa, b, \sigma \delta - \frac{\gamma^2}{2\alpha\lambda_1} \right\} (\|u_x\|_2^2 + \|\varphi - u\|_2^2 + \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|\theta_x\|_2^2) \\ &= \min \left\{ \frac{\alpha}{2}, \lambda, \kappa, b, \sigma \delta - \frac{\gamma^2}{2\alpha\lambda_1} \right\} \|U\|_{\mathcal{V}}^2. \end{aligned}$$

d) $\mathbb{L}_\sigma$ é antilinear em $\mathcal{V}$.

Sejam $\tilde{U}_1 = (\tilde{u}_1, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\psi}_1, \tilde{\theta}_1)$ e $\tilde{U}_2 = (\tilde{u}_2, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\psi}_2, \tilde{\theta}_2)$ em $\mathcal{V}$ e $\beta \in \mathbb{C}$. Já vimos que

$$\beta \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 = (\beta \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2, \beta \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2, \beta \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2, \beta \tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2).$$

Assim, temos que

$$\mathbb{L}_\sigma(\beta \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2) = \langle g_1, \beta \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 \rangle + \langle g_2, \beta \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 \rangle + \langle g_3, \beta \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2 \rangle + \langle g_4, \beta \tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2 \rangle. \quad (3.22)$$

Usando as propriedades de produto interno, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_\sigma(\beta \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2) &= \langle g_1, \beta \tilde{u}_1 \rangle + \langle g_1, \tilde{u}_2 \rangle + \langle g_2, \beta \tilde{\varphi}_1 \rangle + \langle g_2, \tilde{\varphi}_2 \rangle \\ &\quad + \langle g_3, \beta \tilde{\psi}_1 \rangle + \langle g_3, \tilde{\psi}_2 \rangle + \langle g_4, \beta \tilde{\theta}_1 \rangle + \langle g_4, \tilde{\theta}_2 \rangle \\ &= \bar{\beta} \langle g_1, \tilde{u}_1 \rangle + \langle g_1, \tilde{u}_2 \rangle + \bar{\beta} \langle g_2, \tilde{\varphi}_1 \rangle + \langle g_2, \tilde{\varphi}_2 \rangle \\ &\quad + \bar{\beta} \langle g_3, \tilde{\psi}_1 \rangle + \langle g_3, \tilde{\psi}_2 \rangle + \bar{\beta} \langle g_4, \tilde{\theta}_1 \rangle + \langle g_4, \tilde{\theta}_2 \rangle \\ &= \bar{\beta} [\langle g_1, \tilde{u}_1 \rangle + \langle g_2, \tilde{\varphi}_1 \rangle + \langle g_3, \tilde{\psi}_1 \rangle + \langle g_4, \tilde{\theta}_1 \rangle] \\ &\quad + \langle g_1, \tilde{u}_2 \rangle + \langle g_2, \tilde{\varphi}_2 \rangle + \langle g_3, \tilde{\psi}_2 \rangle + \langle g_4, \tilde{\theta}_2 \rangle \\ &= \bar{\beta} \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2. \end{aligned}$$

e) $\mathbb{L}_\sigma$ é contínuo em $\mathcal{V}$.

Sejam $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})$ em $\mathcal{V}$, temos que

$$\begin{aligned} |\mathbb{L}_\sigma(\tilde{U})| &= |\mathbb{L}_\sigma(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})| \\ &= |\langle g_1, \tilde{u} \rangle + \langle g_2, \tilde{\varphi} \rangle + \langle g_3, \tilde{\psi} \rangle + \sigma \langle g_4, \tilde{\theta} \rangle| \\ &\leq |\langle g_1, \tilde{u} \rangle| + |\langle g_2, \tilde{\varphi} \rangle| + |\langle g_3, \tilde{\psi} \rangle| + \sigma |\langle g_4, \tilde{\theta} \rangle|. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz chegamos à

$$|\mathbb{L}_\sigma(\tilde{U})| \leq \|g_1\|_2 \|\tilde{u}\|_2 + \|g_2\|_2 \|\tilde{\varphi}\|_2 + \|g_3\|_2 \|\tilde{\psi}\|_2 + \sigma \|g_4\|_2 \|\tilde{\theta}\|_2.$$

Como $g_1, g_2, g_3, g_4 \in L^2(0, l)$ obtemos uma constante $K > 0$ tal que $\|g_1\|_2 < K$, $\|g_2\|_2 < K$, $\|g_3\|_2 < K$ e $\|g_4\|_2 < K$, logo

$$\begin{aligned} |\mathbb{L}_\sigma(\tilde{U})| &\leq K \|\tilde{u}\|_2 + K \|\tilde{\varphi}\|_2 + K \|\tilde{\psi}\|_2 + \sigma K \|\tilde{\theta}\|_2 \\ &\leq K (\|\tilde{u}\|_2 + \|\tilde{\varphi}\|_2 + \|\tilde{\psi}\|_2 + \sigma \|\tilde{\theta}\|_2). \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$|\mathbb{L}_\sigma(\tilde{U})| \leq K \left(\frac{1}{\lambda_1} \|\tilde{u}_x\|_2 + \|\tilde{\varphi}\|_2 + \frac{1}{\lambda_1} \|\tilde{\psi}_x\|_2 + \frac{\sigma}{\lambda_1} \|\tilde{\theta}_x\|_2 \right).$$

Usando o Lema 2.13 obtemos

$$\begin{aligned}
|\mathbb{L}_\sigma(\tilde{U})| &\leq K \left(\frac{1}{\lambda_1} \|\tilde{u}_x\|_2 + (\|\tilde{\varphi}\|_2^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\lambda_1} \|\tilde{\psi}_x\|_2 + \frac{\sigma}{\lambda_1} \|\tilde{\theta}_x\|_2 \right) \\
&\leq K \left(\frac{1}{\lambda_1} \|\tilde{u}_x\|_2 + [\gamma_1 \left(\|\tilde{\psi}_x\|_2^2 + \|\varphi_x + \psi\|_2^2 \right)]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\lambda_1} \|\tilde{\psi}_x\|_2 + \frac{\sigma}{\lambda_1} \|\tilde{\theta}_x\|_2 \right) \\
&= K \left(\frac{1}{\lambda_1} \|\tilde{u}_x\|_2 + \sqrt{\gamma_1} (\|\tilde{\psi}_x\|_2^2 + \|\varphi_x + \psi\|_2^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\lambda_1} \|\tilde{\psi}_x\|_2 + \frac{\sigma}{\lambda_1} \|\tilde{\theta}_x\|_2 \right).
\end{aligned}$$

Pela definição da norma em $\mathcal{V}$ obtemos

$$\begin{aligned}
|\mathbb{L}_\sigma(\tilde{U})| &\leq K \left(\frac{1}{\lambda_1} \|U\|_{\mathcal{V}} + \sqrt{\gamma_1} \|U\|_{\mathcal{V}} + \frac{1}{\lambda_1} \|U\|_{\mathcal{V}} + \frac{\sigma}{\lambda_1} \|U\|_{\mathcal{V}} \right) \\
&= K \left(\frac{2}{\lambda_1} + \sqrt{\gamma_1} + \frac{\sigma}{\lambda_1} \right) \|U\|_{\mathcal{V}}.
\end{aligned}$$

.

Portanto, pelo teorema de Lax-Milgram, existe um único $(u, \varphi, \psi, \theta) \in \mathcal{V}$ solução de (3.21), para todo $(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}) \in \mathcal{V}$. Tomando $(\tilde{u}, 0, 0, 0)$, então (3.21) é reduzido à

$$\alpha \langle u_x, \tilde{u}_x \rangle - \lambda \langle \varphi - u, \tilde{u} \rangle + \gamma \langle \theta_x, \tilde{u} \rangle = \langle g_1, \tilde{u} \rangle, \quad \text{para todo } \tilde{u} \in H_0^1(0, l).$$

Usando as definições de produto interno, obtemos

$$\langle \alpha u_x, \tilde{u}_x \rangle = \langle \lambda(\varphi - u) - \gamma \theta_x + g_1, \tilde{u} \rangle, \quad \text{para todo } \tilde{u} \in H_0^1(0, l).$$

Como $\lambda(\varphi - u) - \gamma \theta_x + g_1 \in L^2(0, l)$, obtemos pelo teorema da regularidade elíptica que $u \in H^2(0, l)$ e

$$-\alpha u_{xx} = \lambda(\varphi - u) - \gamma \theta_x + g_1,$$

ou seja,

$$-\alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma \theta_x = g_1.$$

Tomando $(0, \tilde{\varphi}, 0, 0)$, então (3.21) é reduzido à

$$\kappa \langle \varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_x \rangle + \lambda \langle \varphi - \psi, \tilde{\varphi} \rangle = \langle g_2, \tilde{\varphi} \rangle, \quad \text{para todo } \tilde{\varphi} \in H_0^1(0, l),$$

Usando as definições de produto interno e a integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
&\kappa \langle \varphi_x, \tilde{\varphi}_x \rangle + \kappa \langle \psi, \tilde{\varphi}_x \rangle + \lambda \langle \varphi - \psi, \tilde{\varphi} \rangle = \langle g_2, \tilde{\varphi} \rangle, \quad \text{para todo } \tilde{\varphi} \in H_0^1(0, l), \\
\iff &\kappa \langle \varphi_x, \tilde{\varphi}_x \rangle - \kappa \langle \psi_x, \tilde{\varphi} \rangle + \lambda \langle \varphi - \psi, \tilde{\varphi} \rangle = \langle g_2, \tilde{\varphi} \rangle, \quad \text{para todo } \tilde{\varphi} \in H_0^1(0, l), \\
\iff &\langle \kappa \varphi_x, \tilde{\varphi}_x \rangle = \langle \kappa \psi_x - \lambda(\varphi - \psi) + g_2, \tilde{\varphi} \rangle, \quad \text{para todo } \tilde{\varphi} \in H_0^1(0, l).
\end{aligned}$$

Como $\kappa\psi_x - \lambda(\varphi - \psi) + g_2 \in L^2(0, l)$, obtemos pelo teorema da regularidade elíptica que $\varphi \in H^2(0, l)$ e

$$-\kappa\varphi_{xx} = \kappa\psi_x - \lambda(\varphi - u) + g_2,$$

ou seja,

$$-\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) = g_2.$$

Tomando $(0, 0, \tilde{\psi}, 0)$, então (3.21) é reduzido à

$$b\langle\psi_x, \tilde{\psi}_x\rangle + \kappa\langle\varphi_x + \psi, \tilde{\psi}\rangle = \langle g_3, \tilde{\psi}\rangle, \quad \text{para todo } \tilde{\psi} \in H_*^1(0, l),$$

Usando as definições de produto interno, obtemos

$$\langle b\psi_x, \tilde{\psi}_x\rangle = \langle -\kappa(\varphi_x + \psi) + g_3, \tilde{\psi}\rangle, \quad \text{para todo } \tilde{\psi} \in H_*^1(0, l). \quad (3.23)$$

Como $-\kappa(\varphi_x + \psi) + g_3 \in L_*^2(0, l)$, obtemos pelo teorema da regularidade elíptica que $\psi \in H^2(0, l)$ e

$$-b\psi_{xx} = -\kappa(\varphi_x + \psi) + g_3, \quad (3.24)$$

ou seja,

$$-b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = g_3.$$

Além disso, para toda $\tilde{\psi} \in H_*^1(0, l)$, tendo em mente (3.23) e (3.24), temos que

$$b\langle\psi_x, \tilde{\psi}_x\rangle = \langle -\kappa(\varphi_x + \psi) + g_3, \tilde{\psi}\rangle = -b\langle\psi_{xx}, \tilde{\psi}\rangle = -b\psi_x(x)\tilde{\psi}(x)\Big|_0^l + b\langle\psi_x, \tilde{\psi}_x\rangle. \quad (3.25)$$

Portanto,

$$b\psi_x(l)\tilde{\psi}(l) - b\psi_x(0)\tilde{\psi}(0) = 0, \quad \text{para todo } \tilde{\psi} \in H_*^1(0, l).$$

Consequentemente $\psi_x(l) = \psi_x(0) = 0$.

Tomando $(0, 0, 0, \tilde{\theta})$ em (3.21), temos

$$\delta\langle\theta_x, \tilde{\theta}_x\rangle = \langle g_4, \tilde{\theta}\rangle, \quad \text{para todo } \tilde{\theta} \in H_*^1(0, l). \quad (3.26)$$

Usando as definições de produto interno, obtemos

$$\langle \delta\theta_x, \tilde{\theta}_x\rangle = \langle g_4, \tilde{\theta}\rangle, \quad \text{para todo } \tilde{\theta} \in H_*^1(0, l). \quad (3.27)$$

Como $g_4 \in L_*^2(0, l)$, obtemos pelo teorema da regularidade elíptica que $\theta \in H^2(0, l)$ e

$$-\delta\theta_{xx} = g_4. \quad (3.28)$$

Além disso, para toda $\tilde{\theta} \in H_*^1(0, l)$, tendo em mente (3.26) e (3.28) temos que

$$\delta\langle\theta_x, \tilde{\theta}_x\rangle = \langle g_4, \tilde{\theta}\rangle = -\delta\langle\theta_{xx}, \tilde{\theta}\rangle = -\delta\theta_x(x)\tilde{\theta}(x)\Big|_0^l + \delta\langle\theta_x, \tilde{\theta}_x\rangle. \quad (3.29)$$

Portanto,

$$\delta\theta_x(l)\tilde{\theta}(l) - \delta\theta_x(0)\tilde{\theta}(0) = 0, \quad \text{para todo } \tilde{\theta} \in H_*^1(0, l).$$

Consequentemente $\theta_x(l) = \theta_x(0) = 0$.

Daí resulta que existem $u, \varphi \in H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)$ e $\psi, \theta \in H_*^2(0, l)$ com $\psi_x(0) = \psi_x(l) = \theta_x(0) = \theta_x(l) = 0$ tais que $(u, \varphi, \psi, \theta)$ é solução de (3.13)–(3.16). Pelas equações (3.6), (3.8) e (3.10) temos $v, \Phi \in H_0^1(0, l)$ and $\Psi \in H_*^1(0, l)$. Portanto, temos que existe uma solução única de $U \in D(\mathcal{A})$ tal que $-\mathcal{A}U = F$. Assim, concluímos que o operador $-\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}_1$ é sobrejetor.

Por fim, vamos mostrar que $(-\mathcal{A})^{-1}$ é contínuo. Multiplicando $-\mathcal{A}U = F$ por U , obtemos

$$-\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle F, U \rangle_{\mathcal{H}_1},$$

assim, tomando a parte real segue que

$$-\Re\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}_1} = \Re\langle F, U \rangle_{\mathcal{H}_1},$$

Usando a equação (3.5), obtemos

$$\mu\|\Psi\|^2 + \delta\|\theta_x\|^2 = \Re\langle F, U \rangle_{\mathcal{H}_1}. \quad (3.30)$$

Note que

$$\mu\|\Psi\|^2 + \delta\|\theta_x\|^2 \geq \min\{\mu, \delta\}\|\Psi\|^2 + \min\{\mu, \delta\}\|\theta_x\|^2 = \min\{\mu, \delta\}(\|\Psi\|^2 + \|\theta_x\|^2), \quad (3.31)$$

assim,

$$\min\{\mu, \delta\}\|\Psi\|^2 + \|\theta_x\|^2 \leq \mu\|\Psi\|^2 + \delta\|\theta_x\|^2 = \Re\langle F, U \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad (3.32)$$

resultando que

$$\|\Psi\|^2 + \|\theta_x\|^2 \leq \frac{1}{\min\{\mu, \delta\}} \Re\langle F, U \rangle_{\mathcal{H}_1}. \quad (3.33)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\|\Psi\|^2 + \|\theta_x\|^2 \leq \frac{1}{\min\{\mu, \delta\}} \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1}. \quad (3.34)$$

De onde resulta que

$$\|\Psi\|^2 \leq \frac{1}{\min\{\mu, \delta\}} \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1} \quad (3.35)$$

e

$$\|\theta_x\|^2 \leq \frac{1}{\min\{\mu, \delta\}} \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1}, \quad (3.36)$$

Usando desigualdade de Poincaré chegamos à

$$\|\theta\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|\theta_x\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1 \min\{\mu, \delta\}} \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1} \quad (3.37)$$

Multiplicando as equações (3.6) e (3.8), respectivamente, por $-\bar{v}$ e $-\bar{\Phi}$ e integrando em $(0, l)$ obtemos

$$\langle v, v \rangle = -\langle f_1, v \rangle \quad \text{e} \quad \langle \Phi, \Phi \rangle = -\langle f_3, \Phi \rangle, \quad (3.38)$$

assim,

$$\|v\|_2^2 = -\langle f_1, v \rangle \quad \text{e} \quad \|\Phi\|_2^2 = -\langle f_3, \Phi \rangle, \quad (3.39)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a definição da norma em $\mathcal{H}_1$ obtemos

$$\|v\|_2^2 = |\langle f_1, v \rangle| \leq \|f_1\|_2 \|v\|_2 \leq \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1}. \quad (3.40)$$

e

$$\|\Phi\|_2^2 = |\langle f_3, \Phi \rangle| \leq \|f_3\|_2 \|\Phi\|_2 \leq \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1}. \quad (3.41)$$

Agora, multiplicando as equações (3.7), (3.9) e (3.11), respectivamente, por $\bar{u}$, $\bar{\varphi}$ e $\bar{\psi}$ e integrando em $(0, l)$ obtemos

$$-\alpha \langle u_{xx}, u \rangle - \lambda \langle \varphi - u, u \rangle + \gamma \langle \theta_x, u \rangle = \langle f_2, u \rangle, \quad (3.42)$$

$$-\kappa \langle (\varphi_x + \psi)_x, \varphi \rangle + \lambda \langle \varphi - u, \varphi \rangle = \rho_1 \langle f_4, \varphi \rangle, \quad (3.43)$$

$$-b \langle \psi_{xx}, \psi \rangle + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \psi \rangle + \mu \langle \Psi, \psi \rangle = \rho_2 \langle f_6, \psi \rangle, \quad (3.44)$$

integrando por partes, obtemos

$$\alpha \|u_x\|_2^2 - \lambda \langle \varphi - u, u \rangle - \gamma \langle \theta, u_x \rangle = \langle f_2, u \rangle, \quad (3.45)$$

$$\kappa \langle \varphi_x + \psi, \varphi_x \rangle + \lambda \langle \varphi - u, \varphi \rangle = \rho_1 \langle f_4, \varphi \rangle, \quad (3.46)$$

$$b \|\psi_x\|_2^2 + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \psi \rangle + \mu \langle \Psi, \psi \rangle = \rho_2 \langle f_6, \psi \rangle, \quad (3.47)$$

adicionando as equações acima chegamos à

$$\begin{aligned} \alpha \|u_x\|_2^2 + \lambda \|\varphi - u\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 + \gamma \langle \theta, u_x \rangle + \mu \langle \Psi, \psi \rangle \\ = \langle f_2, u \rangle + \rho_1 \langle f_4, \varphi \rangle + \rho_2 \langle f_6, \psi \rangle, \end{aligned} \quad (3.48)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Young e desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
\gamma \langle \theta, u_x \rangle + \mu \langle \Psi, \psi \rangle &\geq -\gamma \|\theta\|_2 \|u_x\|_2 - \mu \|\Psi\|_2 \|\psi\|_2 \\
&\geq -\frac{1}{4\epsilon} (\gamma \|\theta\|_2)^2 - \epsilon \|u_x\|_2^2 - \frac{1}{4\epsilon} (\mu \|\Psi\|_2)^2 - \epsilon \|\psi\|_2^2 \\
&\geq -\frac{1}{4\epsilon} \gamma^2 \|\theta\|_2^2 - \epsilon \|u_x\|_2^2 - \frac{1}{4\epsilon} \mu^2 \|\Psi\|_2^2 - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \|\psi_x\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Substituindo (3.49) em (3.48) chegamos à

$$\begin{aligned}
(\alpha - \epsilon) \|u_x\|_2^2 + \lambda \|\varphi - u\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \left(b - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) \|\psi_x\|_2^2 - \frac{1}{4\epsilon} \gamma^2 \|\theta\|_2^2 - \frac{1}{4\epsilon} \mu^2 \|\Psi\|_2^2 \\
\leq \langle f_2, u \rangle + \rho_1 \langle f_4, \varphi \rangle + \rho_2 \langle f_6, \psi \rangle,
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Para $\epsilon = \max\{\frac{\alpha}{2}, \frac{b\lambda_1}{2}\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2} \|u_x\|_2^2 + \lambda \|\varphi - u\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x\|_2^2 &\leq \langle f_2, u \rangle + \rho_1 \langle f_4, \varphi \rangle + \rho_2 \langle f_6, \psi \rangle \\
&\quad + \frac{1}{4\epsilon} \gamma^2 \|\theta\|_2^2 + \frac{1}{4\epsilon} \mu^2 \|\Psi\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Usando (3.35) e (3.37), concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\alpha \|u_x\|_2^2 + \lambda \|\varphi - u\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1}. \tag{3.52}$$

Pelas estimativas (3.35), (3.37), (3.40), (3.41) e (3.52), obtemos

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 &= \|v\|_2^2 + \alpha \|u_x\|_2^2 + \rho_1 \|\Phi\|_2^2 + \rho_2 \|\Psi\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 + \lambda \|\varphi - u\|_2^2 + k \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \|\theta\|_2^2 \\
&\leq 2 \left(1 + \rho_1 + \frac{\rho_2}{\min\{\mu, \gamma\}} + \frac{1}{\lambda_1 \min\{\mu, \gamma\}} + C \right) \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1} \\
&\leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Assim, obtemos uma constante $K > 0$, tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq K \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}},$$

implicando que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1} \leq K \|F\|_{\mathcal{H}_1}, \tag{3.54}$$

Consequentemente,

$$\|(-\mathcal{A})^{-1} F\|_{\mathcal{H}_1} \leq K \|F\|_{\mathcal{H}_1}. \tag{3.55}$$

Provando assim a continuidade do operador $(-\mathcal{A})^{-1}$.

A partir da sobrejetividade do operador $-\mathcal{A}$ e da continuidade de $(-\mathcal{A})^{-1}$, concluímos que o número real zero está no resolvente do operador $\mathcal{A}$.

□

Lema 3.3. $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}_1$.

Demonstração. Para demonstrar este lema, utilizaremos o resultado que pode ser encontrado em [?], dado por

Proposição 3.1. *Seja M um subespaço vetorial de um espaço de Hilbert H . Então M é denso em H se, e somente se $M^\perp = 0$.*

Pelo teorema da aplicação aberta, temos que $\mathcal{A}^{-1}$ é um operador linear limitado. Seja $\beta \in \mathbb{C}$ tal que $\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} \leq \frac{1}{|\beta|}$, mostraremos inicialmente que $\beta I - \mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}_1$ é sobrejetiva. Para esse propósito, consideramos a composição $\beta I - \mathcal{A} = (\beta \mathcal{A}^{-1} - I)\mathcal{A}$, como $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}_1$ é sobrejetiva, basta mostrar que $\beta \mathcal{A}^{-1} - I : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ também é sobrejetiva. Dado $W \in \mathcal{H}_1$, definimos o funcional $\Phi : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ por $\Phi(U) = -W + \beta \mathcal{A}^{-1}U$. Observe que, para todos $U, V \in \mathcal{H}_1$, temos

$$\|\Phi(U) - \Phi(V)\|_{\mathcal{H}_1} = \|\beta \mathcal{A}^{-1}U - \beta \mathcal{A}^{-1}V\|_{\mathcal{H}_1} \leq |\beta| \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} \|U - V\|_{\mathcal{H}_1} \leq \|\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)\| \|U - V\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Assim, Φ é uma contração definida no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, segue-se que Φ tem um único ponto fixo $U \in \mathcal{H}_1$, isto é,

$$\Phi(U) = U, \tag{3.56}$$

implicando que

$$(\beta \mathcal{A}^{-1} - I)U = W, \tag{3.57}$$

provando assim a sobrejetividade de $\beta \mathcal{A}^{-1} - I$. Portanto, $\beta I - \mathcal{A}$ também é sobrejetiva.

Agora, vamos mostrar que $D(\mathcal{A})^\perp = \{0\}$. Seja $U \in D(\mathcal{A})^\perp \subset \mathcal{H}_1$, portanto, $\langle U, W \rangle_{\mathcal{H}_1} = 0$ para todo $W \in D(\mathcal{A})$. Como o operador $\beta I - \mathcal{A}$ é sobrejetivo, para todo β tal que $|\beta| \leq \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}}$, em particular, tomando β com $\Re\{\beta\} > 0$, temos a existência de $W \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$U = (\beta I - \mathcal{A})W \tag{3.58}$$

então,

$$\langle U, W \rangle_{\mathcal{H}_1} = 0 \iff \langle (\beta I - \mathcal{A})W, W \rangle_{\mathcal{H}_1} = 0 \iff \Re\{\beta\} \|W\|_{\mathcal{H}_1}^2 - \Re\langle \mathcal{A}W, W \rangle_{\mathcal{H}_1} = 0. \tag{3.59}$$

Pela dissipatividade do operador $\mathcal{A}$, segue-se que

$$\Re\{\beta\} \|W\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq 0. \tag{3.60}$$

Portanto,

$$\|W\|_{\mathcal{H}_1}^2 = 0 \iff W = 0. \tag{3.61}$$

E, devido à linearidade do operador $(\beta I - \mathcal{A})$, temos que

$$U = (\beta I - \mathcal{A})0 = 0. \quad (3.62)$$

Pelo qual concluímos que $D(\mathcal{A})^\perp = \{0\}$ e pela proposição (3.1) temos que $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}_1$. □

Proposição 3.2. *$\mathcal{A}$ gera um semigrupo C_0 de contrações $S(t) = e^{At}, t \geq 0$, no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$.*

Demonstração. Como $\mathcal{A}$ é dissipativo, densamente definido e $0 \in \rho(\mathcal{A})$, a prova desta proposição é uma consequência direta do Teorema de Lummer-Philips. □

Da Proposição 3.2, podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Seja $U_0 \in \mathcal{H}_1$. Então existe uma única solução U do problema (3.7) satisfatório*

$$U \in C^0([0, +\infty); \mathcal{H}_1). \quad (3.63)$$

Além disso, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então

$$U \in C^0([0, +\infty); D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, +\infty); \mathcal{H}_1). \quad (3.64)$$

Demonstração. Do teorema 1.5, $U(t) = e^{tA}U_0$ é solução única de (3.7) satisfazendo (3.63) ou (3.64). □

Capítulo 4

Análise de estabilidade

4.1 Lemas Técnicos

Considere a equação resolvente

$$(i\beta I - \mathcal{A})U = F, \quad (4.1)$$

com $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z, \theta)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)^\top \in \mathcal{H}$ e $\beta \in \mathbb{R}$. De (4.1) obtemos o sistema

$$i\beta u - v = f_1 \quad \text{in} \quad (0, l), \quad (4.2)$$

$$i\beta \rho v - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma \theta_x = \rho f_2 \quad \text{in} \quad (0, l), \quad (4.3)$$

$$i\beta \varphi - \Phi = f_3 \quad \text{in} \quad (0, l), \quad (4.4)$$

$$i\beta \rho_1 \Phi - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) = \rho_1 f_4 \quad \text{in} \quad (0, l), \quad (4.5)$$

$$i\beta \psi - \Psi = f_5 \quad \text{in} \quad (0, l), \quad (4.6)$$

$$i\beta \rho_2 \Psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \mu \Psi = \rho_2 f_6 \quad \text{in} \quad (0, l), \quad (4.7)$$

$$i\beta \theta - \delta \theta_{xx} + \gamma v_x = f_7 \quad \text{in} \quad (0, l). \quad (4.8)$$

Lema 4.1. *O conjunto resolvente do operador $\mathcal{A}$ contém o eixo imaginário, ou seja, $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Do Lema 3.2, $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Agora, seja $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, suponha que exista algum $i\beta$ que seja um autovalor do operador $\mathcal{A}$, ou seja, $\mathcal{A}U = i\beta U$ com $U \neq 0$. Obtemos que

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}_1} = i\beta \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2.$$

Tomando a parte real e usando o Lema 3.1 resulta que

$$-\mu \|\Psi\|_2^2 - \delta \|\theta_x\|_2^2 = 0.$$

Lgo, $\|\Psi\|_2 = \|\theta_x\|_2 = 0$, então $\Psi = 0$ e usando a desigualdade de Poincaré obtemos $0 \leq \lambda_1 \|\theta\|_2 \leq \|\theta_x\|_2 = 0$ e, consequentemente $\theta = 0$. Tomando $F = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^\top$, de (4.6) resulta que $\psi = 0$, de (4.7) temos que $\varphi_x = 0$, integrando em $(0, x)$ e usando a condição de contorno temos que $\varphi = 0$ e de (4.4) segue que $\Phi = 0$, de (4.5) temos que $u = 0$ e consequentemente, de (4.2) temos que $v = 0$. Isto é uma contradição, portanto não existem autovalores imaginários.

□

Lema 4.2. *Seja $U \in D(\mathcal{A})$ a solução do sistema (4.2)–(4.8). Então, existe uma constante positiva C_1 tal que*

$$\rho_2 \|\Psi\|_2^2 + \frac{1}{\lambda_1} \|\theta_x\|_2^2 \leq C_1 \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1}. \quad (4.9)$$

Demonstração. O produto interno de (4.1) por U em $\mathcal{H}_1$, resulta em

$$i\beta \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 - \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle F, U \rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

Tomando a parte real da equação acima, Obtemos segundo o lema (3.1) que

$$\mu \|\Psi\|_2^2 + \delta \|\theta_x\|_2^2 = \operatorname{Re} \langle F, U \rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

Finalmente, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz chegamos ao resultado esperado.

□

Lema 4.3. *Seja $U \in D(\mathcal{A})$ a solução do sistema (4.2)–(4.8). Então, para todo $\epsilon_1 > 0$, existe uma constante positiva C_{ϵ_1} , tal que*

$$\gamma \|v\|_2^2 \leq \epsilon_1 \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C_{\epsilon_1} \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1}. \quad (4.10)$$

Demonstração. Integrando a equação (4.8) em $(0, x)$, com $x \in (0, l)$, e usando a condição de contorno, obtemos

$$i\beta \int_0^x \theta(s) ds - \delta \theta_x + \gamma v = \int_0^x f_7(s) ds. \quad (4.11)$$

Multiplicando a equação (4.11) por $\bar{v}$ e integrando por partes em $(0, l)$, chegamos a

$$i\beta \left\langle \int_0^x \theta(s) ds, v \right\rangle - \delta \langle \theta_x, v \rangle + \gamma \|v\|_2^2 = \left\langle \int_0^x f_7(s) ds, v \right\rangle. \quad (4.12)$$

Da equação (4.5), temos que

$$-i\beta \rho \bar{v} - \alpha \overline{u_{xx}} - \lambda \overline{(\varphi - u)} + \gamma \overline{\theta_x} = \rho f_2. \quad (4.13)$$

Multiplicando a equação (4.13) por $\frac{1}{\rho} \int_0^x \theta(s) ds$ e integrando por partes em $(0, l)$, chegamos a

$$-i\beta \left\langle \int_0^x \theta(s) ds, v \right\rangle + \frac{\alpha}{\rho} \langle \theta, u_x \rangle - \frac{\lambda}{\rho} \left\langle \int_0^x \theta(s) ds, \varphi - u \right\rangle - \frac{\gamma}{\rho} \|\theta\|_2^2 = \left\langle \int_0^x \theta(s) ds, f_2 \right\rangle. \quad (4.14)$$

Somando as equações (4.12) e (4.14), chegamos a

$$-\delta \langle \theta_x, v \rangle + \gamma \|v\|_2^2 + \frac{\alpha}{\rho} \langle \theta, u_x \rangle - \frac{\lambda}{\rho} \left\langle \int_0^x \theta(s) ds, \varphi - u \right\rangle - \frac{\gamma}{\rho} \|\theta\|_2^2 = \left\langle \int_0^x f_7(s) ds, v \right\rangle + \left\langle \int_0^x \theta(s) ds, f_2 \right\rangle.$$

Utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young e Poincaré, obtemos

$$\gamma \|v\|_2^2 \leq \epsilon_1 (\alpha \|u_x\|_2^2 + \lambda \|\varphi - u\|_2^2) + C_{\epsilon_1} (\|\theta_x\|_2^2 + \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1}), \quad (4.15)$$

para todo $\epsilon_1 > 0$. Finalmente, para concluir a demonstração deste Lema, basta usar o Lema 4.2. $\square$

Lema 4.4. *Seja $U \in D(\mathcal{A})$ a solução do sistema (4.2)–(4.8). Então, para todo $\epsilon_2 > 0$, existe uma constante positiva C'_{ϵ_2} tal que*

$$\kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 \leq \epsilon_2 \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C'_{\epsilon_2} \left[|\beta| \left| \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right| |\langle \psi_x, \Phi \rangle| + \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1} \right]. \quad (4.16)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (4.7) por $\overline{\varphi_x + \psi}$ e integrando sobre $(0, l)$ obtemos

$$i\beta \rho_2 \langle \Psi, \varphi_x + \psi \rangle - b \langle \psi_{xx}, \varphi_x + \psi \rangle + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \varphi_x + \psi \rangle = \rho_2 \langle f_6, \varphi_x + \psi \rangle,$$

usando as propriedades de produto interno obtemos

$$i\beta \rho_2 \langle \Psi, \varphi_x \rangle + i\beta \rho_2 \langle \Psi, \psi \rangle - b \langle \psi_{xx}, \varphi_x + \psi \rangle + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 = \rho_2 \langle f_6, \varphi_x + \psi \rangle,$$

integrando por partes obtemos

$$-i\beta \rho_2 \langle \Psi_x, \varphi \rangle + i\beta \rho_2 \langle \Psi, \psi \rangle + b \langle \psi_x, (\varphi_x + \psi)_x \rangle + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 = \rho_2 \langle f_6, \varphi_x + \psi \rangle. \quad (4.17)$$

Da equação (4.5) temos que

$$-i\beta \rho_1 \overline{\Phi} - \kappa \overline{(\varphi_x + \psi)}_x + \lambda \overline{(\varphi - u)} = \rho_1 f_4. \quad (4.18)$$

Multiplicando a equação (4.18) por $\frac{b}{\kappa} \psi_x$ e integrando sobre $(0, l)$ obtemos

$$-i\beta \frac{\rho_1 b}{\kappa} \langle \psi_x, \Phi \rangle - b \langle \psi_x, (\varphi_x + \psi)_x \rangle + \frac{\lambda b}{\kappa} \langle \psi_x, \varphi - u \rangle = \frac{\rho_1 b}{\kappa} \langle \psi_x, f_4 \rangle.$$

Resultando que

$$-i\beta\frac{\rho_1 b}{\kappa}\langle\psi_x, \Phi\rangle - b\langle\psi_x, (\varphi_x + \psi)_x\rangle + \frac{\lambda b}{\kappa}\langle\psi_x, \varphi\rangle - \frac{\lambda b}{\kappa}\langle\psi_x, u\rangle = \frac{\rho_1 b}{\kappa}\langle\psi_x, f_4\rangle. \quad (4.19)$$

Integrando por partes chegamos à

$$-i\beta\frac{\rho_1 b}{\kappa}\langle\psi_x, \Phi\rangle - b\langle\psi_x, (\varphi_x + \psi)_x\rangle - \frac{\lambda b}{\kappa}\langle\psi, \varphi_x\rangle + \frac{\lambda b}{\kappa}\langle\psi, u_x\rangle = \frac{\rho_1 b}{\kappa}\langle\psi_x, f_4\rangle. \quad (4.20)$$

Adicionando as equações (4.17) e (4.20) obtemos

$$\begin{aligned} -i\beta\rho_2\langle\Psi_x, \varphi\rangle + i\beta\rho_2\langle\Psi, \psi\rangle - i\beta\frac{\rho_1 b}{\kappa}\langle\psi_x, \Phi\rangle + \kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2 - \frac{\lambda b}{\kappa}\langle\psi, \varphi_x\rangle \\ + \frac{\lambda b}{\kappa}\langle\psi, u_x\rangle = \rho_2\langle f_6, \varphi_x + \psi\rangle + \frac{\rho_1 b}{\kappa}\langle\psi_x, f_4\rangle. \end{aligned}$$

Usando (4.4), verifica-se que

$$\begin{aligned} \rho_2\langle\Psi_x, \Phi + f_3\rangle + i\beta\rho_2\langle\Psi, \psi\rangle - i\beta\frac{\rho_1 b}{\kappa}\langle\psi_x, \Phi\rangle + \kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \frac{\lambda b}{\kappa}\langle\psi_x, \varphi\rangle \\ - \frac{\lambda b}{\kappa}\langle\psi_x, u\rangle = \rho_2\langle f_6, \varphi_x + \psi\rangle + \frac{\rho_1 b}{\kappa}\langle\psi_x, f_4\rangle. \end{aligned}$$

De onde resulta que

$$\begin{aligned} \rho_2\langle\Psi_x, \Phi\rangle + i\beta\rho_2\langle\Psi, \psi\rangle - i\beta\frac{\rho_1 b}{\kappa}\langle\psi_x, \Phi\rangle + \kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2 - \frac{\lambda b}{\kappa}\langle\psi, \varphi_x\rangle \\ + \frac{\lambda b}{\kappa}\langle\psi, u_x\rangle = \rho_2\langle f_6, \varphi_x + \psi\rangle + \frac{\rho_1 b}{\kappa}\langle\psi_x, f_4\rangle - \rho_2\langle\Psi_x, f_3\rangle. \end{aligned}$$

Usando (4.6), verifica-se que

$$\begin{aligned} \rho_2\langle(i\beta\psi + f_5)_x, \Phi\rangle - \rho_2\langle\Psi, \Psi + f_5\rangle - i\beta\frac{\rho_1 b}{\kappa}\langle\psi_x, \Phi\rangle + \kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2 - \frac{\lambda b}{\kappa}\langle-\frac{i}{\beta}(\Psi + f_5), \varphi_x\rangle \\ + \frac{\lambda b}{\kappa}\langle-\frac{i}{\beta}(\Psi + f_5), u_x\rangle = \rho_2\langle f_6, \varphi_x + \psi\rangle + \frac{\rho_1 b}{\kappa}\langle\psi_x, f_4\rangle - \rho_2\langle\Psi_x, f_3\rangle. \end{aligned}$$

De onde resulta que

$$\begin{aligned} i\beta\rho_2\langle\psi_x, \Phi\rangle + \rho_2\langle f_{5x}, \Phi\rangle - \rho_2\|\Psi\|_2^2 - \rho_2\langle\Psi, f_5\rangle - i\beta\frac{\rho_1 b}{\kappa}\langle\psi_x, \Phi\rangle + \kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + i\frac{\lambda b}{\kappa\beta}\langle\Psi, \varphi_x\rangle \\ + i\frac{\lambda b}{\kappa\beta}\langle f_5, \varphi_x\rangle - i\frac{\lambda b}{\kappa\beta}\langle\Psi, u_x\rangle - i\frac{\lambda b}{\kappa\beta}\langle f_5, u_x\rangle = \rho_2\langle f_6, \varphi_x + \psi\rangle + \frac{\rho_1 b}{\kappa}\langle\psi_x, f_4\rangle - \rho_2\langle\Psi_x, f_3\rangle. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} \kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2 = -i\beta b\left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa}\right)\langle\psi_x, \Phi\rangle - \rho_2\langle f_{5x}, \Phi\rangle + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_2\langle\Psi, f_5\rangle \\ - i\frac{\lambda b}{\kappa\beta}\langle\Psi, \varphi_x\rangle - i\frac{\lambda b}{\kappa\beta}\langle f_5, \varphi_x\rangle + i\frac{\lambda b}{\kappa\beta}\langle\Psi, u_x\rangle + i\frac{\lambda b}{\kappa\beta}\langle f_5, u_x\rangle \\ + \rho_2\langle f_6, \varphi_x + \psi\rangle + \frac{\rho_1 b}{\kappa}\langle\psi_x, f_4\rangle - \rho_2\langle\Psi_x, f_3\rangle. \end{aligned}$$

Utilizando as desigualdades de Cauchy-Shwarz, Young e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 &\leq \epsilon_2 \left(\frac{1}{\kappa_0} \|\varphi_x\|_2^2 + \alpha \|u_x\|_2^2 \right) \\ &\quad + C'_{\epsilon_2} \left[|\beta| \left| \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right| |\langle \psi_x, \Phi \rangle| + \|\Psi\|_2^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1} \right], \end{aligned}$$

para todo $\epsilon_2 > 0$. Para completar a demonstração, usamos os Lemas 2.1 e 4.2.

□

Lema 4.5. *Seja $U \in D(\mathcal{A})$ a solução do sistema (4.2)–(4.8). Existem constantes positivas C_2 e C''_{ϵ_2} , tais que*

$$b \|\psi_x\|_2^2 \leq \epsilon_2 C_2 \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C''_{\epsilon_2} \left[|\beta| \left| \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right| |\langle \psi_x, \Phi \rangle| + \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1} \right]. \quad (4.21)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (4.7) por $\bar{\psi}$ e integrando em $(0, l)$, chegamos a

$$i\beta\rho_2 \langle \Psi, \psi \rangle - b \langle \psi_{xx}, \psi \rangle + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \psi \rangle + \mu \langle \Psi, \psi \rangle = \rho_2 \langle f_6, \psi \rangle. \quad (4.22)$$

Integrando por partes, obtemos

$$i\beta\rho_2 \langle \Psi, \psi \rangle + b \|\psi_x\|_2^2 + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \psi \rangle + \mu \langle \Psi, \psi \rangle = \rho_2 \langle f_6, \psi \rangle. \quad (4.23)$$

Da equação (4.6) resulta que

$$-\rho_2 \langle \Psi, \Psi + f_5 \rangle + b \|\psi_x\|_2^2 + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \psi \rangle + \mu \langle \Psi, \psi \rangle = \rho_2 \langle f_6, \psi \rangle, \quad (4.24)$$

implicando em

$$-\rho_2 \|\Psi\|_2^2 - \rho_2 \langle \Psi, f_5 \rangle + b \|\psi_x\|_2^2 + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \psi \rangle + \mu \langle \Psi, \psi \rangle = \rho_2 \langle f_6, \psi \rangle, \quad (4.25)$$

Consequentemente, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young e Poincaré e os Lemas 4.2 e 4.4 finalizamos a prova deste lema.

□

Lema 4.6. *Seja $U \in D(\mathcal{A})$ a solução do sistema (4.2)–(4.8). Então, existem constantes positivas C_3 e $C'_{\epsilon_1, \epsilon_2}$, tais que*

$$\alpha \|u_x\|_2^2 \leq C_3(\epsilon_1 + \epsilon_2) \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C'_{\epsilon_1, \epsilon_2} \left[|\beta| \left| \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right| |\langle \psi_x, \Phi \rangle| + \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1} \right] \quad (4.26)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (4.3) por $\bar{u}$, e integrando por partes sobre $(0, l)$ obtemos

$$i\beta\rho \langle v, u \rangle + \alpha \|u_x\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 - \lambda \langle \varphi, u \rangle + \gamma \langle \theta_x, u \rangle = \rho \langle f_2, u \rangle.$$

Das equação (4.2), segue que

$$-\rho\|v\|_2^2 - \rho\langle v, f_1 \rangle + \alpha\|u_x\|_2^2 + \lambda\|u\|_2^2 - \lambda\langle \varphi, u \rangle + \gamma\langle \theta_x, u \rangle = \rho\langle f_2, u \rangle.$$

Resultando em

$$\alpha\|u_x\|_2^2 = \rho\|v\|_2^2 + \rho\langle v, f_1 \rangle - \lambda\|u\|_2^2 + \lambda\langle \varphi, u \rangle - \gamma\langle \theta_x, u \rangle + \rho\langle f_2, u \rangle. \quad (4.27)$$

Utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young e Poincaré, obtemos

$$\alpha\|u_x\|_2^2 \leq \rho\|v\|_2^2 + C_3 \frac{1}{\gamma_0} \|\varphi\|_2^2 + C_3 (\|\theta_x\|_2^2 + \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1}).$$

Usando a desigualdade (2.13), chegamos a

$$\alpha\|u_x\|_2^2 \leq \rho\|v\|_2^2 + C'_3(\kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2) + C'_3 (\|\theta_x\|_2^2 + \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1}).$$

Para completar a demonstração, usamos os Lemas 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5.

□

Lema 4.7. *Seja $U \in D(\mathcal{A})$ a solução do sistema (4.2)–(4.8). Existem constantes positivas C_4 e C_{ϵ_2}''' , tais que*

$$\rho_1\|\Phi\|_2^2 \leq C_4(\epsilon_1 + \epsilon_2)\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C_{\epsilon_1, \epsilon_2}''' \left[|\beta| \left| \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right| |\langle \psi_x, \Phi \rangle| + \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1} \right] \quad (4.28)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (4.5) por $-\bar{\varphi}$ e integrando sobre $(0, l)$ obtemos

$$-i\beta\rho_1\langle \Phi, \varphi \rangle + \kappa\langle (\varphi_x + \psi)_x, \varphi \rangle - \lambda\langle \varphi - u, \varphi \rangle = -\rho_1\langle f_4, \varphi \rangle.$$

Integrando por partes, obtemos

$$-i\beta\rho_1\langle \Phi, \varphi \rangle - \kappa\langle \varphi_x + \psi, \varphi_x \rangle - \lambda\langle \varphi - u, \varphi \rangle = -\rho_1\langle f_4, \varphi \rangle.$$

Da equação (4.4), resulta que

$$\rho_1\langle \Phi, \Phi + f_3 \rangle - \kappa\langle \varphi_x + \psi, \varphi_x \rangle - \lambda\langle \varphi - u, \varphi \rangle = -\rho_1\langle f_4, \varphi \rangle.$$

implicando em

$$\rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_1 b\langle \Phi, f_3 \rangle - \kappa\langle \varphi_x + \psi, \varphi_x \rangle - \lambda\|\varphi\|_2^2 + \lambda\langle u, \varphi \rangle = -\rho_1\langle f_4, \varphi \rangle.$$

Note que

$$\langle \varphi_x + \psi, \varphi_x \rangle = \langle \varphi_x + \psi, \varphi_x + \psi - \psi \rangle = \|\varphi_x + \psi\|_2^2 - \langle \varphi_x + \psi, \psi \rangle, \quad (4.29)$$

logo,

$$\rho_1 \|\Phi\|_2^2 + \rho_1 b \langle \Phi, f_3 \rangle - \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \psi \rangle - \lambda \|\varphi\|_2^2 + \lambda \langle u, \varphi \rangle = -\rho_1 \langle f_4, \varphi \rangle.$$

resultando que

$$\rho_1 \|\Phi\|_2^2 = -\rho_1 b \langle \Phi, f_3 \rangle + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 - \kappa \langle \varphi_x + \psi, \psi \rangle + \lambda \|\varphi\|_2^2 - \lambda \langle u, \varphi \rangle - \rho_1 \langle f_4, \varphi \rangle,$$

Finalizamos a prova deste lema, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young, Poincaré e (2.13) e os Lemas 4.4, 4.5 e 4.6.

□

4.2 Estabilidade exponencial

O principal resultado desta seção é apresentado na forma do seguinte teorema:

Teorema 4.1. *O semigrupo associado $S(t) = e^{At}$ é exponencialmente estável se, e somente se, a relação*

$$\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} = 0 \quad (4.30)$$

for verdadeira.

Demonstração. Pelo Lema 4.1, temos que o eixo imaginário está contido no resolvente do operador $\mathcal{A}$. Então, se assumirmos que a relação (4.30) é verdadeira, mostraremos que

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty. \quad (4.31)$$

De fato, usando a equivalência entre da norma $\|U\|_{\mathcal{H}_1}$ dada no Lema 2.2 e os Lemas 4.2–4.7 com $\epsilon_i = \epsilon$ ($i = 1, 2$) obtemos uma constante positiva C tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \epsilon C \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C_\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Usando a desigualdade de Young e escolhendo ϵ adequado, obtemos uma constante positiva C tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}_1}. \quad (4.32)$$

Com base nisso, concluímos que

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} \leq C.$$

Portanto, o teorema (1.7) garante que o semigrupo $S(t)$ é exponencialmente estável.

Agora, assumindo que (4.30) não é verdadeiro, nosso objetivo é mostrar que o limite dado em (1.8) é infinito. Para isso, mostraremos que existem sequências $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(\mathcal{A})$ e $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_1$, tais que $|\beta_n| \rightarrow \infty$ e a equação (4.1) é satisfeita, onde (F_n) é limitado em $\mathcal{H}_1$, mas $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1}$ tende ao infinito. Reescrevendo a equação resolvente (4.1) em termos de seus componentes com $U_n = (u_n, v_n, \varphi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n, \theta_n)^\top$ e $F_n = (0, 0, 0, \rho_1^{-1} \sin(\sigma_n x), 0, 0, 0)^\top$ onde $\sigma_n := \frac{n\pi}{l}$. Para simplificar a notação, omitiremos o índice n das sequências. Assim,

$$(i\beta I - \mathcal{A})U = F, \quad (4.33)$$

é equivalente a

$$i\beta u - v = 0, \quad (4.34)$$

$$i\beta v - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma \theta_x = 0, \quad (4.35)$$

$$i\beta \varphi - \Phi = 0, \quad (4.36)$$

$$i\beta \rho_1 \Phi - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) = \sin(\sigma_n x), \quad (4.37)$$

$$i\beta \psi - \Psi = 0, \quad (4.38)$$

$$i\beta \rho_2 \Phi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \mu \Psi = 0, \quad (4.39)$$

$$i\beta \theta - \delta \theta_{xx} + \gamma v_x = 0. \quad (4.40)$$

De (4.34), (4.36) e (4.38), obtemos $v = i\beta u$, $\Phi = i\beta \varphi$ and $\Psi = i\beta \psi$. Então podemos escrever

$$(-\beta^2 + \lambda)u - \alpha u_{xx} - \lambda\varphi + \gamma \theta_x = 0, \quad (4.41)$$

$$(-\beta^2 \rho_1 + \lambda)\varphi - \kappa \varphi_{xx} - \kappa \psi_x - \lambda u = \sin(\sigma_n x), \quad (4.42)$$

$$(-\beta^2 \rho_2 + \kappa + i\beta \mu)\psi - b\psi_{xx} + \kappa \varphi_x = 0, \quad (4.43)$$

$$i\beta \theta - \delta \theta_{xx} + i\beta \gamma u_x = 0. \quad (4.44)$$

Devido às condições de contorno (8), as funções dadas por

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbf{A} \sin(\sigma_n x), & \varphi(x) &= \mathbf{B} \sin(\sigma_n x), \\ \psi(x) &= \mathbf{C} \cos(\sigma_n x), & \theta(x) &= \mathbf{D} \cos(\sigma_n x), \end{aligned}$$

onde $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\beta$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\beta$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}_\beta$ and $\mathbf{D} = \mathbf{D}_\beta$ devem ser determinados. Assim, para resolver o sistema (4.41)–(4.44) somente se $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ satisfizerem

$$\left(-\beta^2 + \lambda + \sigma_n^2 \alpha\right) \mathbf{A} - \lambda \mathbf{B} - \sigma_n \gamma \mathbf{D} = 0, \quad (4.45)$$

$$-\lambda \mathbf{A} + \left(-\beta^2 \rho_1 + \lambda + \sigma_n^2 \kappa\right) \mathbf{B} + \sigma_n \kappa \mathbf{C} = 1, \quad (4.46)$$

$$\sigma_n \kappa \mathbf{B} + \left(-\beta^2 \rho_2 + \kappa + \sigma_n^2 b + i\beta \mu\right) \mathbf{C} = 0, \quad (4.47)$$

$$i\sigma_n \beta \gamma \mathbf{A} + (i\beta + \sigma_n^2 \delta) \mathbf{D} = 0. \quad (4.48)$$

De (4.48) temos

$$\mathbf{D} = -\frac{i\sigma_n\beta\gamma}{i\beta + \sigma_n^2\delta}\mathbf{A} \quad (4.49)$$

Substituindo (4.49) em (4.45), obtemos

$$\left(-\beta^2 + \lambda + \sigma_n^2\alpha + \frac{i\sigma_n^2\beta\gamma^2}{i\beta + \sigma_n^2\delta}\right)\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B} = 0, \quad (4.50)$$

$$-\lambda\mathbf{A} + \left(-\beta^2\rho_1 + \lambda + \sigma_n^2\kappa\right)\mathbf{B} + \sigma_n\kappa\mathbf{C} = 1, \quad (4.51)$$

$$\sigma_n\kappa\mathbf{B} + \left(-\beta^2\rho_2 + \kappa + \sigma_n^2b + i\beta\mu\right)\mathbf{C} = 0. \quad (4.52)$$

Tomando $\beta = \sqrt{\frac{\lambda + \kappa\sigma_n^2}{\rho_1}}$, obtemos

$$\left[\left(\alpha - \frac{\kappa}{\rho_1}\right)\sigma_n^2 + \frac{i\sigma_n^2\beta\gamma^2}{i\beta + \sigma_n^2\delta}\right]\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B} = 0, \quad (4.53)$$

$$-\lambda\mathbf{A} + \sigma_n\kappa\mathbf{C} = 1, \quad (4.54)$$

$$\sigma_n\kappa\mathbf{B} + \left(\left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1}\right)\rho_2\sigma_n^2 + \kappa - \frac{\lambda\rho_2}{\rho_1} + i\beta\mu\right)\mathbf{C} = 0. \quad (4.55)$$

Escrevendo,

$$P_1 = \left(\alpha - \frac{\kappa}{\rho_1}\right)\sigma_n^2 + \frac{i\sigma_n^2\beta\gamma^2}{i\beta + \sigma_n^2\delta}, \quad P_2 = \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1}\right)\rho_2\sigma_n^2 + \kappa - \frac{\lambda\rho_2}{\rho_1} + i\beta\mu,$$

O sistema (4.53)–(4.55), pode ser reescrito da seguinte forma

$$P_1\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B} = 0, \quad (4.56)$$

$$-\lambda\mathbf{A} + \sigma_n\kappa\mathbf{C} = 1, \quad (4.57)$$

$$\sigma_n\kappa\mathbf{B} + P_2\mathbf{C} = 0. \quad (4.58)$$

Resolvendo o sistema acima, concluímos que

$$\mathbf{B} = -\frac{P_1P_2}{\sigma_n^2\kappa^2P_1 + \lambda^2P_2}, \quad (4.59)$$

Obtemos para $\frac{\kappa}{\rho_1} \neq \frac{b}{\rho_2}$ que

$$|\mathbf{B}| = \left|\frac{P_1P_2}{\sigma_n^2\kappa^2P_1 + \lambda^2P_2}\right| \rightarrow \rho_2 \left|\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1}\right| > 0, \quad \text{com } n \rightarrow \infty. \quad (4.60)$$

Tendo em mente que $\Phi_n(x) = i\beta_n\varphi_n(x) = i\beta_n\mathbf{B}\sin(\sigma_nx)$ temos

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \rho_1\|\Phi_n\|_2^2 = \rho_1\beta_n^2\mathbf{B}^2\|\sin(\sigma_nx)\|_2^2 = \rho_1\beta_n^2\mathbf{B}^2\int_0^l |\sin(\sigma_nx)|^2 dx = \rho_1\beta_n^2\mathbf{B}^2\frac{l}{2}, \quad (4.61)$$

ou seja,

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}} \geq \beta_n|\mathbf{B}|\sqrt{\frac{l\rho_1}{2}}, \quad (4.62)$$

Portanto, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}} = \infty, \quad (4.63)$$

implicando que

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} = \infty.$$

□

4.3 Estabilidade polinomial

Nesta seção, apresentamos o resultado de estabilidade polinomial para o caso em que (4.30) não é verdadeiro. Isso é expresso na forma do seguinte teorema:

Teorema 4.2. *Se (4.30) não for verdadeiro, então o semigrupo $C_0 S(t)$ é polinomialmente estável e satisfaz*

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|U_0\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad (4.64)$$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração. Supondo que (4.30) não seja verdadeiro, isto é,

$$\frac{\kappa}{\rho_1} \neq \frac{b}{\rho_2},$$

resulta dos Lemas 4.2–4.7 que existem constantes positivas C e $C_{\epsilon_1 \epsilon_2}$, tais que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq (\epsilon_1 + \epsilon_2)C \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C_{\epsilon_1 \epsilon_2} \left[|\beta| |\langle \psi_x, \Phi \rangle| + \left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right) \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1} \right]. \quad (4.65)$$

Escolhendo $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{1}{4C}$, obtemos uma constante positiva C tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C \left[|\beta| |\langle \psi_x, \Phi \rangle| + \left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right) \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1} \right]. \quad (4.66)$$

Note que

$$|\beta| |\langle \psi_x, \Phi \rangle| = |\langle i\beta \psi_x, \Phi \rangle|. \quad (4.67)$$

Da equação (4.6) obtemos

$$|\beta| |\langle \psi_x, \Phi \rangle| = |\langle \Psi_x + f_{5x}, \Phi \rangle| = |\langle \Psi_x, \Phi \rangle + \langle f_{5x}, \Phi \rangle|. \quad (4.68)$$

Da equação (4.4) obtemos

$$|\beta| |\langle \psi_x, \Phi \rangle| = |\langle \Psi_x, i\beta \varphi - f_3 \rangle + \langle f_{5x}, \Phi \rangle| = | -i\beta \langle \Psi_x, \varphi \rangle - \langle \Psi_x, f_3 \rangle + \langle f_{5x}, \Phi \rangle |, \quad (4.69)$$

usando as propriedades de módulo, obtemos

$$|\beta| |\langle \psi_x, \Phi \rangle| \leq |\beta| |\langle \Psi_x, \varphi \rangle| + |\langle \Psi_x, f_3 \rangle| + |\langle f_{5x}, \Phi \rangle|, \quad (4.70)$$

integrando por partes obtemos

$$|\beta| |\langle \psi_x, \Phi \rangle| \leq |\beta| |\langle \Psi, \varphi_x \rangle| + |\langle \Psi, f_{3x} \rangle| + |\langle f_{5x}, \Phi \rangle|. \quad (4.71)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$|\beta| |\langle \psi_x, \Phi \rangle| \leq |\beta| \|\Psi\|_2 \|\varphi_x\|_2 + \|\Psi\|_2 \|f_{3x}\|_2 + \|f_{5x}\|_2 \|\Phi\|_2. \quad (4.72)$$

Usando a desigualdade Young, temos que, para todo $\epsilon_3 > 0$ vale que

$$|\beta| |\langle \psi_x, \Phi \rangle| \leq C_{\epsilon_3} |\beta|^2 \|\Psi\|_2^2 + \epsilon_3 \|\varphi_x\|_2^2 + \|\Psi\|_2 \|f_{3x}\|_2 + \|f_{5x}\|_2 \|\Phi\|_2. \quad (4.73)$$

Usando o lema (4.2), o lema (2.1) e a definição de $\|U\|_{\mathcal{H}_1}$ chegamos à

$$|\beta| |\langle \psi_x, \Phi \rangle| \leq \epsilon_3 \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C_{\epsilon_3} (\beta^2 + |\beta| + 1) \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1}. \quad (4.74)$$

Assim, chegamos a

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C_{\epsilon_3} \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C \left(C_{\epsilon_3} (\beta^2 + 1) + 1 + \frac{1}{\beta^2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1}. \quad (4.75)$$

Escolhendo $\epsilon_3 = \frac{1}{2C}$ obtemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq 2C \left(C_{\epsilon_3} (\beta^2 + 1) + 1 + \frac{1}{\beta^2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1}. \quad (4.76)$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos uma constante positiva C tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1} \leq C \beta^2 \|F\|_{\mathcal{H}_1}, \quad (4.77)$$

desde de que $|\beta| > 1$. So,

$$\frac{1}{\beta^2} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} \leq C, \quad \text{quando } |\beta| \rightarrow \infty. \quad (4.78)$$

Então usando o teorema de Borichev e Tomilov [2] obtemos

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} \leq \frac{C}{t^{1/2}}. \quad (4.79)$$

implicando que para todo $F \in \mathcal{H}_1$ segue-se que

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|F\|_{\mathcal{H}_1}. \quad (4.80)$$

Como zero pertence ao resolvente do operador $\mathcal{A}$, segue-se que $\mathcal{A}$ é sobrejetivo sobre $\mathcal{H}_1$, então, tomando $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}U_0 = F$, obtemos

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|U_0\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.81)$$

Portanto, o semigrupo $S(t)$ é polinomialmente estável.

□

Capítulo 5

Conclusões e trabalhos futuros

Este trabalho trouxe respostas interessantes para o contexto de estabilidades de estruturas pontes suspensas, pois o mesmo mostrou que a termo dinâmica dos cabos de suspensão influenciam diretamente na estabilidade das soluções, no entanto, não conseguimos estimativas regulares bastantes para mostrar a taxa ótima do decaimento polinomial. Para trabalhos futuros, podemos analisar a dinâmica termo elástica usando a lei de Cattaneo, essa mudança traria para o modelo concitos físicos mais realistas.

Bibliografia

- [1] A. Pazy. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. *Springer*, New York, 1983.
- [2] A. Borichev and Y. Tomilov, Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups, *Mathematische Annalen* **347**(10) (2009), 455–478.
- [3] B. D. Reddy. Introductory Functional Analysis with Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements. *Springer*, New York, 1998.
- [4] C. R. de Oliveira. Introdução à Análise Funcional. *IMPA*, Rio de Janeiro, 2014.
- [5] Raposo C, Correia L, Ribeiro J, Cunha A. Suspension bridge with internal damping. *Acta Mech* **235** (2024) 203–214. <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03744-7>
- [6] F.L. Huang, Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems Hilbert spaces, *Annals of Differential Equations* **1** (1985), 43–56.
- [7] J. Prüss, On the spectrum of C_0 -semigroups, *Transactions of the AMS* **28** (1984), 847–857.
- [8] J. C. Robinson. An Introduction to Functional Analysis. *Cambridge University Press*, Cambridge, 2020.
- [9] L.M. Gearhart, Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert Space, *Transactions of the American Mathematical Society* **236** (1978), 385–394.
- [10] L. Gutemberg, C. Raposo, L. Correia and J. Ribeiro, Stability analysis of a partially damped suspension bridge by friction, *Electronic Journal of Mathematics* **8** (2024), 1–18.
- [11] L. G. R. Miranda, A. J. A. Ramos, C. A. Nonato, C. A. Raposo and F. A. F. Nascimento, Suspension bridges with thermoelasticity acting on the shear force, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, ZAMP* **84** (2025), 1–18.

- [12] S.E. Mukiawa, C.D. Enyi and S.A. Messaoudi, Stability of thermoelastic Timoshenko beam with suspenders and time-varying feedback, *Advances in Continuous and Discrete Models* **7** (2023), 2023.
- [13] S.P. Timoshenko, On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *Philosophical Magazine* **41**(245) (1921), 744–746.