



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
LICENCIATURA EM FÍSICA

SISTEMAS DINÂMICOS APLICADOS NO
PROBLEMA DE TRÊS CORPOS

Abaetetuba - Pará

2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
LICENCIATURA EM FÍSICA

Sistemas Dinâmicos Aplicados no Problema de Três Corpos

Luciano José Barbosa Quaresma
Orientador: Prof. Dr. Manuel Eleutério Rodrigues

Abaetetuba - Pará

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Q1s Quaresma, Luciano José Barbosa.
Sistemas Dinâmicos Aplicados no Problema de Três Corpos /
Luciano José Barbosa Quaresma. — 2017.
117 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Manuel Eleutério Rodrigues
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de
Física, Abaetetuba, 2017.

1. Sistemas inâmicos. 2. Problema de três corpos. 3.
Expoentes de Lyapunov. I. Título.

CDD 530

Sistemas Dinâmicos Aplicados no Problema de Três Corpos

Luciano José Barbosa Quaresma

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado e aprovado, para a obtenção do título de Licenciado em nome do curso pelo corpo docente da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba.

Orientador: Prof. Dr. Manuel Eleutério Rodrigues

Banca Examinadora

Prof. Dr. Manuel Eleutério Rodrigues

Prof. Dr. Messias de Souza Costa

Prof. Dr. Gabriel Adolfo Cabrera Pasca

Abaetetuba - Pará

2017

*“À Mente Humana e todas as
maravilhas que ela já
desvendou e ainda
desvendará.”*

Agradecimentos

Tenho muitos agradecimentos por vários motivos, dentre os quais destaco:

- a Deus, por tudo.
- aos meus pais, Lúcio e Joana, pelo incentivo constante durante toda minha vida.
- ao meu irmão, Lúcio, por me apresentar a Ciência.
- a minha namorada, Débora, por me completar.
- a minha turma, física 2013, da qual levarei irmãos e irmãs para a vida toda.
- ao meu orientador, Prof. Dr. Manuel Eleutério Rodrigues, por direcionar e contribuir com meus estudos.
- a todos os meus professores, os quais foram imprescindíveis para cada etapa da minha formação.
- aos médicos que garantiram minha saúde quando mais precisei.
- ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), do CNPq, pelo incentivo financeiro.

*“I... a universe of atoms, an
atom in the universe.”*

Richard P. Feynman

Resumo

Sistemas Dinâmicos Aplicados no Problema de Três Corpos

Luciano José Barbosa Quaresma

Orientador: Prof. Dr. Manuel Eleutério Rodrigues

Resumo da Monografia apresentada como parte dos requisitos necessários para a graduação em Licenciatura em Física da Universidade Federal do Pará.

Um problema bem conhecido na mecânica é o de três corpos, no qual temos três massas interagindo unicamente através de suas forças gravitacionais mútuas. Dentre os métodos empregados em sua solução, entre analíticos e numéricos, apresentamos, neste trabalho, uma abordagem computacional através de sistemas dinâmicos. Para isso, apresentamos os conceitos fundamentais sobre esta ferramenta matemática, com destaque para estabilidade e os expoentes de Lyapunov, utilizando vários exemplos construídos com o auxílio dos softwares matemáticos wxMaxima, Maple e Mathematica. Para tratar do problema de três corpos, fizemos um breve histórico e o formulamos a partir da lei da gravitação universal e da segunda lei de Newton, restringindo o movimento ao plano $x - y$, para, assim, reduzir de 18 para 12 o número de equações necessárias no sistema dinâmico associado. Utilizando os softwares, então, plotamos as trajetórias dos corpos para algumas soluções conhecidas e utilizamos os expoentes de Lyapunov para estudar suas estabilidades. Como esperado, em todos os casos estes expoentes indicaram caos neste sistema, o que implica na instabilidade das soluções estudadas, bem como em uma grande sensibilidade às condições iniciais. Este trabalho mostra, desta forma, um método para a combinação de processos analíticos e numéricos, para obtermos informações qualitativas importantes para sistemas dinâmicos de interesse, através de softwares computacionais.

Palavras-chave: Sistemas inâmicos. Problema de três corpos. Expoentes de Lyapunov.

Abstract

Dynamical Systems Applied on the Three-body Problem

Luciano José Barbosa Quaresma

Orientador: Prof. Dr. Manuel Eleutério Rodrigues

Abstract da Monografia apresentada como parte dos requisitos necessários para a graduação em Licenciatura em Física da Universidade Federal do Pará.

A well-known problem in mechanics is the three-body problem, in which we have three masses interacting only by their mutual gravitational force. Between the methods employed in its solution, from analytical to numerical, we present, in this work, a computational approach using dynamical systems. To do this, we show the fundamental concepts about this mathematical tool, highlighting the stability and the Lyapunov exponents, using several examples built with the mathematical softwares wxMaxima, Maple e Mathematica. To treat the three-body problem, we did a brief historic and formulated it beginning with the universal law of gravitation and the second Newton's law, restricting the movement to the $x - y$ plane, to, thus, reduce from 18 to 12 the number of equations that are necessary in the associated dynamical system. By using the softwares, thus, we plot the trajectories of the bodies for some known solutions and we have used the Lyapunov exponents to study their stability. As expected, in all the cases these exponents indicated chaos in this system, which implies in the instability of the studied solutions, as well a great sensibility to the initial conditions. This work shows, then, a method to the combination of analytical and numerical processes, aiming in obtaining important qualitative informations for dynamical systems of interest, by using computational softwares.

Keywords: Dynamical systems. Three-body problem. Lyapunov exponents.

Abaetetuba - Pará

2017

Lista de Figuras

1.1	Representação da Definição de um Atrator	16
1.2	Nó Estável do Sistema (1.26)	23
1.3	Nó Estável do Sistema (1.28)	24
1.4	Nó Instável do Sistema (1.29)	26
1.5	Ponto de Sela do Sistema (1.31)	27
1.6	Ponto de Sela do Sistema (1.33)	28
1.7	Espiral Estável do Sistema (1.34)	30
1.8	Espiral Instável do Sistema (1.37)	32
1.9	Rotor do Sistema (1.39)	33
1.10	Nó Próprio do Sistema (1.41)	35
1.11	Nó Impróprio do Sistema (1.43)	36
1.12	Ponto Fixo Não-hiperbólico do Sistema (1.45)	38
1.13	Representação da classificação dos Pontos Fixos	39
1.14	Espaço de Fase do Sistema (1.57) com quatro Pontos Fixos	42
1.15	Espaço de Fase do Sistema (1.57)	44
1.16	Espaço de Fase do Sistema (1.61) com um Ciclo Limite	46
1.17	Espaço de Fase de um Oscilador Harmônico Simples	49
1.18	Espaço de Fase do Oscilador de van der Pol com Não-Linearidade Fraca	50
1.19	Espaço de Fase do Oscilador de van der Pol com Não-Linearidade Forte	51
2.1	Espaços de Fase do Sistema (2.1)	55
2.2	espaços de Fase do Sistema (2.6)	56
2.3	Espaços de Fase do Sistema (2.14)	58
2.4	Ilustração dos Conceitos de Estabilidade de Lyapunov e Orbital	59
2.5	Ilustração das diferenças entre os conceitos de Estabilidade	60
2.6	Diagrama de um Pêndulo Simples	74
2.7	Espaço de Fase de um Pêndulo Simples	75

2.8	Espaço de Fase de um Pêndulo Simples com o Eixo θ Restrito	76
2.9	Espaços de Fase do Sistema (2.86) para γ igual à 0.6, 0.8 e 1	78
2.10	Espaços de Fase do Sistema (2.86) para γ igual à 1.02, 1.05 e 1.08	79
2.11	Espaços de Fase do Sistema (2.86) para γ igual à 1.085, 1.12 e 1.2	80
2.12	Espaços de Fase do Sistema (2.86) para $\gamma = 1.2$	81
3.1	Instantes Iniciais da Solução em Linha Reta	93
3.2	Solução em Linha Reta	94
3.3	Solução em Linha Reta Perturbada	95
3.4	Instantes Iniciais da Solução em Oito	96
3.5	Solução em Oito	97
3.6	Solução em Oito sem Precisão	98
3.7	Instantes Iniciais das Soluções Borboleta e Yin-yang	100
3.8	Soluções Borboleta e Yin-yang	101
3.9	Soluções Borboleta e Yin-yang Perturbadas	102

Sumário

Lista de Figuras	vii
Introdução	9
1 Sistemas Dinâmicos	13
1.1 Atratores	15
1.2 Sistemas Lineares	17
1.2.1 Pontos Fixos	18
1.2.2 Autovetores e Autovalores	18
1.2.3 Estabilidade Linear	19
1.3 Classificação de Sistemas de Duas Dimensões	21
1.3.1 Nó Estável	22
1.3.2 Nó Instável	25
1.3.3 Ponto de Sela	26
1.3.4 Espiral Estável	29
1.3.5 Espiral Instável	31
1.3.6 Rotor ou Centro	32
1.3.7 Nós Próprios e Impróprios	34
1.3.8 Pontos Fixos Não-Hiperbólicos	36
1.3.9 Representação da Classificação dos Sistemas de Duas Dimensões	38
1.4 Sistemas Não-Lineares	39
1.4.1 Linearização	41
1.5 Ciclos Limite	45
1.5.1 Existência de Ciclos Limite	47
1.5.2 Oscilador de van der Pol	47
2 Expoentes de Lyapunov e Caos	52
2.1 Bifurcações Estáticas	52

2.1.1	Bifurcação Sela-Nó	53
2.1.2	Bifurcação de Forquilha	55
2.1.3	Bifurcação de Hopf	57
2.2	Estabilidade de Soluções dependentes do Tempo	59
2.3	Seções de Poincaré	60
2.4	Estabilidade de Floquet	62
2.5	Expoentes de Lyapunov	65
2.6	Exemplo de um Sistema Caótico: Pêndulo com Atrito e Forçado Periodicamente . . .	73
3	Problema de Três Corpos Restrito a um Plano	83
3.1	Um Breve Histórico	84
3.2	O Problema de Três Corpos Restrito a um Plano	86
3.2.1	Equações de Movimento Gerais	86
3.2.2	A Restrição a um Plano	90
3.2.3	Classificação das Famílias de Soluções do Problema de Três Corpos.	91
3.3	Soluções Numéricas para o Problema de Três Corpos Restrito a um Plano	92
3.3.1	Solução em Linha Reta	92
3.3.2	Solução em Oito	96
3.3.3	Soluções Borboleta e Yin-yang	98
	Considerações Finais	104
	Referências Bibliográficas	106
A	Comandos do Maple e Mathematica	108
A.1	A.1 Comandos - Maple	108
A.2	Comandos - wxMaxima	111
A.3	Comandos - Mathematica	112

Introdução

No decorrer da evolução da mente humana, muitas das grandes descobertas e revelações se devem à matemática. Desde a antiguidade, diversos pensadores dedicaram suas vidas à evolução desta área, buscando soluções para os mais diversos problemas, tanto práticos quanto teóricos. Um desses casos é o problema de três corpos, o qual consegue ser um excelente exemplo de um problema tanto teórico quanto prático. Este problema lida com o movimento de três corpos celestiais, em sua definição mais básica, e é tão antigo quanto outros problemas matemáticos clássicos, como a quadratura do círculo, que busca a área de um triângulo de um dado raio e equivale, em termos modernos, a calcular o valor exato de π [1]. O exemplo mais prático do problema de três corpos é o sistema sol-terra-lua, o qual foi estudado já na antiguidade a fim de determinar a ocorrência de eclipses solares, mesmo que ainda sem o rigor matemático introduzido por Sir Isaac Newton. No entanto, as soluções deste problema podem descrever quaisquer tipos de corpos, contanto que, na formulação clássica, eles estejam dentro das limitações das leis de Newton, possam ser considerados puntiformes e interajam apenas por meio da lei da gravitação universal. As soluções, então, se aplicam desde satélites sob influência da gravidade da terra e da lua até galáxias inteiras interagindo entre si.

Como este problema se estende até hoje, houveram muitas formas de tratá-lo, desde simplificações para a resolução analítica de casos especiais, até a utilização de computadores para calcular as trajetórias dos corpos. Inicialmente, é claro, foram utilizadas diretamente as equações de Newton, o que deu lugar depois ao tratamento da mecânica através formulações de Lagrange e Hamilton. Com o passar dos anos, percebeu-se a impossibilidade prática de uma solução geral analítica através de séries de funções, a série de Sundman, por conta do número gigantesco, maior que o número de átomos no universo observável, de termos necessários para se obter a precisão usual em medidas astronômicas [1]. Outro grande entrave está na grande quantidade de cálculos necessários para a resolução numérica com alta precisão, a qual, ainda que não tão grande quanto o exemplo anterior, continua sendo uma quantidade bastante elevada. Em geral, atualmente utilizamos uma combinação de métodos analíticos e computacionais para obtermos soluções de interesse para casos específicos, a fim de diminuir a quantidade final de cálculos necessários.

Apesar do grande número de formas para tratar o problema de três corpos, não precisamos, necessariamente, nos afastar da formulação dada por Newton, mas precisamos, além de obter as soluções, ter ferramentas para estudá-las. Para este trabalho, então, o objetivo é formular o problema de três corpos através de sistemas dinâmicos e restringi-lo a um plano antes de utilizar softwares matemáticos para resolvê-lo, a fim de estudarmos as trajetórias descritas por cada um dos corpos e a estabilidade de algumas soluções. Para isso, devemos, também, conhecer os conceitos fundamentais sobre sistemas dinâmicos, os quais já foram bastante desenvolvidos e serão apresentados, em detalhes, neste trabalho. Com isso, este trabalho segue um caminho alternativo aos métodos analíticos mais complexos, utilizados para estudar soluções mais restritas, e estuda uma das características mais importantes que devemos conhecer sobre as soluções: a sua estabilidade.

Como vamos utilizar muitas expressões e termos matemáticos, vamos esclarecer a notação matemática utilizada neste trabalho. Vetores e matrizes serão representados por letras maiúsculas e em negrito e componentes de vetores, elementos de matrizes e funções escalares em geral serão representadas por letras minúsculas, à exceção de grandezas vetoriais usualmente minúsculas, como o vetor posição $\mathbf{r}$. A notação para derivadas temporais utilizará pontos, como em $\dot{\mathbf{r}}$, a menos que precisemos explicitar esta derivada, caso no qual utilizaremos a notação de Leibniz, como em $d\mathbf{r}/dt$. As componentes dos vetores, dependendo da conveniência, serão representadas como uma combinação linear da base do espaço, entre parênteses e separadas por vírgulas ou como elementos de uma matriz coluna ou, é lógico, de uma matriz linha transposta. As matrizes, por sua vez, serão delimitadas por colchetes. Quaisquer discrepâncias quanto estas definições básicas serão esclarecidas no decorrer do texto.

O desenvolvimento deste trabalho foi baseado em uma pesquisa bibliográfica feita sobre, basicamente, sistemas dinâmicos e o problema de três corpos. Desta forma, este texto foi construído a partir das estruturas e assuntos das referências consultadas e foi organizado de forma a apresentar uma introdução suficientemente detalhada, bem como discussões, sobre estes assuntos combinando uma referência base com informações mais relevantes de referências complementares. Desta forma, foi utilizado o livro *Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*, de Walter Greiner [2], como referência base para o estudo de sistemas dinâmicos, estabilidade, bifurcações, expoentes de Lyapunov e sistemas caóticos. Complementarmente, foram utilizados os livros *Introdução aos Sistemas Dinâmicos: Uma Abordagem Prática com Maxima*, de Jaime Villate [3], e *Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos*, de Morris Hirsch, Stephen Smale e Robert Devaney [4], para estudarmos os comandos do software Maxima, os quais não diferem muito

dos comandos do Maple e do Mathematica, e, também, termos mais exemplos e um estudo mais detalhado sobre o assunto.

Para o problema de três corpos, foi utilizado como base o livro *The Three-Body Problem*, de Mauri Valtonen e Hannu Karttunen [5], complementado com os livros *An Introduction to Celestial Mechanics*, de Forest Ray Moulton [6], *The Three-Body Problem*, de Christian Marchal [7], dos quais foi possível basear a formulação para este problema utilizada neste trabalho, bem como conhecer algumas das soluções e da história do problema. Neste ponto, vale destacar o livro *The Three-body Problem from Pythagoras to Hawking*, de Mauri Valtonen, Joanna Anosova, Konstantin Kholshevnikov, Aleksandr Mylläri, Victor Orlov e Kiyotaka Tanikawa [1], o qual, apesar de ser um livro voltado para um público sem conhecimentos avançados de física e matemática, apresenta um histórico excelente para o problema de três corpos, traçado até bem recentemente.

Para cobrir alguns pontos do assunto, foram utilizados alguns artigos e pacotes para os softwares matemáticos utilizados. Neste contexto, o artigo *Numerical Calculations of Lyapunov Exponents*, de Marco Sandri [8], foi muito útil, tanto para um estudo mais detalhado sobre os expoentes de Lyapunov, com alguns esclarecimentos obtidos do livro *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, de Thomas Parker e Leon Chua [9], quanto para a obtenção numérica destes valores, a partir de um pacote para o software Mathematica, disponibilizado pelo autor. Foi utilizado, também, um maplet, como são chamados os aplicativos construídos com o software Maple, de Yasuyuki Nakamura [10], como base para a construção dos comandos utilizados para o problema de três corpos e de onde foram obtidas algumas condições iniciais necessárias para plotar as suas soluções. Outras dessas condições iniciais foram obtidas do artigo *Three Classes of Newtonian Three-Body Planar Periodic Orbits*, de Milovan Šuvakov e Veljko Dimitrašinović [11], no qual os autores apresentam uma classificação para as famílias de soluções, bem como treze novas soluções periódicas, o que foi um grande avanço na história do problema de três corpos.

Desta forma, seguindo os objetivos traçados, este trabalho é dividido em três capítulos e um apêndice. O capítulo 1 trata dos conceitos introdutórios sobre sistemas dinâmicos, desde sua definição até a classificação e a análise da estabilidade das soluções mais simples que temos, com foco em sistemas com duas dimensões, e utiliza exemplos sempre que possível, com destaque para o mais conhecido oscilador de van der Pol, para ilustrar estes conceitos. No capítulo 2 são discutidos alguns conceitos mais complexos e soluções mais gerais, com dependência temporal, formalizando alguns conceitos de estabilidade úteis para compreendermos estas soluções, bem como métodos para o seu estudo, com base nos trabalhos de Poincaré, Floquet e Lyapunov. Por fim, neste capítulo tratamos

de um sistema caótico, o pêndulo com atrito e forçado periodicamente, para ilustrar os conceitos discutidos nos dois primeiros capítulos deste trabalho. Após esta introdução sobre sistemas dinâmicos, no capítulo 3 vamos, então, apresentar um breve histórico sobre o problema de três corpos e, partindo da lei da gravitação universal e da segunda lei de Newton, vamos apresentar este problema como um sistema dinâmico restrito a um plano, para que, com isso, possamos resolvê-lo com métodos computacionais. Desta forma, vamos discutir algumas soluções, as quais historicamente foram obtidas tanto analítica quanto numericamente, analisando-as a partir de seus expoentes de Lyapunov. Por fim, devido a utilização dos softwares Mathematica, Maple e wxMaxima para produzir e analisar a maioria das imagens, bem como realizar todos os cálculos deste trabalho, temos, no apêndice, uma coletânea dos comandos utilizados, com algumas explicações básicas, para auxiliar aos leitores interessados em utilizar estes softwares e para elucidar os processos numéricos utilizados aqui.

Sistemas Dinâmicos

Sistemas dinâmicos descrevem a passagem do tempo para todos os pontos de um dado espaço, usualmente um espaço de fase na mecânica [4]. Um espaço desse tipo é construído a partir das posições e velocidades (ou momentos) acessíveis a um sistema de partículas. Para um sistema com n graus de liberdade, tanto as posições, quanto as velocidades, têm n coordenadas e, desta forma, o espaço de fase tem dimensão $N = 2n$. Para os casos mais simples o espaço de fase é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$. Por exemplo, com uma partícula se movendo sem restrições, temos três coordenadas de posição e três de velocidade para caracterizá-la e, logo, o espaço de fase é o espaço $\mathbb{R}^6$. Desta forma, o vetor geral $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t)) \in \mathbb{R}^N$ guarda toda a informação sobre o sistema em um dado instante t , e no qual os $x_i(t)$ representam, em ordem, as n posições e depois as n velocidades (ou momentos). As componentes x_i deste vetor são coordenadas generalizadas que podem representar uma variedade de quantidades, como ângulos e velocidades angulares. Vale destacar que podemos tratar de diversos problemas distintos, fora da mecânica, através de sistemas dinâmicos, identificando adequadamente as informações indicadas pelo vetor $\mathbf{X}$, o que abrange, por exemplo, a teoria de circuitos [4] e a evolução de modelos cosmológicos [12].

Dada uma condição inicial $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0)$ o sistema dinâmico é capaz de determinar a posição no espaço de fase para qualquer tempo, anterior ou posterior. Isso ocorre sob a suposição essencial de que o sistema se comporta de forma determinística. Quanto à passagem do tempo, podemos utilizar valores discretos, $t_0, t_1, t_2 \dots$, para a evolução do sistema, o que configura um sistema dinâmico discreto. Intuitivamente, se a passagem do tempo é contínua, temos um sistema dinâmico contínuo. Quanto a diferenciabilidade, um sistema continuamente diferenciável é chamado de sistema dinâmico suave. O foco deste trabalho são os sistemas contínuos e suaves.

Matematicamente, a evolução temporal do sistema pode ser descrita, de forma geral, pela equação diferencial vetorial

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), t; \lambda). \quad (1.1)$$

Nesta equação, $\mathbf{F}$ é uma função das coordenadas, do tempo e de um ou mais parâmetros de controle λ , usualmente chamada de campo de velocidades ou campo vetorial do sistema o que, quando

possível, é representado graficamente em conjunto com as soluções no espaço de fase [2]. Esta função pode depender das coordenadas de forma linear ou não-linear. O caso linear é mais simples e envolve, geralmente, equações diferenciais solúveis analiticamente. Já o caso não-linear, à exceção de casos bastante específicos, exige uma abordagem numérica para sua solução. Isso ocorre devido à complexidade causada por não-linearidades até mesmo em exemplos simples. Este tipo de abordagem, no entanto, tem sempre um erro intrínseco, por ser um método aproximativo, mas, com o advento do computador, a precisão, bem como a velocidade de obtenção das soluções, aumentou consideravelmente.

Um sistema independente explicitamente do tempo é chamado autônomo. Uma dependência explícita em $\mathbf{F}$, por outro lado, classifica o sistema como não-autônomo e torna mais difícil a sua análise. Um artifício utilizado nessa situação é incluir no vetor $\mathbf{X}$ um grau adicional de liberdade através de uma coordenada extra, de modo que $\mathbf{X}'(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t), x_{N+1}(t)) \in \mathbb{R}^{N+1}$, com $\dot{x}_{N+1}(t) = 1$. Com a condição inicial $x_{N+1}(0) = 0$ temos que $x_{N+1}(t) = t$ e, com isso removemos a dependência temporal explícita ao custo de uma dimensão extra no problema [2]. Sistemas autônomos são importantes pois, como não há dependência explícita, eles não variam com o passar do tempo. As leis da natureza, por exemplo, são postuladas dessa forma, assumindo que sejam as mesmas no passado e no futuro. Por outro lado, temos, também, sistemas não-autônomos de interesse, por exemplo, sempre que temos uma força externa dependente do tempo como no pêndulo amortecido e forçado, discutido na seção 2.6.

O parâmetro de controle, representado por λ em (1.1), ajuda a determinar a dinâmica do sistema. Podem haver um ou vários destes parâmetros, que podem ser, por exemplo, a força de acoplamento de uma interação, a amplitude ou a frequência de uma perturbação [2]. Estas constantes afetam diretamente a dinâmica do sistema e podem causar mudanças drásticas nela, como veremos na seção 2.1 sobre bifurcações.

Normalmente representamos os espaços de fase de sistemas dinâmicos através dos chamados retratos de fase, nos quais, além dos pontos $\mathbf{X}$, representamos o campo vetorial $\mathbf{F}$ e soluções particulares, obtidas através do campo e de alguma condição inicial $\mathbf{X}_0$. Como esta é mais uma questão de terminologia, vamos utilizar o termo “espaço de fase” neste trabalho. É claro que esta representação só é viável em sistemas de até três dimensões, e são úteis, em particular, nos de duas dimensões, como são, no mínimo, os espaços de fase na mecânica. Vários exemplos ilustrativos estão na seção 1.3, sobre sistemas dinâmicos lineares bidimensionais.

Sistemas dinâmicos Suaves têm um mapeamento $\Phi_t : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ que faz a conexão entre $\mathbf{X}_0$ e

$\mathbf{X}(t)$ na forma $\Phi_t(\mathbf{X}_0) = \mathbf{X}(t)$ para todo t chamado de fluxo de fase [2]. Este mapa será abordado com mais detalhes na seção 2.5, quando for explicado o método para a obtenção dos expoentes de Lyapunov. Uma característica importante sobre esse mapa é a sua relação com volumes arbitrários no espaço de fase. Temos que a taxa de variação Λ de um volume no espaço de fase obedece localmente [2]

$$\Lambda(\mathbf{X}) = \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (1.2)$$

Sistemas dinâmicos conservativos, nos quais $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, são caracterizados por fluxos de fase que conservam estes volumes. Sistemas não-conservativos ou dissipativos, quando $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$, por outro lado, são caracterizados pela contração destes volumes no espaço com o passar do tempo [2]. Assim, com o tempo, as soluções de sistemas dinâmicos dissipativos podem tender a sub-conjuntos do espaço de fase de menor dimensão, os chamados atratores, como será abordado nas seções subsequentes.

1.1 Atratores

O comportamento de sistemas dinâmicos não-lineares pode ser dividido em transiente e assintótico [2]. Processos transientes referem-se ao comportamento inicial do sistema e estão fortemente ligados à condição inicial $\mathbf{X}_0$. Por esse motivo, é difícil definir regras gerais para estes processos e eles são desprezados, normalmente, mesmo que sejam significativos dependendo da escala temporal. Por outro lado, o comportamento assintótico, ou estacionário, é, de certa forma, mais simples. Por exemplo, os sistemas dissipativos, após possíveis comportamentos transientes, se aproximam de subespaços do espaço de fase, chamados de atratores.

Estes atratores podem ser pontos fixos, curvas, superfícies, entre outros objetos matemáticos no espaço de fase. Eles têm um papel central na dinâmica não-linear, de modo particular os atratores estranhos e caóticos, os quais, apesar de similares, não são sinônimos. Os atratores estranhos, apesar de possuírem, em geral, formas complexas, como os caóticos, tem sua composição descrita por um fractal [2], o que não será discutido profundamente neste trabalho. Os atratores caóticos, por outro lado, tem um comportamento complicado e são extremamente sensíveis às condições iniciais, de forma que trajetórias vizinhas tendem a se afastar exponencialmente com o tempo [2]. Normalmente, atratores apresentam ambas características, no entanto, esta distinção se faz importante, já que existem atratores caóticos e não estranhos e atratores estranhos, mas não caóticos.

Devido a sua importância e a variedade de definições, a definição matemática de atratores será feita com base em [2]. Assim, seja um campo vetorial $\mathbf{F}(\mathbf{X}(t))$ em um espaço genérico M , o qual

pode ser o $\mathbb{R}^N$, com um fluxo de fase Φ_t , que será detalhado na seção 2.5, associado. Um atrator é um subconjunto $A \subset M$ se satisfizer as seguintes propriedades:

1. A é compacto;
2. A é invariante sob o fluxo de fase Φ_t ;
3. Existe um conjunto aberto U que contém o conjunto A e se contrai para ele sob o fluxo de fase;
4. A não pode ser dividido em subconjuntos fechados invariantes que não se intersectem.

Sob estas condições o atrator deve ser um conjunto fechado e restrito, o que significa que qualquer valor limite de uma sequência infinita pertence ao conjunto, o qual não pode ser estender até o infinito. Além disso, devemos ter $\Phi_t(A) = A$ para todo t de forma que qualquer ponto no atrator sempre permanece nele. O conjunto U deve ser maior que o atrator, pois é aberto e contém A fechado, e deve ser positivamente invariante, de forma que $\Phi_t(U) \subseteq U$ para todo $t \geq 0$. Desta forma, qualquer ponto contido em U não pode deixá-lo e será puxado para o atrator. Matematicamente, para qualquer superconjunto de A , V , contido em U , existe um tempo t_V , após o qual a imagem de U está contida em V . Com isso, se $A \subset V \subset U$, $\Phi_t(U) \subset V$ para todo $t \rightarrow t_V$. Como V pode ser arbitrariamente próximo de A , para tempos suficientemente grandes U se contrai para o atrator A [2]. Na figura 1.1 vemos um esquema destes conjuntos apresentados.

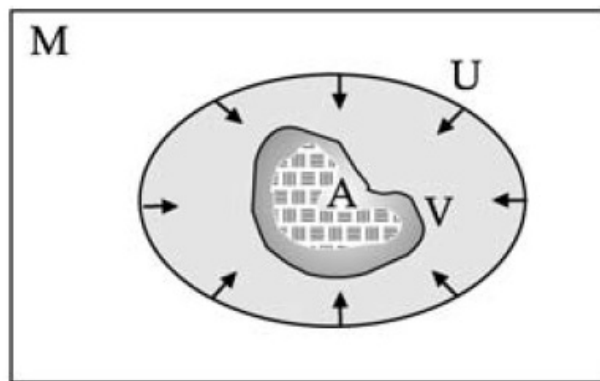


Figura 1.1 – Representação da Definição de um Atrator

Aqui o conjunto U , sob o fluxo de fase, se contrai para um conjunto V arbitrariamente próximo de A , o atrator.

Fonte: Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics [2].

O conjunto U é importante pois ele define o domínio de atração de um atrator, o subespaço do espaço de fase a partir do qual todos os pontos são atraídos para o atrator. O conjunto U máximo que se contrai para A é chamado de bacia de atração B e é definido como a união de todos os conjuntos que contêm A e que satisfazem as condições de U . Em sistemas lineares a bacia de atração pode ser todo o espaço de fase, já que a análise de pontos críticos resulta em propriedades globais para o espaço. Por outro lado, em sistemas não-lineares esta análise leva a propriedades válidas, usualmente, apenas nas vizinhanças dos pontos críticos, o que dificulta afirmações gerais. O conceito de bacia de atração se torna mais importante quando existem muitos pontos críticos, o que logicamente divide o espaço entre as bacias de cada um [2].

1.2 Sistemas Lineares

Os sistemas dinâmicos mais simples são os lineares, por possuírem uma dinâmica previsível e características globais no espaço de fase. Isto pode parecer intuitivo, já que o sistema é assumidamente determinístico, entretanto não-linearidades levam a comportamentos complexos e caóticos até mesmo em sistemas relativamente simples. Um sistema descrito pela equação (1.1) é dito linear se $\mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz $N \times N$ com elementos a_{ij} constantes, de forma que

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t). \quad (1.3)$$

Obedecendo a equação (1.3) obtemos, então, um sistema linear com N equações.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1N}x_N(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2N}x_N(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_N(t) = a_{N1}x_1(t) + a_{N2}x_2(t) + \dots + a_{NN}x_N(t), \end{cases} \quad (1.4)$$

Este sistema é acoplado e não possui técnicas gerais para ser resolvido analiticamente [2]. Desta forma, a abordagem numérica é fundamental para termos uma noção qualitativa do comportamento geral do sistema. Com isso, no lugar de buscar soluções específicas, obtemos o campo vetorial associado ao sistema no espaço de fase, a partir do qual podemos especificar condições iniciais que definem as mais diversas órbitas referentes à várias soluções distintas. Usualmente, são analisados pontos específicos que regem a dinâmica do sistema [2][3][4], como será discutido na seção seguinte.

1.2.1 Pontos Fixos

Da análise da equação (1.1) podemos buscar soluções com características particulares. Uma solução desse tipo, de grande importância por sua simplicidade, são os pontos críticos ou fixos. Essas soluções satisfazem o seguinte critério

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = 0. \quad (1.5)$$

Nesta condição não há variação na posição e, logo, o ponto fixo $\mathbf{X}_0$ é constante, o que caracteriza um estado estacionário. Um exemplo simples de um ponto fixo é o ponto de equilíbrio de um pêndulo simples, no ponto mais baixo de sua trajetória, quando ele está parado. A análise desses pontos é bastante útil para determinar a dinâmica do sistema. Para isso, a informação mais importante é a estabilidade dos pontos fixos e este estudo é feito à partir da equação (1.3) através da álgebra linear.

Levando em conta (1.5), a equação (1.3) resulta em

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_0 = 0. \quad (1.6)$$

Este sistema pode ter infinitas soluções ou nenhuma se o determinante da matriz $\mathbf{A}$ for zero. Por outro lado, caso $\det(\mathbf{A})$ seja não-nulo, pela regra de Cramer, o sistema admite apenas uma solução, a qual é um ponto na origem do sistema [3]. De fato, multiplicando a matriz inversa de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-1}$, em ambos os membros, temos

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}_0 = \mathbf{1}\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0 = 0,$$

o que mostra que todas as componentes do ponto fixo $\mathbf{X}_0$ são nulas. A fim de facilitar o estudo da estabilidade, é útil encontrar os autovetores e os autovalores da matriz $\mathbf{A}$. A importância disso reside no fato de que os autovetores da matriz são linearmente independentes e podem constituir uma base para o espaço de fase, levando à simplificações na análise dos sistemas dinâmicos lineares.

1.2.2 Autovetores e Autovalores

Um autovetor $\mathbf{V}$ da matriz $\mathbf{A}$ é um vetor, diferente de zero e com a mesma quantidade de componentes de $\mathbf{X}$, que satisfaz a equação de autovalor

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \mu\mathbf{V}, \quad (1.7)$$

na qual a constante μ é o autovalor associado à $\mathbf{V}$. Como a matriz $\mathbf{A}$ relaciona $\mathbf{X}$ e $\dot{\mathbf{X}}$ através da equação (1.3), caso o estado inicial seja um autovetor da matriz, ele evoluirá afastando-se ou

aproximando-se da origem em linha reta na direção de $\mathbf{V}$, de acordo com o sinal do autovalor correspondente [3].

Por conta da independência linear dos autovetores, em um espaço com N dimensões podem ser encontrados, no máximo, N autovetores com autovalores distintos. Existem casos em que há autovalores iguais para autovetores distintos, chamados de autovalores degenerados. Além disso, todos os vetores com a mesma direção de um autovetor, também são autovetores associados ao mesmo autovalor, como se verifica em

$$\mathbf{A}(k\mathbf{V}) = k\mathbf{A}\mathbf{V} = k\mu\mathbf{V} = \mu(k\mathbf{V}), \quad (1.8)$$

onde k é uma constante real. Para obter os autovalores μ da matriz $\mathbf{A}$ é utilizada a equação (1.7), normalmente escrita na forma

$$(\mathbf{A} - \mu\mathbf{1})\mathbf{V} = 0, \quad (1.9)$$

onde $\mathbf{1}$ é a matriz identidade de ordem $N \times N$. Esta equação é similar à equação (1.6). Aqui, novamente, teremos uma única solução, na qual $\mathbf{V} = 0$, se $\det(\mathbf{A} - \mu\mathbf{1})$ for diferente de zero e infinitas soluções caso contrário.

A diferença é que a solução desejada neste caso é quando $\det(\mathbf{A}) = 0$, pois as infinitas soluções dependem exatamente do autovalor μ . Assim, encontramos os autovalores resolvendo

$$\det(\mathbf{A} - \mu\mathbf{1}) = 0. \quad (1.10)$$

Esta equação é conhecida como equação característica. Por fim, cada um dos autovalores obtidos deve ser substituído na equação (1.9) para encontrar todas as componentes do autovetor associado [3].

1.2.3 Estabilidade Linear

O conjunto completo de autovetores, como dito anteriormente, constitui uma base para o espaço de fase. Desta forma, o vetor $\mathbf{X}(t)$ pode ser representado pela combinação linear de todos os autovetores

$$\mathbf{X}(t) = \sum_i^N u_i(t)\mathbf{V}_i. \quad (1.11)$$

Nesta equação, são os coeficientes u_i que variam com o tempo, similarmente às componentes x_i originais. Assim, a derivada temporal desta relação é

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \sum_i^N \dot{u}_i(t)\mathbf{V}_i, \quad (1.12)$$

e, com isso, reescrevemos a equação (1.3) como

$$\sum_i^N \dot{u}_i(t) \mathbf{V}_i = \mathbf{A} \sum_i^N u_i(t) \mathbf{V}_i. \quad (1.13)$$

Como as componentes u_i são escalares, temos que

$$\sum_i^N \dot{u}_i(t) \mathbf{V}_i = \sum_i^N u_i(t) \mathbf{A} \mathbf{V}_i. \quad (1.14)$$

Por fim, utilizando a relação (1.7)

$$\sum_i^N \dot{u}_i(t) \mathbf{V}_i = \sum_i^N u_i(t) \mu_i \mathbf{V}_i. \quad (1.15)$$

Com esta equação podemos reescrever o sistema (1.4) como

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = \mu_1 u_1(t), \\ \dot{u}_2(t) = \mu_2 u_2(t), \\ \vdots \\ \dot{u}_N(t) = \mu_N u_N(t). \end{cases} \quad (1.16)$$

Este novo sistema é bastante simples se comparado ao sistema (1.4), porque as novas equações são todas desacopladas e idênticas. Desta forma, resolver o problema unidimensional é suficiente para termos um entendimento geral sobre sistemas dinâmicos lineares. Neste caso a matriz $\mathbf{A}$ tem apenas um elemento, μ , que reduz o sistema (1.16) à

$$\dot{u}(t) = \mu u(t), \quad (1.17)$$

cujas solução é

$$u(t) = u(t_0) e^{\mu t}, \quad (1.18)$$

onde $u(t_0)$ é uma constante arbitrária obtida no instante inicial t_0 . Esta é a mesma solução que seria obtida para o sistema (1.4), mas, para duas ou mais dimensões, os autovetores de $\mathbf{A}$ e a base original do espaço de fase não necessariamente coincidem. Vale notar que a origem, como esperado é o ponto fixo de um sistema linear unidimensional, uma vez que, para $u(t_0) = 0$ a solução permanece na origem para qualquer valor de t .

O comportamento da solução (1.18) depende do sinal de μ . Caso seja positivo, $u(t)$ se afasta da origem, caso contrário, se aproxima e, caso seja nulo, se mantém a uma distância constante. A estabilidade de um ponto fixo advém exatamente desta análise. Se a solução se aproxima do ponto

com o passar do tempo ou se mantém à distância fixa, ele é dito estável. Por outro lado, se ela se afasta, o ponto é instável.

A definição de estabilidade assintótica [2], ajuda a diferenciar a estabilidade à distância constante e com aproximação. Um ponto fixo é assintoticamente estável se existe um conjunto U que contenha $\mathbf{X}_0$, no qual todas as trajetórias vão em direção ao ponto fixo para tempos suficientemente grandes. Seguindo a seção 1.1, caso a origem seja um ponto fixo assintoticamente estável, ela representa o exemplo mais simples de um atrator.

1.3 Classificação de Sistemas de Duas Dimensões

Um espaço de fase de duas dimensões, na mecânica, apresenta apenas um grau de liberdade, uma vez que associadas à ele estão as dimensões de posição e de velocidade. Desta forma, a equação (1.3) se reduz, em notação matricial, à

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

ou, alternativamente, ao sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t). \end{cases} \quad (1.20)$$

O espaço de fase para este tipo de sistema é o plano $x_1 - x_2$ ¹ e é o único caso em que é possível plotar completamente as soluções e o campo vetorial na mecânica, pois um sistema de dois graus de liberdade exige um espaço de fase de quatro dimensões, o que logicamente exige outras técnicas para sua análise. Além disso, o caso bidimensional é particularmente útil para compreender a estabilidade linear, algo útil mesmo na análise de sistemas não-lineares, como será visto na seção 1.4.

Devido à complexidade relativamente baixa, os sistemas lineares de duas dimensões podem ser classificados facilmente quanto à estabilidade de seu ponto fixo na origem. Para isso, utilizamos a equação (1.10) para obter os autovalores da matriz $\mathbf{A}$. Neste caso, a equação característica se torna

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \mu & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \mu \end{vmatrix} = 0. \quad (1.21)$$

¹As coordenadas x_1 e x_2 podem corresponder à, por exemplo, à x e v_x (ou p_x), em coordenadas cartesianas, à θ e $\omega = \dot{\theta}$ em coordenadas polares, ou q_1 e p_1 em coordenadas generalizadas.

Este determinante é o polinômio quadrático

$$\mu^2 - (a_{11} + a_{22})\mu + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, \quad (1.22)$$

cujas duas raízes são os dois autovalores da matriz $\mathbf{A}$. Nesta equação, observamos que o traço da matriz $\mathbf{A}$, o qual é a soma dos elementos da sua diagonal principal, é o termo entre parênteses e que seus dois últimos termos são o próprio determinante de $\mathbf{A}$. Com isso, utilizamos

$$s = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2}Tr(\mathbf{A}) \quad \text{e} \quad d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = det(\mathbf{A}),$$

para simplificar a equação e obter

$$\mu^2 - 2s\mu + d = 0. \quad (1.23)$$

Os autovalores de $\mathbf{A}$ são, então

$$\mu_1 = s + \sqrt{s^2 - d}, \quad (1.24)$$

$$\mu_2 = s - \sqrt{s^2 - d}. \quad (1.25)$$

Portanto, à partir do determinante e do traço da matriz $\mathbf{A}$, podemos determinar a estabilidade da origem no sistema de coordenadas dos autovetores associados à μ_1 e μ_2 e, logo, no sistema de coordenadas original. A diferença em relação a um sistema de apenas uma dimensão é que a estabilidade agora depende de dois autovalores, o que nos leva a mais casos diferentes, além de simplesmente estável e instável.

Analisando as equações (1.24) e (1.25), podemos perceber que os autovalores podem ter diversas formas, por exemplo, podem ser reais ou imaginários, iguais ou diferentes, etc. Cada uma destas possibilidades leva a comportamentos bastantes distintos do sistema e, portanto, merecem uma classificação adequada, como a que veremos a seguir.

1.3.1 Nó Estável

Se $s < 0$ e $0 < d < s^2$ temos dois autovalores reais, distintos e negativos, o ponto fixo é um nó estável. Por exemplo, considerando o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + y(t), \\ \dot{y}(t) = \frac{1}{2}x(t) - y(t), \end{cases} \quad (1.26)$$

o qual tem a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}, \quad (1.27)$$

e, logo, $Tr(\mathbf{A}) = -2$ e $det(\mathbf{A}) = 1/2$, temos um sistema com um nó estável. A figura 1.2, feita no software Maple com o comando DEplot, explicado na seção ?? do apêndice, mostra o espaço de fase deste sistema e algumas soluções, as quais, acompanhando o campo, vão em direção ao ponto fixo na origem.

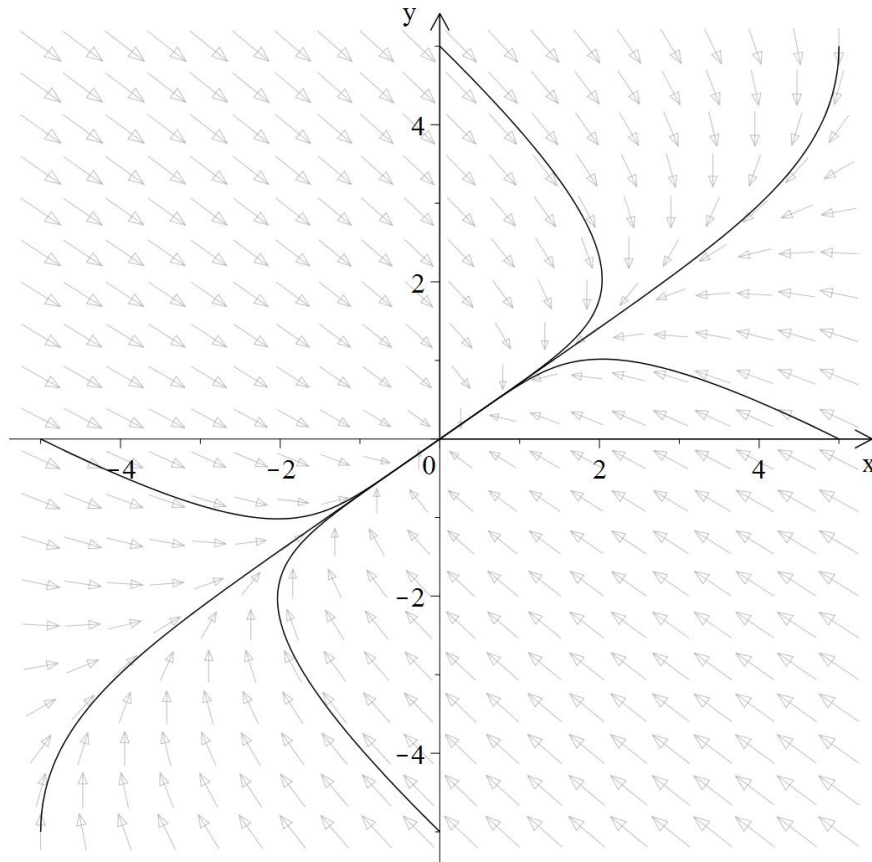


Figura 1.2 – Nó Estável do Sistema (1.26)

Temos representadas nesta figura seis soluções, as quais partem de $(-5,0)$, $(-5,-5)$, $(0,-5)$, $(5,0)$, $(5,5)$ e $(0,5)$ e acompanham o campo, representado pelas setas, até $(0,0)$.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Agora, a estabilidade pode ser esclarecida, pois é visível que todo campo vetorial ao redor do ponto fixo vai em direção à ele com o passar do tempo. Desta forma, qualquer pequeno deslocamento com relação à este ponto volta à ele com o fluxo de fase, influenciando pouco na dinâmica. É perceptível, também, que este tipo de ponto é um exemplo de atrator, como o são, em geral, os pontos estáveis.

Utilizando o software wxMaxima podemos calcular facilmente os autovalores e autovetores deste

sistema. De fato, definindo a matriz $\mathbf{A}$ no programa, podemos utilizar o comando “eigenvectors”, apresentado na seção A.2, no apêndice, para obter

$$\mu_1 = -\frac{\sqrt{2}-2}{2} \quad \text{e} \quad \mu_2 = \frac{\sqrt{2}+2}{2},$$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Em um espaço descrito com a base $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$, então, este sistema se torna

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -\frac{\sqrt{2}-2}{2}u(t), \\ \dot{v}(t) = \frac{\sqrt{2}-2}{2}v(t), \end{cases} \quad (1.28)$$

e o espaço de fase deste sistema está representado na figura 1.3, a seguir, feita através do software Maple.

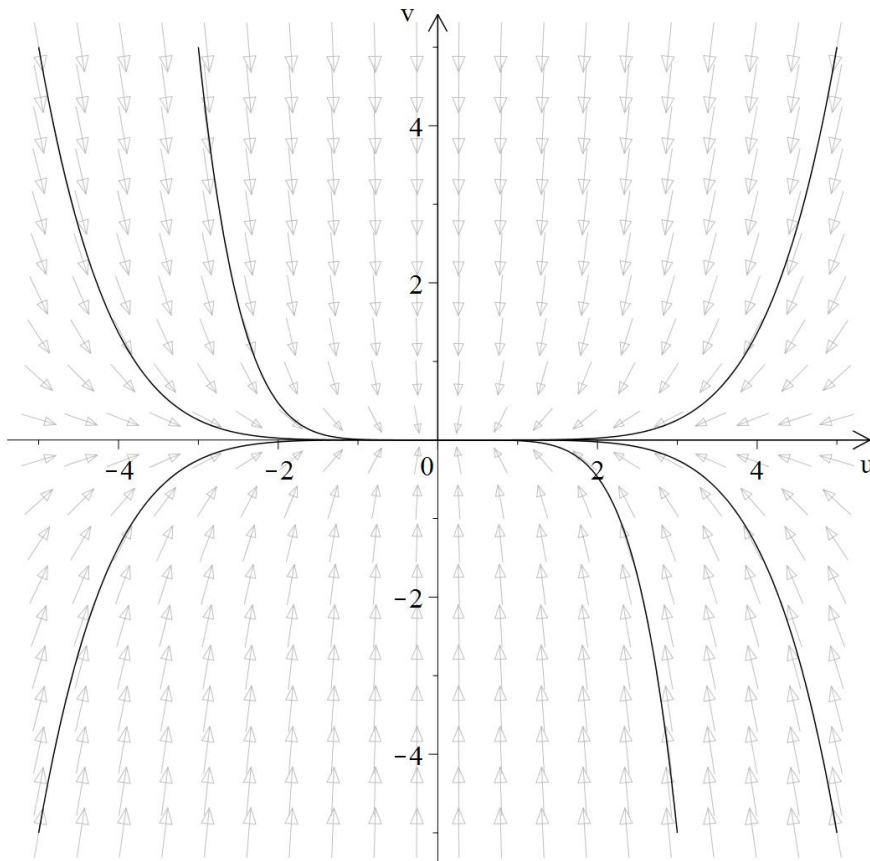


Figura 1.3 – Nó Estável do Sistema (1.28)

Temos representadas nesta imagem seis soluções, as quais partem de $(-5, 5)$, $(-5, 3)$, $(-5, -5)$, $(5, -5)$, $(5, 3)$ e $(5, 5)$ e acompanham as setas do campo até $(0, 0)$.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Comparando a figura 1.2 com a figura 1.3 podemos perceber a direção dos autovetores no espaço de fase em coordenadas cartesianas. É claro que ambas descrevem o mesmo sistema físico, mas usualmente as coordenadas cartesianas (ou polares, ou esféricas, também) tem um significado físico mais importante, como a posição e a velocidade. Para analisar o resultado no espaço dos autovetores, é preciso analisar o que representa cada um deles para, assim, compreender a dinâmica do sistema.

1.3.2 Nó Instável

Se $s > 0$ e $0 < d < s^2$ temos dois autovalores reais, distintos e positivos, o ponto fixo é um nó instável. Este caso é muito semelhante ao anterior e a diferença principal é a orientação do campo vetorial, pois, neste caso, o campo se afasta do ponto fixo. Um exemplo disso é observado no sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) + y(t), \\ \dot{y}(t) = x(t) + 2y(t). \end{cases} \quad (1.29)$$

Neste caso, a matriz $\mathbf{A}$ é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (1.30)$$

com $Tr(\mathbf{A}) = 4$ e $det(\mathbf{A}) = 3$. Com isso $s = 2$ e $s^2 = 4$, que é maior que $d = 3$ e se enquadra como um Nó Instável. De fato, utilizando o Maple obtemos a figura 1.4 a seguir.

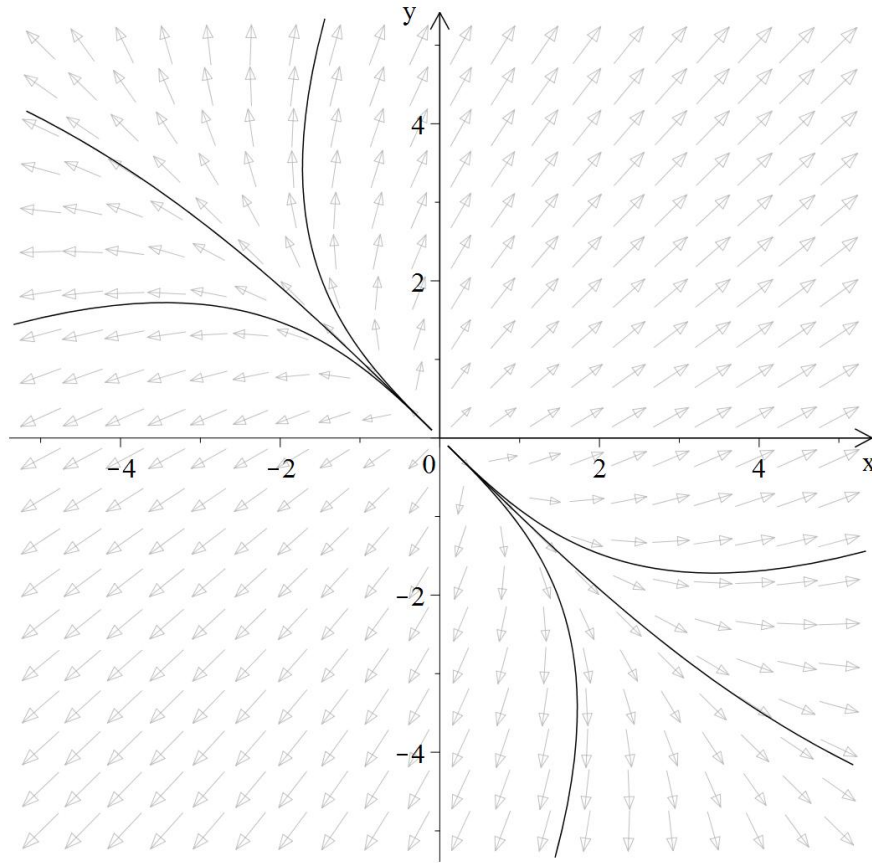


Figura 1.4 – Nó Instável do Sistema (1.29)

Temos representadas nesta figura seis soluções, as quais partem de $(-0.1001, 0.1)$, $(0.1, -0.1001)$, $(0.1, -0.0999)$, $(-0.0999, 0.1)$, $(-0.10001, 0.1)$ e $(0.10001, -0.1)$ e acompanham o a direção do campo, indicada pelas setas, se afastando de $(0, 0)$.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Na figura 1.4 é perceptível o fato de que condições iniciais próximas têm um comportamento bastante distinto, bem como o fato de que, apesar da origem ser um ponto fixo, ela não é um atrator.

1.3.3 Ponto de Sela

Se $d < 0$ temos dois autovalores reais, distintos e com sinais opostos, neste caso o ponto fixo é chamado de ponto de sela. Este caso pode ser exemplificado com o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2x(t) + y(t), \\ \dot{y}(t) = x(t) + 2y(t), \end{cases} \quad (1.31)$$

cuja matriz é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

Com isso temos $Tr(\mathbf{A}) = 0$ e $det(\mathbf{A}) = -5$. Vale ressaltar que contanto que d seja negativo, o valor de s não é importante para determinar o tipo de ponto fixo. O espaço de fase deste sistema está representado na figura 1.5, feita com o software Maple, a seguir.

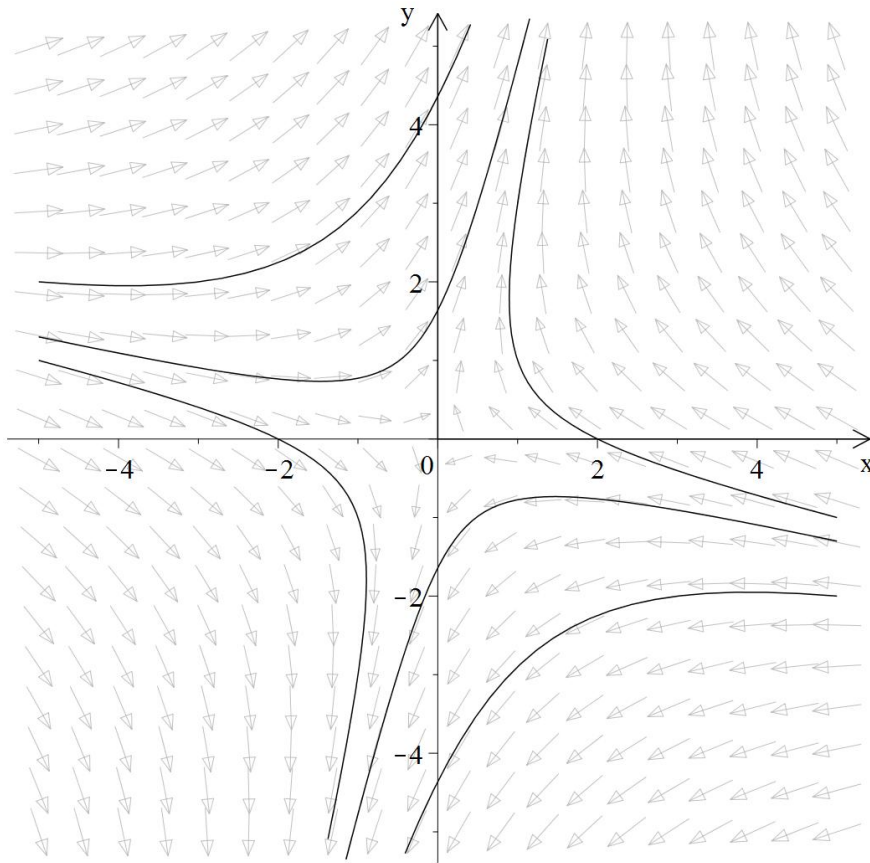


Figura 1.5 – Ponto de Sela do Sistema (1.31)

Temos representadas nesta figura seis soluções, as quais partem de $(-5, 2)$, $(5, -2)$, $(-5, 1)$, $(-5, 1.3)$, $(5, -1)$ e $(5, -1.3)$ e acompanham as setas do campo em trajetórias hiperbólicas ao redor da origem.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

O comportamento deste tipo de sistema pode ser visto mais claramente no espaço dos autovetores. Então, utilizando o comando “eigenvectors” para a matriz $\mathbf{A}$ deste sistema no software wxMaxima,

obtemos

$$\mu_1 = -\sqrt{5} \quad \text{e} \quad \mu_2 = \sqrt{5},$$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Logo, no espaço cuja base são estes autovetores, o sistema (1.31) se torna simplesmente

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -\sqrt{5}u(t), \\ \dot{v}(t) = \sqrt{5}v(t). \end{cases} \quad (1.33)$$

e, assim, o espaço de fase, feito através do Maple, é mostrado na figura 1.6 a seguir.

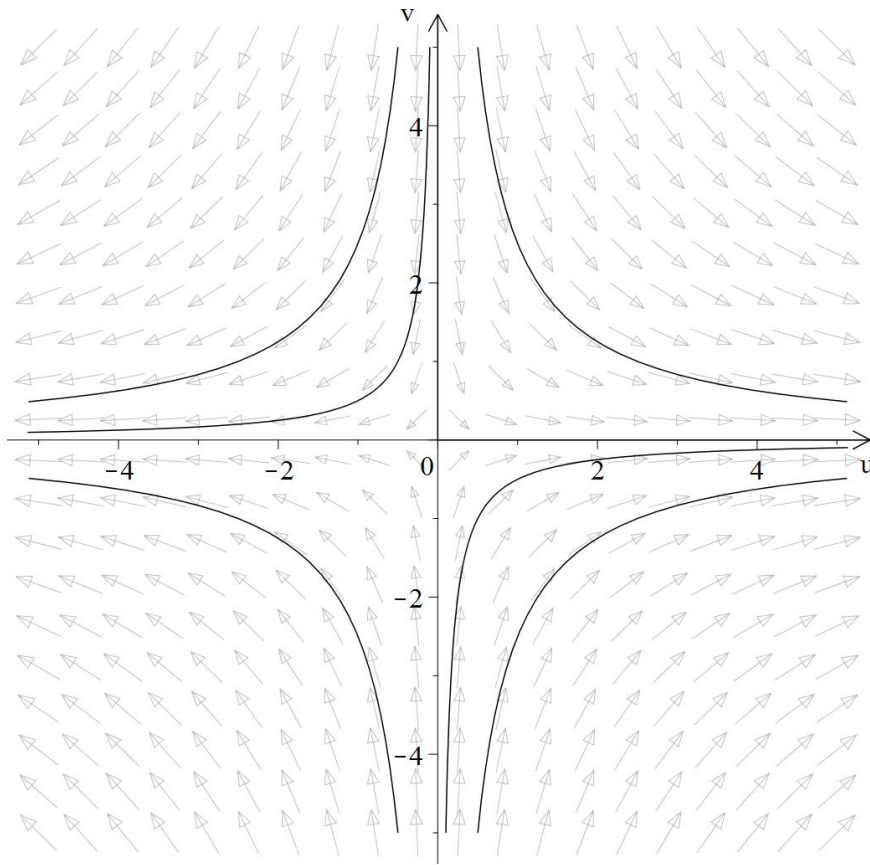


Figura 1.6 – Ponto de Sela do Sistema (1.33)

Temos representadas nesta figura seis soluções, as quais partem de $(-5, 0.5)$, $(5, -0.5)$, $(-5, -0.5)$, $(-5, 0.1)$, $(5, 0.5)$ e $(5, -0.1)$ e acompanham o campo, representado pelas setas, aproximando da origem na direção de um dos autovetores e se afastando dela na outra, o que gera as trajetórias hiperbólicas visíveis na figura.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Nesta figura é bastante visível o deslocamento do campo vetorial em direção à origem na direção de $\mathbf{V}_2$, de fato, qualquer ponto no eixo das ordenadas, referente à este vetor, se desloca em linha reta até a origem. No entanto, na direção de $\mathbf{V}_1$ o campo se afasta da origem. Desta forma, o ponto fixo na origem é estável em apenas uma direção, a de $\mathbf{V}_2$, e um deslocamento em qualquer outra direção faz com que as soluções sigam até o infinito na direção de $\mathbf{V}_1$. Isto nos ajuda a visualizar, também, esta característica na figura 1.5 mostrada anteriormente.

1.3.4 Espiral Estável

Se $s < 0$ e $d > s^2$ temos dois autovalores complexos conjugados, com a parte real negativa, neste caso o ponto fixo é uma espiral estável. Como os autovalores também podem ser números complexos, temos mais alguns casos para classificar e, particularmente, estas análises serão importantes para compreender a seção 2.1, sobre bifurcações. Para este caso, vamos analisar o espaço de fase do sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2x(t) + y(t), \\ \dot{y}(t) = -x(t) - y(t). \end{cases} \quad (1.34)$$

A matriz $\mathbf{A}$ deste sistema é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

e atende às condições necessárias. Assim, o espaço de fase, feito no Maple, é mostrado na figura 1.7, a seguir.

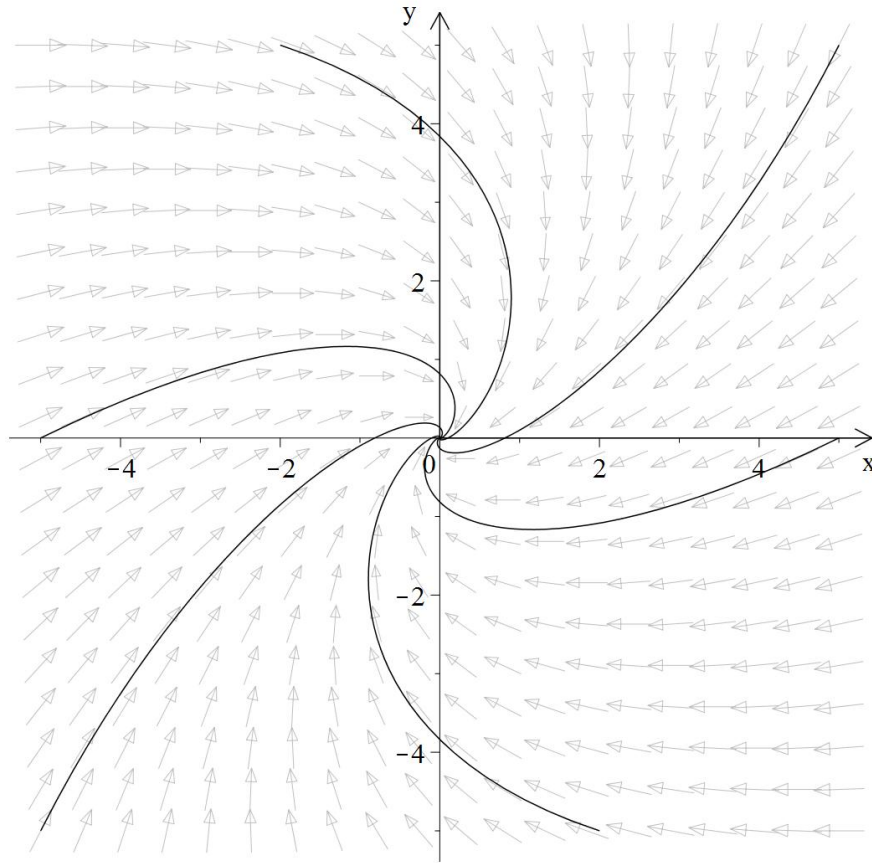


Figura 1.7 – Espiral Estável do Sistema (1.34)

Temos representadas nesta figura seis soluções, as quais partem de $(-5, 0)$, $(-2, 5)$, $(5, 5)$, $(5, 0)$, $(2, -5)$ e $(-5, -5)$ e convergem, seguindo as setas do campo, rumo como espirais logarítmicas à origem.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Neste caso, e nos próximos dois, a solução geral envolve a equação paramétrica de uma elipse, multiplicada por um fator que depende da parte real dos autovalores. De fato, a solução analítica dos sistemas com autovalores complexos chega à uma equação da forma [2]

$$X(t) = \rho e^{\mu_r t} [a \cos(\mu_i t + \alpha) + b \sin(\mu_i t + \beta)], \quad (1.36)$$

na qual, ρ , α , β , a e b são constantes e μ_r e μ_i são a parte real e a parte imaginária, respectivamente, dos autovalores. O termo entre colchetes é a equação de uma elipse (ou de um círculo se $a = b$) e o fator $\rho e^{\mu_r t}$ determina se uma dada solução é, de fato, uma elipse ou se ela se torna uma espiral logarítmica.

O desenvolvimento feito para chegar até esta equação foi omitido, mas este resultado é bastante

interessante, pois mostra que é a parte real dos autovalores que determina o tipo de ponto fixo. Neste caso, a $\mu_r < 0$ e o campo vetorial do sistema é composto de espirais logarítmicas em direção à origem.

1.3.5 Espiral Instável

Se $s > 0$ e $d > s^2$ temos dois autovalores complexos conjugados, com a parte real positiva, assim o ponto fixo é uma espiral instável. Para exemplificar este tipo de ponto fixo, podemos utilizar o sistema (1.34) com os sinais da matriz $\mathbf{A}$ trocados. Assim,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) - y(t), \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t). \end{cases} \quad (1.37)$$

Desta forma, temos uma matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.38)$$

a qual obedece este caso e é bastante similar à matriz de uma espiral estável. Assim, mostramos o espaço de fase na figura 1.8, criada através do software Maple, a seguir.

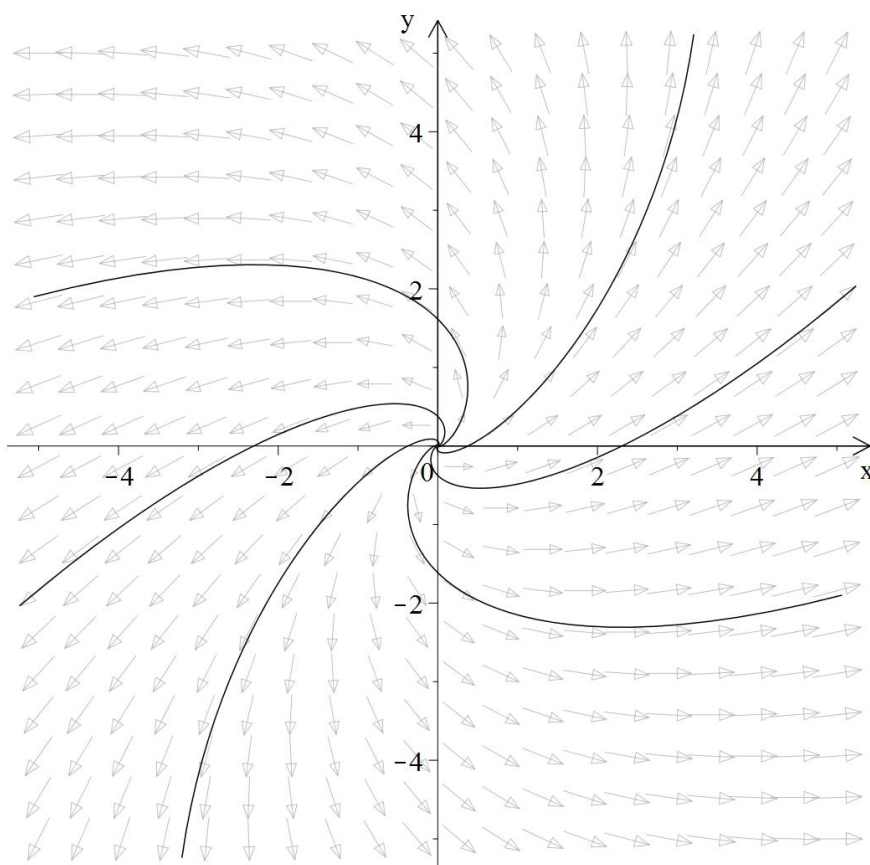


Figura 1.8 – Espiral Instável do Sistema (1.37)

Temos representadas nesta figura seis soluções, as quais partem de $(-0.01, 0)$, $(-0.01, 0.01)$, $(0.01, -0.01)$, $(0.01, 0)$, $(0.01, 0.01)$ e $(-0.01, -0.01)$ e divergem, se afastando da origem na direção das setas do campo, como espirais logarítmicas.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

O campo vetorial nesta figura é bastante similar ao da figura 1.7, com a principal diferença na orientação do campo. De fato, assim como os nós estável e instável, as espirais estáveis e instáveis são semelhantes e podem diferir apenas pela orientação do campo.

1.3.6 Rotor ou Centro

Se $s = 0$ e $d > s^2$ temos dois autovalores complexos conjugados, com a parte real nula, desta forma temos um rotor ou centro. Neste caso as soluções são trajetórias fechadas, no formato de

elipses, justamente por $e^{\mu_r t} = 1$, uma vez que $\mu_r = 0$, na equação (1.36). Um exemplo é o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - 3y(t), \\ \dot{y}(t) = x(t) - y(t), \end{cases} \quad (1.39)$$

cuja matriz é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

Com o auxílio do software Maple, podemos ver o espaço de fase deste sistema na figura 1.9, a seguir.

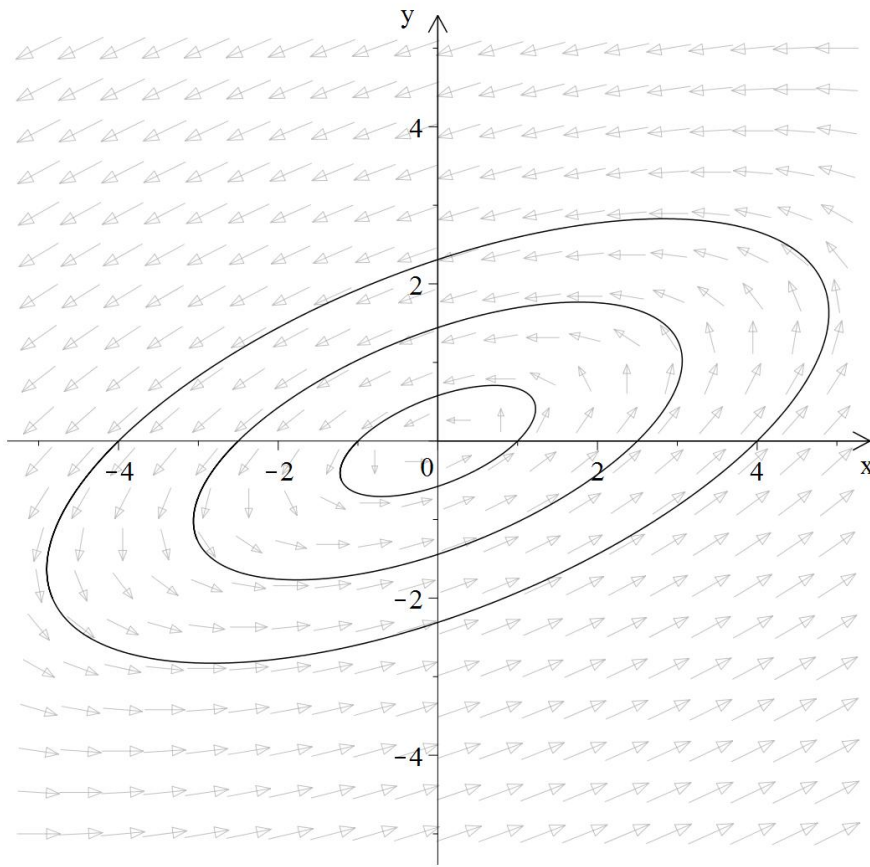


Figura 1.9 – Rotor do Sistema (1.39)

Temos representadas nesta figura três soluções, as quais partem de $(-4, 0)$, $(-2.5, 0)$ e $(-1, 0)$ e percorrem trajetórias elípticas periódicas ao redor da origem, obedecendo a direção do campo, representada pelas setas.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Este tipo de ponto fixo, apesar de não ser um atrator, pois as trajetórias não se aproximam dele, é estável, já que variações nas condições iniciais não causam um distanciamento exponencial da solu-

ção. Seguindo a definição de estabilidade [2], este tipo de ponto é estável, mas não assintoticamente estável. Este conceito será esclarecido na seção 2.2.

1.3.7 Nós Próprios e Impróprios

Se $d = s^2$ temos dois autovalores iguais, ou degenerados, o que caracteriza um nó próprio se a matriz $\mathbf{A}$ for diagonal, ou um nó Impróprio caso contrário. Em ambos os casos, s determina a estabilidade. Caso a matriz $\mathbf{A}$ seja diagonal, qualquer vetor é um autovetor, então o campo vetorial se aproxima ou se afasta do ponto fixo em todas as direções. Por exemplo, seja o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t), \\ \dot{y}(t) = y(t), \end{cases} \quad (1.41)$$

com a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.42)$$

O espaço de Fase, na figura 1.10, mostra que as soluções são retas se afastando da origem.

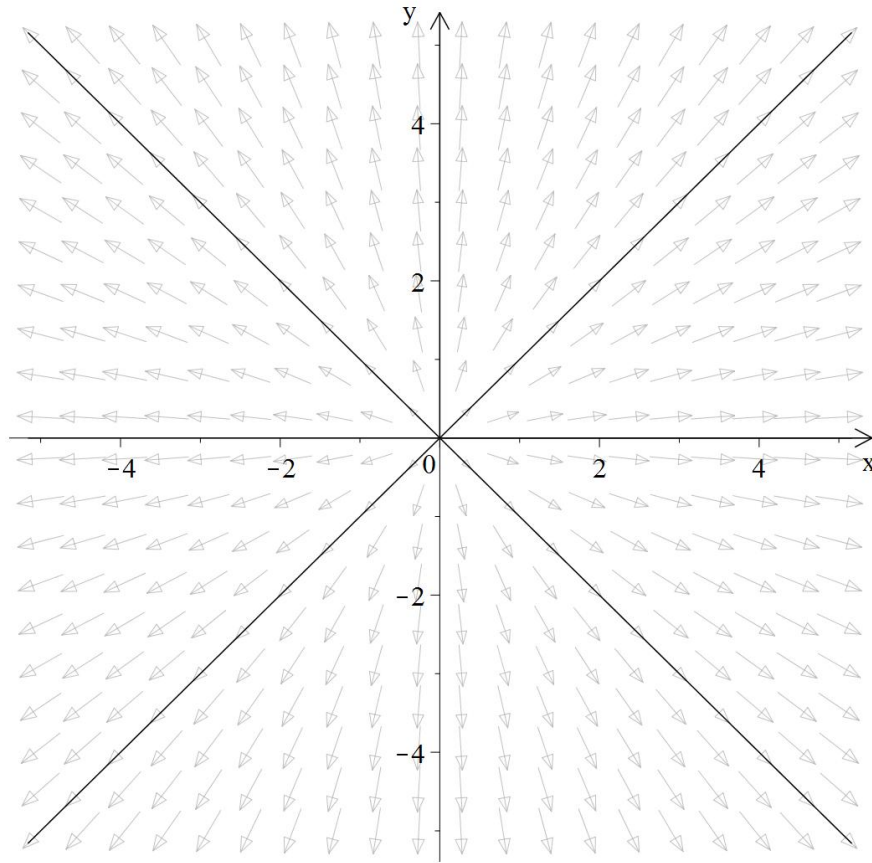


Figura 1.10 – Nó Próprio do Sistema (1.41)

Temos representadas nesta figura seis soluções, as quais partem de $(-0.01, 0)$, $(-0.01, 0.01)$, $(0.01, 0.01)$, $(0.01, 0)$, $(0.01, -0.01)$ e $(-0.01, -0.01)$ e divergem como retas, se afastando da origem na direção das setas do campo.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Por outro lado, se $\mathbf{A}$ não for diagonal, não é possível encontrar dois autovetores linearmente independentes, o que faz o campo vetorial se acumular em uma única direção, ao redor do ponto fixo. O sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) + 2y(t), \\ \dot{y}(t) = -2x(t) - y(t), \end{cases} \quad (1.43)$$

apresenta este comportamento e a sua matriz é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

O espaço de fase mostra, agora, as soluções divergindo a partir da vizinhança da origem em uma direção para acompanhar o campo vetorial, como podemos ver na figura 1.11, a seguir.

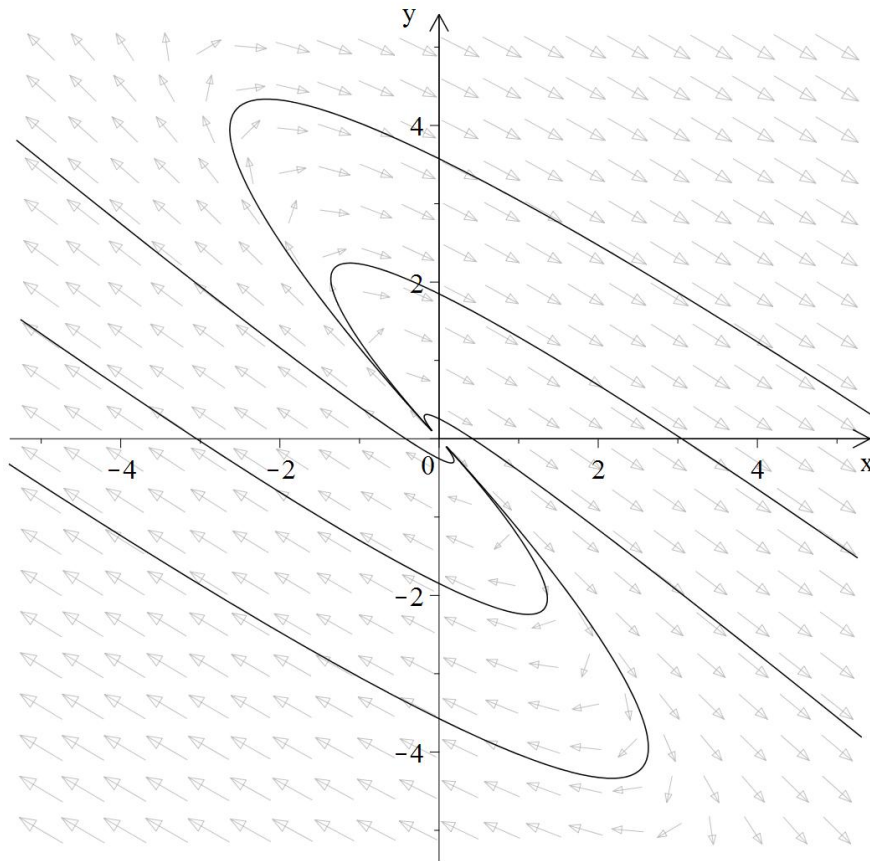


Figura 1.11 – Nó Impróprio do Sistema (1.43)

Temos representadas nesta figura seis soluções, as quais partem de $(-0.0925, 0.1)$, $(0.0925, -0.1)$, $(-0.0915, 0.1)$, $(0.0915, -0.1)$, $(-0.085, 0.1)$ e $(0.085, -0.1)$, posições bem próximas, e se afastam da origem em uma direção perceptível na imagem, antes de seguirem as setas do campo vetorial.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Cada um destes casos, assim como os nós e as espirais, apresenta um caso estável, quando $s < 0$ e um instável, quando $s > 0$. Aqui foram apresentados um exemplo de cada porque, usualmente, estes sistemas não tem grande relevância e são omitidos. Entretanto, para um estudo mais completo eles são apresentados neste trabalho.

1.3.8 Pontos Fixos Não-Hiperbólicos

Se $d = 0$ um dos autovalores é nulo e há uma reta, que passa pela origem, na qual todos os pontos são pontos fixos, estáveis ou instáveis dependendo do sinal de s . Quando o determinante é

nulo, um dos autovalores da matriz também é nulo, o que faz com que todos os pontos na direção do autovetor associado à este autovalor sejam pontos fixos classificados como não-hiperbólicos. Para exemplificar, podemos usar o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + 2y(t), \\ \dot{y}(t) = x(t) + 2y(t). \end{cases} \quad (1.45)$$

A matriz $\mathbf{A}$, então, é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (1.46)$$

Desta forma, podemos observar na figura 1.12, abaixo, que há uma área sem as setas do campo vetorial, esta é a direção do autovetor correspondente ao autovalor nulo e, portanto, a direção das setas mostra a direção do outro autovetor.

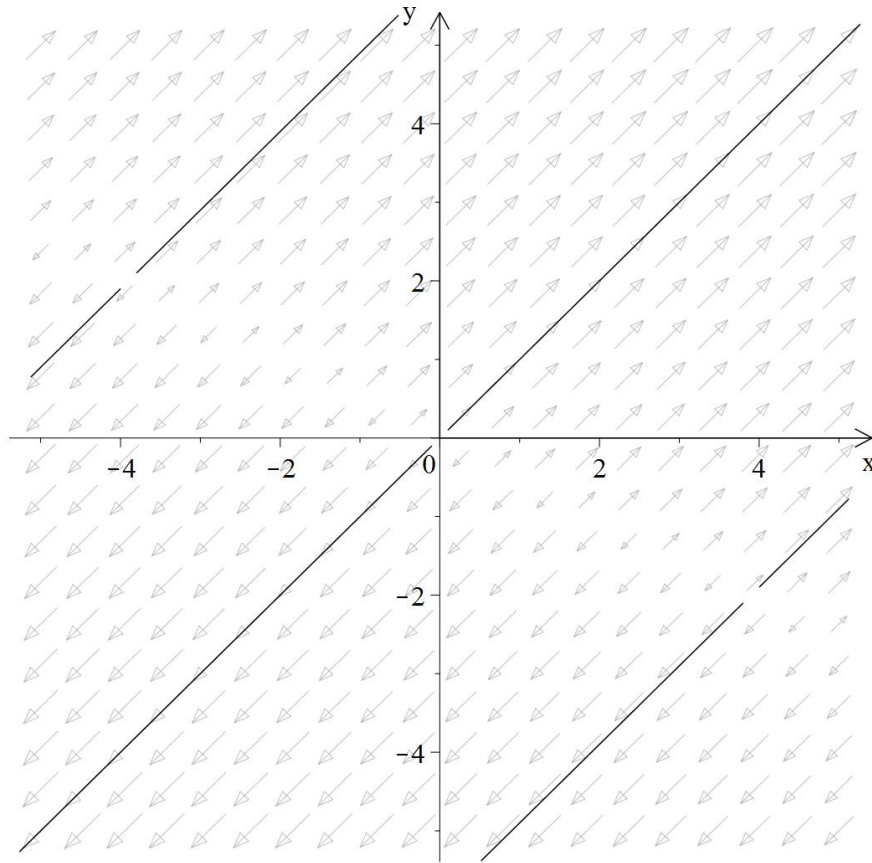


Figura 1.12 – Ponto Fixo Não-hiperbólico do Sistema (1.45)

Temos representadas nesta figura seis soluções, as quais partem de $(-3.8, 2, 1)$, $(-4, 1.9)$, $(0.1, 0.1)$, $(3.8, -2.1)$, $(4, -1.9)$ e $(-0.1, -0.1)$ e se afastam em linha reta da direção do autovetor cujo autovalor é nulo, como indicam as setas do campo vetorial.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Isso ocorre pois, de acordo com (1.18), as soluções são constantes na direção de, por exemplo, $\mathbf{V}_1$ e os pontos sobre o eixo de $\mathbf{V}_1$ tem componente $\mathbf{V}_2$ nula. Lembrando, então, que um ponto fixo $\mathbf{X}_0$ obedece $\dot{\mathbf{X}}_0 = 0$, percebemos que qualquer que seja o ponto na direção de $\mathbf{V}_1$, ele será, de fato, um ponto fixo.

1.3.9 Representação da Classificação dos Sistemas de Duas Dimensões

Todos estes casos podem ser representados em um espaço de abscissa s e ordenada d com a parábola $d = s^2$ presente, como mostrado na figura 1.13 abaixo.

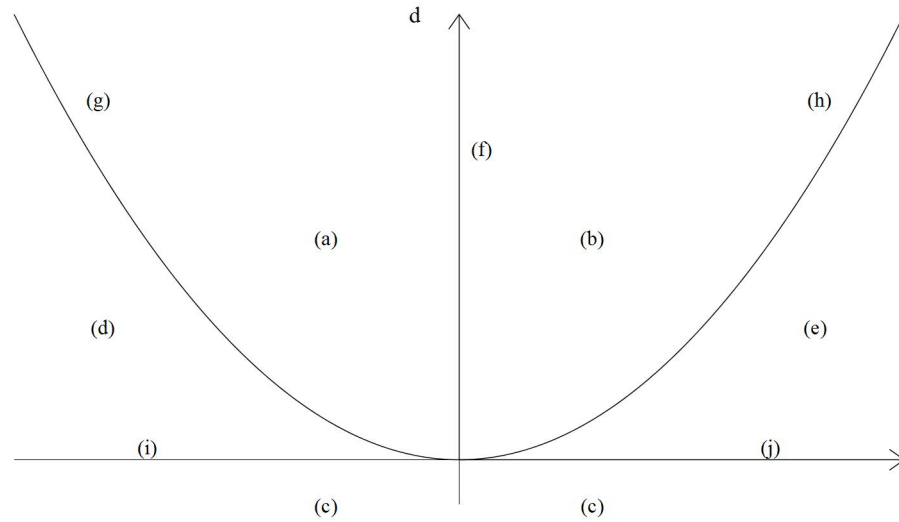


Figura 1.13 – Representação da classificação dos Pontos Fixos

Nesta imagem temos representada a parábola $d = s^2$ e as regiões indicam (a) espirais estáveis, (b) espirais instáveis, (c) pontos de sela, (d) nós estáveis, (e) nós instáveis, (f) rotores, (g) nós próprios ou impróprios estáveis, (h) nós próprios ou impróprios instáveis, (i) pontos fixos não-hiperbólicos estáveis e (j) pontos fixos não-hiperbólicos instáveis.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Assim, cada área do gráfico, como a área entre a região positiva do eixo s e a parábola, representa um tipo de ponto fixo. Apesar de sistemas dinâmicos lineares serem pouco comuns, sempre que há um ponto fixo em um sistema não-linear ele se comporta como em um sistema linear em sua vizinhança, como veremos na seção 1.4, a seguir.

1.4 Sistemas Não-Lineares

Sistemas não-lineares são muito mais complexos se comparados aos sistemas lineares e, por vezes, apresentam uma dinâmica bastante intrincada. Quando existem não-linearidades, há a possibilidade de múltiplos pontos fixos, de atratores estranhos e caóticos, bifurcações decorrentes de parâmetros de controle e de caos no sistema. Além disso, o estudo da estabilidade leva apenas à características locais no sistema, na vizinhança dos pontos fixos, exigindo uma análise mais cuidadosa neste tipo de sistema.

Neste caso, $\mathbf{F}$ é uma função não-linear das coordenadas $\mathbf{X}$, o que torna a equação (1.1), em

geral, insolúvel analiticamente. Apesar disso, a utilização de softwares matemáticos nos permitem utilizar métodos numéricos para resolver este tipo de sistemas e, quando possível, plotar seu espaço de fase.

Os sistemas dinâmicos, como visto na seção anterior, podem ser classificados de acordo com a ordem das derivadas envolvidas. Por exemplo, um sistema unidimensional que envolva apenas a posição é um sistema de primeira ordem. Por outro lado, os sistemas da mecânica newtoniana são de segunda ordem, pois obedecem a segunda lei de Newton

$$\mathbf{F}_r = \dot{\mathbf{p}}, \quad (1.47)$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem, na qual $\mathbf{F}_r$ é a força resultante sobre um corpo de massa m e $\dot{\mathbf{p}}$ é a derivada temporal do momento linear deste corpo, dado por $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$, onde, por sua vez, $\dot{\mathbf{r}}$ é a derivada temporal da posição. Desta forma percebemos que

$$\mathbf{F}_r = \frac{d}{dt} \left(m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right). \quad (1.48)$$

Na equação (1.1) não aparecem explicitamente derivadas de segunda ordem, no entanto, com a inclusão da relação entre posição e velocidade, ou posição e momento, em $\mathbf{X}$ podemos apresentar a segunda lei de Newton como um sistema dinâmico na forma de equação (1.1). De fato, com a relação $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ ou a relação $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ podemos representar a segunda lei de Newton, em uma dimensão, como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ F_{rx}/m \end{bmatrix}, \quad (1.49)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x/m \\ F_{rx} \end{bmatrix}, \quad (1.50)$$

onde, x , v_x , p_x e F_{rx} são as componentes da posição, da velocidade, do momento e da força, respectivamente, na direção x . Ambos os sistemas são equivalentes, desde que a massa seja constante, mas, caso ela não seja, deve-se utilizar o sistema com o momento.

Observando os sistemas (1.49) e (1.50) percebemos que não necessariamente eles envolvem não-linearidades. De fato, é a força resultante envolvida que determina o tipo de sistema com o qual iremos trabalhar. Por exemplo, um sistema em equilíbrio, no qual a força resultante é nula, é linear. Por outro lado, um sistema gravitacional leva a uma força resultante com não-linearidades, como veremos com mais detalhes no capítulo 3.

1.4.1 Linearização

Apesar da complexidade dos sistemas não-lineares, podemos aproximá-los de sistemas lineares na vizinhança dos seus pontos fixos para analisar sua estabilidade. Este processo, denominado linearização, é feito definindo um vetor de distância entre o ponto fixo e uma solução em sua vizinhança e analisando seu comportamento. De fato, seja o vetor

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_0, \quad (1.51)$$

temos que, na vizinhança do ponto fixo $\mathbf{X}_0$, a distância $\boldsymbol{\xi}(t)$ é pequena. Desta forma, podemos simplificar o problema utilizando uma série de Taylor para a função $\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}(t))$ na equação (1.1). Assim,

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0) + \mathbf{J}(\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_0), \quad (1.52)$$

onde $\mathbf{J}$ denota a matriz jacobiana, cujos elementos são

$$J_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{X}_0}. \quad (1.53)$$

Esta matriz é constante, por ser obtida a partir da derivada das componentes de $\mathbf{F}$, com a substituição das variáveis pelas coordenadas de cada ponto fixo. Desta forma, existe uma matriz jacobiana para cada um destes pontos.

Como a derivada temporal da equação (1.51) é

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \dot{\mathbf{X}}(t), \quad (1.54)$$

A equação (1.1) se torna

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)), \quad (1.55)$$

e, utilizando a equação (1.52), temos

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{J}\boldsymbol{\xi}(t), \quad (1.56)$$

uma vez que $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = 0$ por definição e $\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_0 = \boldsymbol{\xi}(t)$. Este resultado é similar à equação (1.3) e toda a análise sobre estabilidade feita na seção 1.2 é válida contanto que $\boldsymbol{\xi}(t)$ permaneça pequeno, o que implica que esta análise funciona, de fato, apenas na vizinhança de $\mathbf{X}_0$.

Para exemplificar a utilização da equação (1.56), podemos analisar o seguinte sistema de segunda ordem [3],

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x^2(t) - 4y^2(t) + 4, \\ \dot{y}(t) = -x^2(t) + y^2(t) + 1. \end{cases} \quad (1.57)$$

Agora o primeiro passo é identificar os pontos fixos. Para isso, $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$ devem ser nulos. Então, observamos da primeira equação que $\dot{x}(t) = 0$ nos pontos da elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \quad (1.58)$$

e, da segunda equação do sistema, que $\dot{y}(t) = 0$ nos pontos da hipérbole

$$x^2 - y^2 = 1. \quad (1.59)$$

Os ponto onde ambas as derivadas são nulas são as interseções entre as duas partes da hipérbole e a elipse. Utilizando o software Maple, com o comando “DEplot”, explicado na seção ??, o espaço de fase foi construído e está representado na figura 1.14, abaixo.

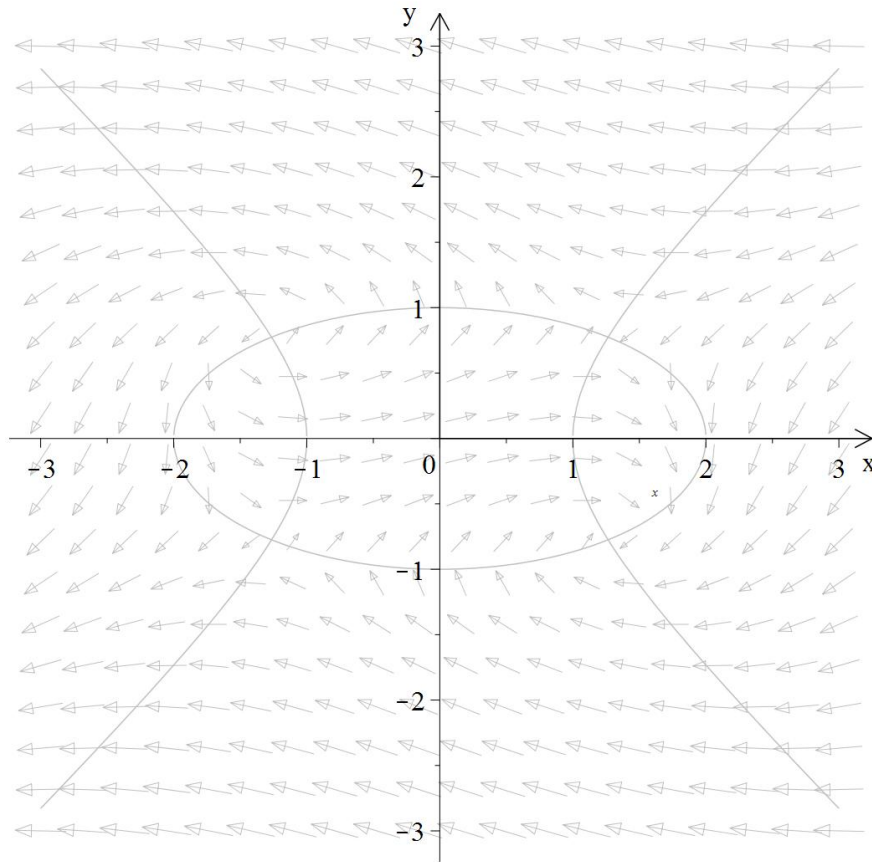


Figura 1.14 – Espaço de Fase do Sistema (1.57) com quatro Pontos Fixos

Nesta imagem estão representadas a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, sobre a qual $\dot{y}(t) = 0$, e a elipse $x^2/4 + y^2 = 1$, na qual $\dot{x}(t) = 0$, juntamente com as setas do campo vetorial do sistema, sem condições iniciais. Neste caso, as interseções entre a hipérbole e a elipse indicam os pontos fixos, nos quais $\dot{\mathbf{X}}(t) = 0$.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Nesta figura estão representadas, também, a hipérbole e a elipse e é possível perceber os pontos fixos nas suas quatro interseções. Visualmente, este sistema apresenta dois pontos de sela, um nó instável e um nó estável. Então, são estas informações que devemos obter utilizando a equação (1.56).

Para encontrar as coordenadas dos pontos fixos, vamos resolver numericamente o sistema 1.57, definido como “f”, com os comandos “ev” e “solve” no software wxMaxima, como detalhado no apêndice. Assim, temos os pontos fixos nas coordenadas, com 4 casas decimais, $p_1 = (-1.2659, -0.7746)$, $p_2 = (1.2659, -0.7746)$, $p_3 = (-1.2659, 0.7746)$ e $p_4 = (1.2659, 0.7746)$, salvos como “fixos” no programa. O software gera estes valores com mais precisão e são eles que serão utilizados para a obtenção das respectivas matrizes jacobianas.

Para o cálculo da matriz jacobiana, são definidas uma lista “v” com as variáveis e um termo “h[i,j]” para definir os elementos da matriz, obedecendo a equação (1.53). Após isso, definimos “jacobiana” como o comando “genmatrix” para gerar a matriz 2 por 2 que precisamos. Com este comando obtemos a matriz jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2x(t) & -8y(t) \\ -2x(t) & 2y(t) \end{bmatrix}. \quad (1.60)$$

Para classificar os pontos fixos, então, devemos introduzir suas coordenadas nesta matriz para obter uma jacobiana $\mathbf{J}$ constante que atua exatamente como a matriz $\mathbf{A}$, da seção 1.2, para cada ponto.

Para isso, utilizamos o comando “jacobiana, fixos[1]”, definido como “jacobiana1” para utilizar o valor de p_1 na Jacobiana. Com isso, podemos utilizar o comando “determinant” para calcular o determinante da matriz e o comando “jacobiana1[1,1]+jacobiana1[2,2]” para calcular o seu traço.

Fazendo este procedimento, que está em detalhes na seção A.2, obtemos o valor $-19,5959$ aproximado para quatro casas decimais. Como ele é negativo não precisamos calcular o traço e temos que o ponto p_1 , o inferior esquerdo, é um ponto de sela. Repetindo este processo para o ponto p_4 obtemos o mesmo valor para o determinante, o que implica que este ponto, o superior direito, também é um ponto de sela.

Para o ponto p_2 obtemos o determinante da matriz com o valor $19,5959$, então devemos calcular o traço, o que resulta em $-4,0790$ aproximado para quatro casas decimais. O valor de s^2 , o quadrado da metade do traço, é, então, aproximadamente $4,1596$. Assim, temos um determinante positivo e maior que s^2 , com s , a metade do traço, negativo. Desta forma, o ponto p_2 , o inferior direito, é uma espiral estável.

Por fim, para o ponto p_3 temos, também, um determinante com valor 19,5959, mas agora o traço é 4,0790 e s^2 tem o mesmo valor que em p_2 , 4,1596. Com o determinante positivo e maior que s^2 e a $s > 0$, caracterizamos uma espiral instável em p_3 .

Após identificar matematicamente a estabilidade local dos quatro pontos fixos, podemos observar com mais clareza o comportamento relativamente complexo das soluções no espaço de fase, na figura 1.15 a seguir.

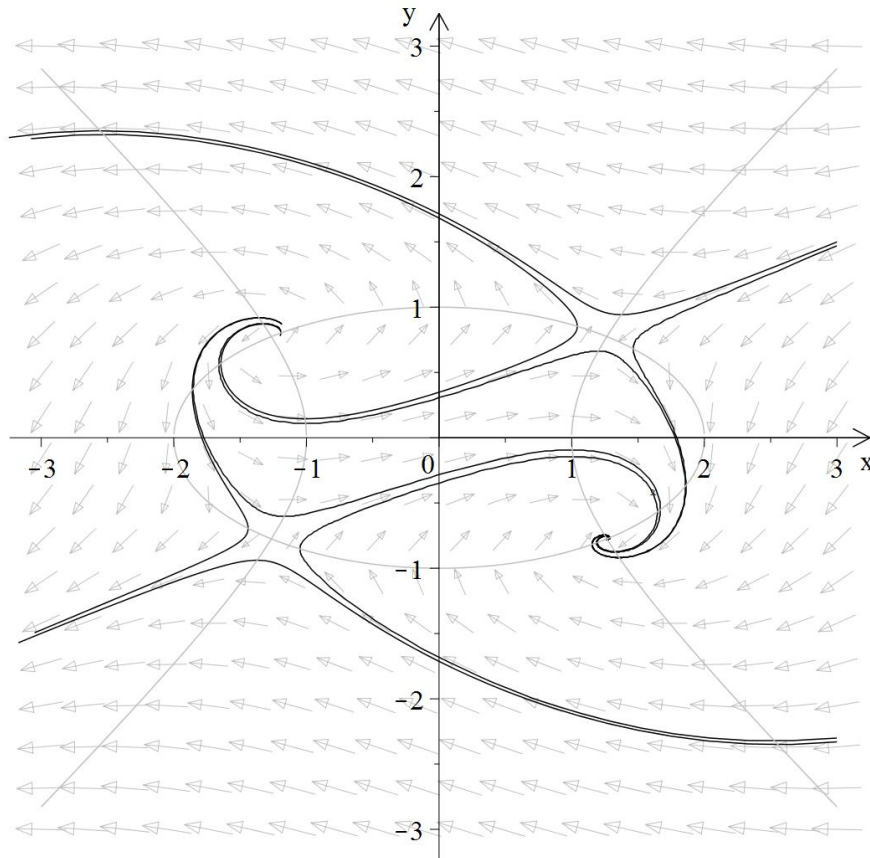


Figura 1.15 – Espaço de Fase do Sistema (1.57)

Nesta imagem apresentamos oito soluções, partindo de $(3, -2.3)$, $(3, -2.33)$, $(3, 1.5)$, $(3, 1.47)$, $(-1.195, 0.825)$, $(-1.2, 0.78)$, $(-1.185, 0.87)$ e $(-1.185, 0.872)$, as quais seguem o interessante padrão das setas, as quais representam o campo vetorial, causado por quatro pontos fixos nas interseções entre a hipérbole e a elipse. Vale destacar que o único atrator é o ponto inferior direito, a espiral estável.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

É interessante observar que o comportamento do campo vetorial segue a classificação de cada

ponto fixo em sua vizinhança e, no geral, apresenta uma dinâmica que concilia o campo ao redor de cada um. Assim, temos tanto soluções que começam na vizinhança de um ponto fixo e se dirigem para a de outro, quanto soluções que são regidas pela dinâmica gerada por apenas um dos pontos.

Até aqui foi analisada a estabilidade linear dos pontos fixos de sistemas dinâmicos lineares ou linearizados. Entretanto, este tipo de ponto não é o único caso de solução estável para sistemas dinâmicos não-lineares, como veremos na seção seguinte.

1.5 Ciclos Limite

Quando lidamos com sistemas dinâmicos não-lineares podemos encontrar soluções periódicas estáveis que se comportam como atratores. Este tipo de solução denomina-se ciclo limite.

Um exemplo de sistema com uma solução deste tipo é

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) + x(t)(1 - 2x^2(t) - 3y^2(t)), \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t)(1 - 2x^2(t) - 3y^2(t)). \end{cases} \quad (1.61)$$

Este sistema ilustra bem a complexidade de um sistema não-linear se comparado a um linear. Neste sistema, $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$ são nulas apenas na origem e seria aceitável que o tipo deste ponto fixo determinasse a dinâmica do sistema. No entanto, as não-linearidades presentes geram um ciclo limite, o qual modifica o campo vetorial, como é possível observar na figura 1.16 com o espaço de fase deste sistema feito pelo Maple.

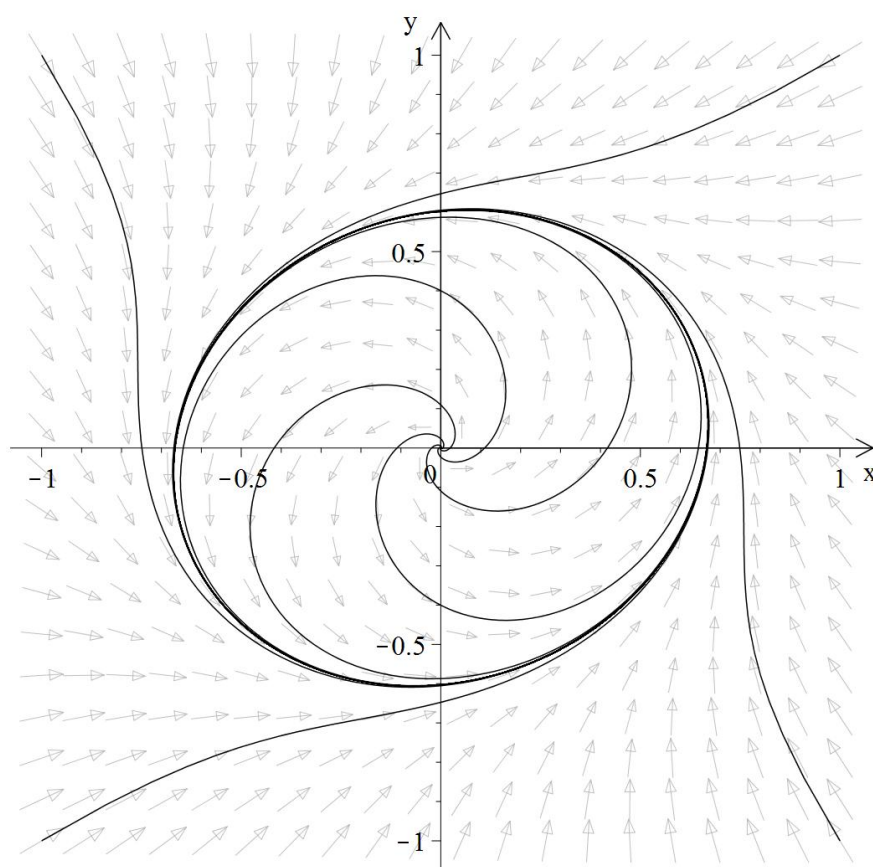


Figura 1.16 – Espaço de Fase do Sistema (1.61) com um Ciclo Limite

Nesta imagem temos, além das setas do campo, quatro soluções partindo da vizinhança da origem, de $(0, 0.001)$, $(0, -0.001)$, $(0.001, 0)$ e $(-0.001, 0)$, as quais se afastam dela e são “absorvidas” pelo ciclo limite, e quatro que chegam no ciclo vindas de $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Nesta figura, podemos perceber que a origem é uma espiral instável e o campo vetorial localmente obedece à isso. No entanto, as soluções que partem da vizinhança do ponto fixo não seguem até o infinito, bem como as soluções que partem do infinito também não atingem a origem. Isto ocorre por conta da existência do ciclo limite, para o qual as trajetórias tendem com o passar do tempo. Outra característica importante nesta figura, que é comum aos ciclos limite, é a inversão do campo vetorial dentro e fora dele, uma vez que ele é divergente e convergente, respectivamente, se observamos com relação à origem. Este fato pode ser usado para identificar ciclos limite, como veremos na seção seguinte.

1.5.1 Existência de Ciclos Limite

“Num ponto do espaço de fase, que não seja ponto fixo, passa exatamente uma solução. As soluções de um sistema dinâmico contínuo, no espaço de fase, nunca se podem cruzar.”[3]. De fato, como afirma este autor, as soluções no espaço de fase não podem se cruzar, no entanto nada as impede de ficarem arbitrariamente próximas.

Com isso, quando há um nó instável, uma espiral instável ou um rotor em uma região do espaço, mas o campo se direciona à esta região, então deve haver um ciclo limite que “absorva” todas as soluções. Isto é exatamente o que ocorre na figura 1.16, a qual apresenta uma espiral instável na origem, mas apresenta uma região onde o campo converge nesta direção. Para que as soluções não se cruzem, então, existe um ciclo limite no espaço de fase do sistema (1.61), na figura 1.16.

É possível, então, identificar a existência ou inexistência de ciclos limite através da matriz jacobiana de um ponto fixo qualquer [3]. Por exemplo, um valor negativo para o determinante desta matriz implica que o ponto fixo é um ponto de sela, então não deve haver um ciclo limite o envolvendo.

1.5.2 Oscilador de van der Pol

Um sistema não-linear importante ao longo da história foi o oscilador de Van der Pol. Para compreender a equação obtida por Balthasar van der Pol, começamos analisando um oscilador harmônico amortecido, com o termo de amortecimento não-linear. Este sistema tem um grau de liberdade, por exemplo na direção x , e a força resultante F_{rx} para este sistema é

$$F_{rx} = -h(x)\dot{x} - kx, \quad (1.62)$$

onde $h(x)$ é um termo de amortecimento geral, para um força dependente da velocidade, e k é uma constante positiva associada à força de restituição $-kx$. O termo F_{rx}/m na equação (1.49) é, então

$$\frac{F_{rx}}{m} = -f(x)\dot{x} - \omega^2 x, \quad (1.63)$$

onde $f(x) = h(x)/m$ e em $\omega = \sqrt{k/m}$. A equação (1.49) para este caso é

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ -f(x)\dot{x} - \omega^2 x \end{bmatrix}, \quad (1.64)$$

e o sistema correspondente é

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_x, \\ \dot{v}_x(t) = -f(x)\dot{x} - \omega^2 x. \end{cases} \quad (1.65)$$

Devemos agora especificar o termo $f(x)$. Caso este termo seja nulo, teremos o sistema para um oscilador harmônico simples, com frequência ω . Caso ele seja constante, teremos um oscilador harmônico amortecido comum. Vale ressaltar que esta constante pode ser negativa, o que implica que a força, que era de amortecimento, está agora na mesma direção que a velocidade, aumentando seu módulo. Neste caso, fisicamente temos uma fonte externa exercendo trabalho sobre o sistema.

O termo utilizado para se chegar ao sistema de van der Pol é

$$f(x) = \alpha(x^2 - x_0^2). \quad (1.66)$$

Este termo tem seu sinal dependente da posição, sendo positivo se $x^2 > x_0^2$ e negativo, caso contrário, além de ser nulo quando $x = \pm x_0$. Desta forma, o termo de amortecimento ora dissipa energia, ora injeta energia no sistema.

Podemos tratar deste sistema [2] definindo $x_0 = \omega_0 = 1$ e simplificando bastante a equação (1.65) com o termo de amortecimento que vamos usar. Desta forma, desconsiderando as linhas, obtemos

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_x, \\ \dot{v}_x(t) = -x - \alpha(x^2 - 1)v_x. \end{cases} \quad (1.67)$$

Agora podemos utilizar o software Maple para obter o espaço de fase deste sistema para alguns valores de α . A figura 1.17 mostra o espaço de fase de um oscilador harmônico simples, com $\alpha = 0$.

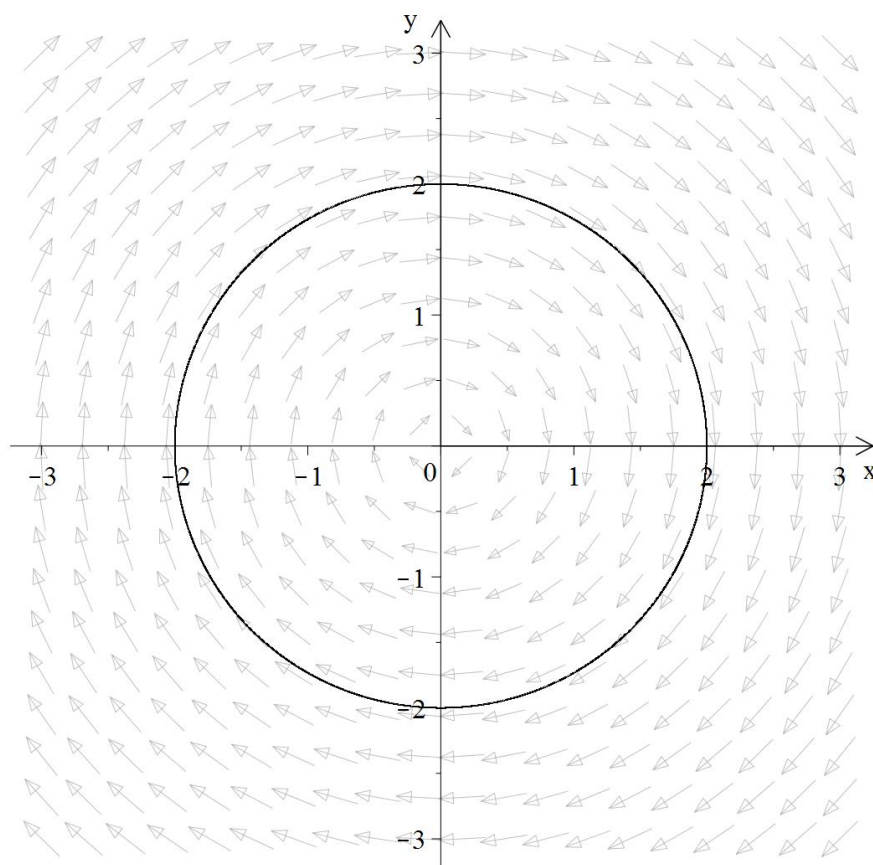


Figura 1.17 – Espaço de Fase de um Oscilador Harmônico Simples

Quando a constante $\alpha = 0$, a equação (1.67) se reduz à equação de um oscilador harmônico simples. A solução apresentada nesta figura parte de $(-2, 0)$ e percorre uma trajetória periódica, obedecendo a direção das setas do campo vetorial.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

As soluções, nesta figura, são órbitas fechadas, representando a oscilação na direção x e a variação da velocidade da partícula na direção y . A figura 1.18 mostra o espaço de fase com $\alpha = 0.4$.

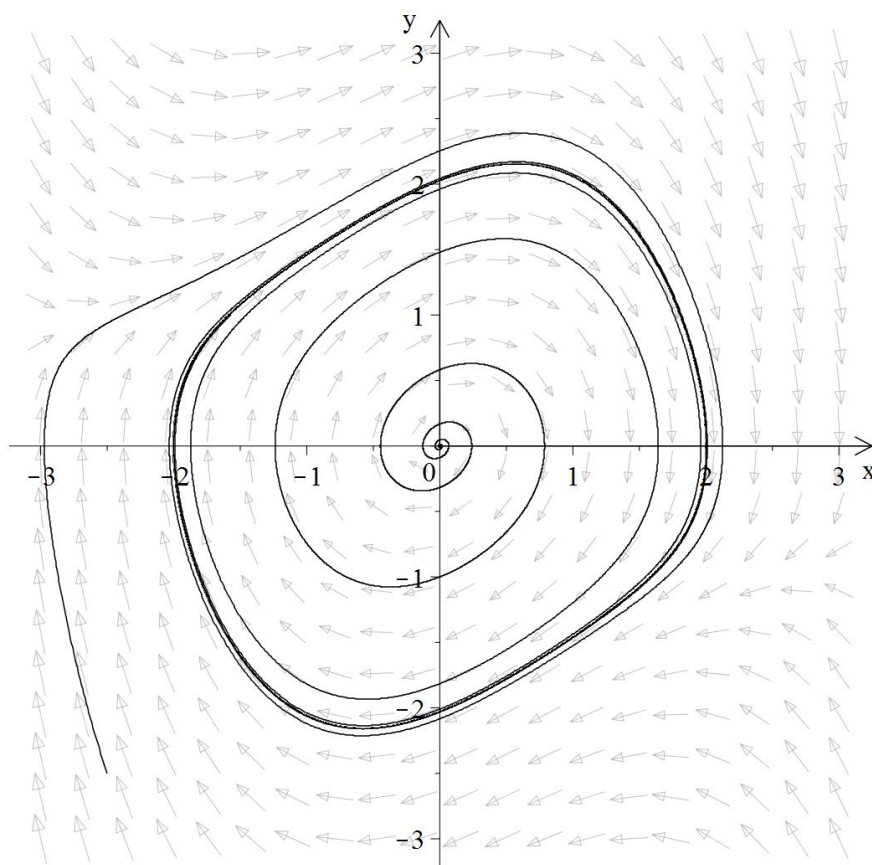


Figura 1.18 – Espaço de Fase do Oscilador de van der Pol com Não-Linearidade Fraca

Com uma não-linearidade fraca, com $\alpha = 0.4$, vemos um ciclo limite se formando, para o qual tanto as trajetórias internas quanto as externas terminam oscilando. As soluções nesta imagem partem de $(-2.5, -2.5)$ e de $(0, 0.001)$ e seguem as setas do campo.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Nesta figura, observamos que condições iniciais próximas à origem se afastam dela e condições distantes se aproximam. Podemos perceber, também, a semelhança do ciclo limite com o oscilador harmônico simples, já que α é pequeno. Por fim, a figura 1.19 mostra o espaço de fase com $\alpha = 4$.

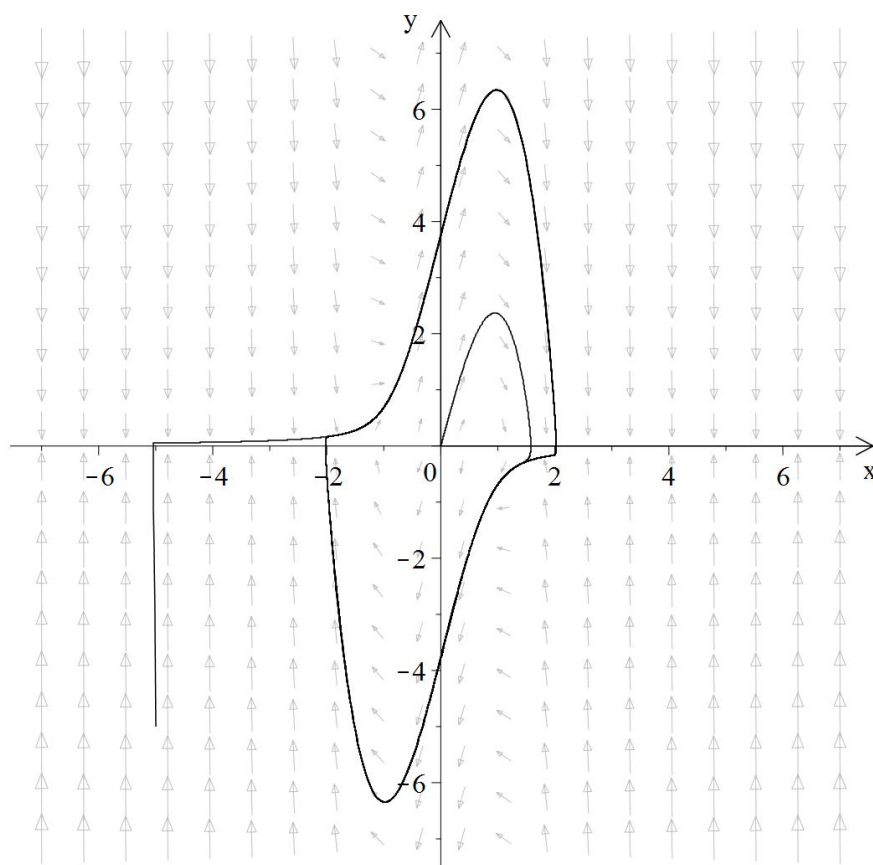


Figura 1.19 – Espaço de Fase do Oscilador de van der Pol com Não-Linearidade Forte

Com uma não-linearidade forte, com $\alpha = 4$, a figura assume o formato característico do ciclo limite para o oscilador de van der Pol. A escala desta figura está diferente das demais e as soluções partem de $(-5, -5)$ e de $(0, 0.001)$ para seguir a direção do campo, indicada pelas setas.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Agora podemos ver bastante diferença desta figura com relação às figuras 1.17 e 1.18. Ainda assim, com o decorrer do tempo, qualquer solução termina no ciclo limite que se forma. Neste caso, com α grande, observamos que o movimento no ciclo, começando pela amplitude máxima, inicia com velocidade baixa e acelera rapidamente antes de desacelerar de mesmo modo até a posição oposta da oscilação, onde o sentido do movimento se inverte. Estes movimentos são chamados de vibrações de relaxamento [2] e são encontradas frequentemente na natureza, como no som de um freio, o ritmo das batidas de corações e até a variação de populações de animais.

Expoentes de Lyapunov e Caos

Um sistema determinístico é, em teoria, um sistema no qual é possível determinar toda a sua dinâmica através de suas equações de movimento e de condições iniciais arbitrárias. Entretanto, quando analisamos o parâmetro de controle, λ , na equação (1.1), podemos perceber mudanças na dinâmica dos sistemas, as quais, por vezes, são bastante drásticas.

Por exemplo, com a variação deste parâmetro, um ponto fixo pode deixar de ser estável e se tornar instável, ou um sistema com apenas um ponto fixo na origem passa a ter um ciclo limite. A este fenômeno chamamos de bifurcação, o que será o objeto de estudo da seção 2.1.

Outro exemplo, são sistemas que simplesmente deixam de ter um comportamento previsível, pois se tornam extremamente sensíveis às condições iniciais. Estes sistemas são chamados de sistemas caóticos e temos um bom exemplo na seção 2.6. Estes casos são importantes por ocorrerem comumente na natureza, como no comportamento da atmosfera, estudado na meteorologia.

Um estudo mais detalhado destes sistemas exige o estudo da estabilidade já abordado no capítulo 1 com a adição de um caso extra: o estudo de soluções dependentes do tempo. Este tópico é abordado na seção 2.2 para, na sequência, introduzirmos os estudos de Poincaré, na seção 2.3, os de Floquet, na seção 2.4, e os expoentes de Lyapunov, na seção 2.5. Os expoentes de Lyapunov são de grande utilidade para determinar a estabilidade de sistemas dinâmicos e, inclusive, se estes sistemas são ou não caóticos.

2.1 Bifurcações Estáticas

No estudo de sistemas dinâmicos, comumente nos deparamos com constantes que definem alguma propriedade do sistema. Por exemplo, uma força dissipativa proporcional à velocidade possui um coeficiente que determina a intensidade da dissipação. Ou ainda, em um oscilador harmônico simples, temos uma constante que define a frequência e outra que define a amplitude de sua oscilação. Ambos exemplos são representados por λ na equação (1.1) [2].

Por vezes, estes parâmetros alteram pouco a dinâmica do sistema, entretanto em alguns casos

esta dinâmica muda drasticamente após um valor crítico λ_c , característico de cada sistema. A partir deste valor, o sistema pode adquirir mais pontos fixos ou inverter a estabilidade dos pontos já presentes, por exemplo. Estes são exemplos do que é chamado de bifurcação ou ramificação e λ_c é, então, chamado de valor de bifurcação ou de ramificação [2].

A seguir, veremos alguns casos básicos de bifurcações que surgem da variação de um único parâmetro de controle. Além disso, estes casos são apenas locais, com mudanças na vizinhança dos pontos fixos, pois a análise de bifurcações pode se estender para a própria estrutura topológica do espaço, mas este estudo é complicado e se afasta demais dos objetivos deste trabalho.

2.1.1 Bifurcação Sela-Nó

Este tipo de bifurcação ocorre quando um ponto fixo, inicialmente na origem para $\lambda = 0$, bifurca em dois novos pontos fixos para $\lambda > 0$ ou desaparece para $\lambda < 0$ [2]. Este caso pode ser exemplificado a partir do sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda - x^2(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

Neste caso, a posição do ponto fixo é obtida zerando o lado esquerdo das duas equações deste sistema.

Logo,

$$\begin{cases} -x^2(t) + \lambda = 0, \\ -y(t) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

é o sistema do qual obtemos a posição dos pontos fixos para $y = 0$ e $x = \pm\sqrt{\lambda}$. Assim, no espaço de fase, temos pontos fixos em $\mathbf{X}_{01} = (\sqrt{\lambda}, 0)$ e em $\mathbf{X}_{02} = (-\sqrt{\lambda}, 0)$. Isto implica na existência de dois pontos fixos para λ positivo, de um para λ nulo e de nenhum para λ negativo, já que os pontos fixos são reais.

A existência e o número de pontos, no entanto, não são a única diferença causada pela bifurcação. Para explicar vamos analisar a estabilidade dos pontos fixos para λ positivo. Primeiramente, como este sistema é não-linear, devemos linearizá-lo e, para isso, devemos encontrar a matriz jacobiana a partir dos elementos da equação (1.53). Assim, temos as duas matrizes:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} -2\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

para o ponto $(\sqrt{\lambda}, 0)$, e

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 2\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

para $(-\sqrt{\lambda}, 0)$.

Assim, utilizando a classificação da seção 1.3, temos que $\mathbf{X}_{01}$ é um nó estável, pois observamos que $Tr(\mathbf{J}_1) = -2\sqrt{\lambda} - 1$ e $det(\mathbf{J}_1) = 2\sqrt{\lambda}$ e, logo, temos $s < 0$ e $0 < d < s^2$. Por outro lado, $\mathbf{X}_{02}$ é um ponto de sela, pois $det(\mathbf{J}_2) = -2\sqrt{\lambda}$. Desta forma, com $\lambda > 0$ este sistema tem dois pontos fixos, dos quais um é um nó estável e o outro é um ponto de sela.

Os pontos fixos deste sistema, à medida que diminuimos o valor de λ , se aproximam da origem, pois, além de suas estabilidades, suas posições também dependem deste parâmetro de controle. A primeira bifurcação ocorre quando $\lambda = 0$, neste caso passamos a ter um único ponto fixo na origem, pois $\mathbf{X}_{01} = \mathbf{X}_{02} = (0, 0)$ e $\mathbf{J}_1$ e $\mathbf{J}_2$ são iguais a

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Com isso, classificamos a origem como um ponto fixo não-hiperbólico, já que $det(\mathbf{J}) = 0$. Se este sistema fosse linear, todos os pontos do eixo x seriam pontos fixos não-hiperbólicos. No entanto, como estamos analisando um sistema linearizado, apenas a origem é, de fato, um ponto fixo, pois a vizinhança de validade da aproximação linear é muito pequena para este sistema.

A segunda bifurcação ocorre se $\lambda < 0$, o que faz com que as posições dos pontos fixos assumam valores imaginários. Por conta disso e da posição precisar de um valor real, o sistema (2.1) fica sem nenhum ponto fixo e o seu campo vetorial segue para o infinito. Os espaços de fase deste sistema, para três valores de λ , foram construídos com o software Maple e estão representados na figura 2.1, à seguir.

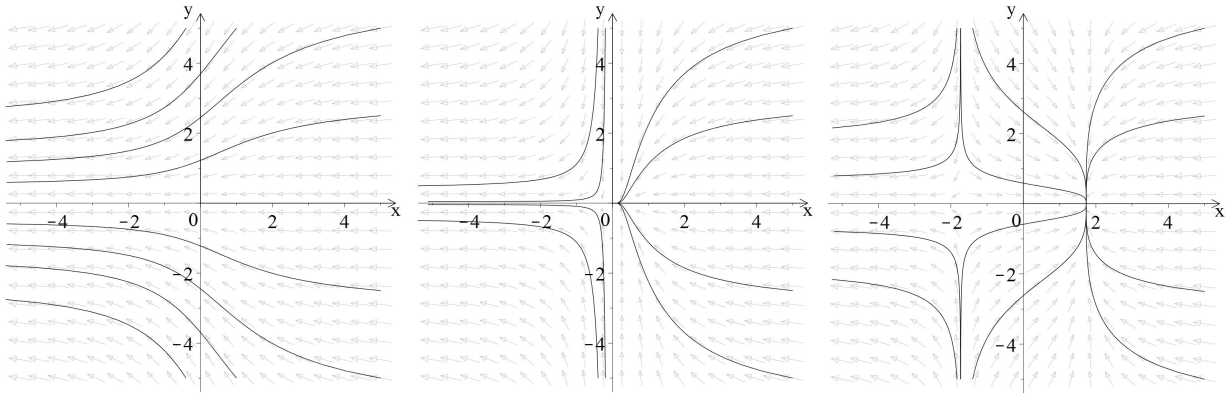


Figura 2.1 – Espaços de Fase do Sistema (2.1)

Estas figuras apresentam os espaços de fase para o sistema (2.1) para três valores de λ , da esquerda para a direita, -3 , 0 e 3 , com seus respectivos campos vetoriais, representados pelas setas.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Neste sistema, quando λ varia de 3 a -3 os pontos fixos, inicialmente separados, na figura da direita, se aproximam da origem. Quando $\lambda = 0$, na figura central, os pontos se juntam e cada metade do espaço de fase obedece um tipo de estabilidade, sela ou nó, ao redor do ponto fixo não-hiperbólico na origem. Por fim, quando $\lambda < 0$, na figura da esquerda, os pontos fixos desaparecem.

2.1.2 Bifurcação de Forquilha

Neste tipo de bifurcação, temos um ponto fixo na origem para $\lambda < 0$, o qual bifurca em três pontos fixos a partir de $\lambda = 0$, um ainda na origem e dois à distâncias simétricas dela [2]. Com isso temos dois casos, o primeiro, chamado de supercrítico, no qual a origem estável se torna instável e os outros dois pontos são estáveis. E o segundo, chamado de subcrítico, com a origem instável se tornando estável e os dois pontos instáveis.

Podemos exemplificar o caso supercrítico com o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda x(t) - x^3(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t), \end{cases} \quad (2.6)$$

ou o caso subcrítico alterando o sinal de $x^3(t)$, de forma que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda x(t) + x^3(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t). \end{cases} \quad (2.7)$$

Escolhendo o caso supercrítico, observamos que, igualando as derivadas a zero, os pontos críticos se encontram em $\mathbf{X}_{01} = (\sqrt{\lambda}, 0)$, $\mathbf{X}_{02} = (-\sqrt{\lambda}, 0)$ e $\mathbf{X}_{03} = (0, 0)$. Isto é o que explica o desaparecimento de pontos fixos quando $\lambda < 0$, já que $\mathbf{X}_{01}$ e $\mathbf{X}_{02}$ assumem valores imaginários.

As matrizes Jacobianas da linearização deste sistema são

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} -2\lambda^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

e

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Com estas informações podemos construir os espaços de fase do sistema (2.6), representados na figura 2.2 abaixo, e classificar seus pontos fixos.

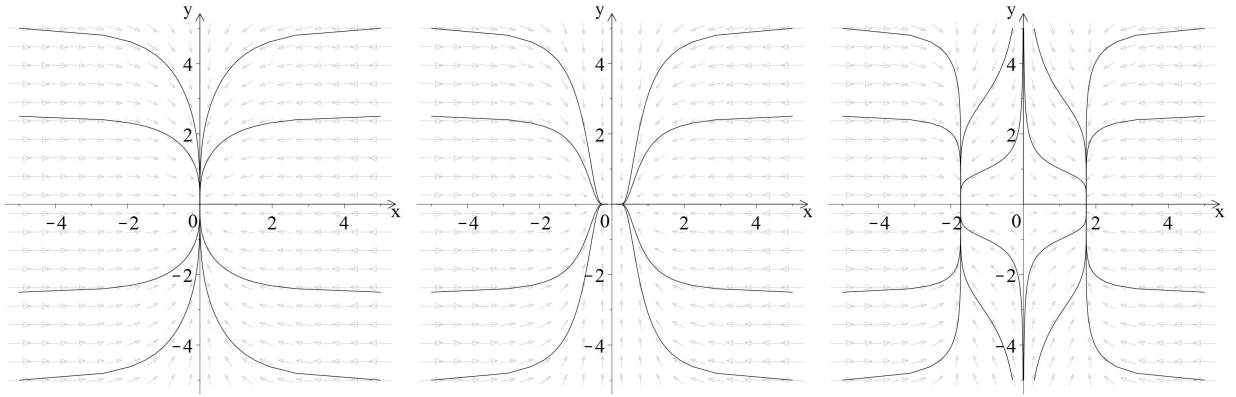


Figura 2.2 – espaços de Fase do Sistema (2.6)

Estas figuras apresentam os espaços de fase para o sistema (2.6) para três valores de λ , da esquerda para a direita, -3 , 0 e 3 , com seus respectivos campos vetoriais, representados pelas setas.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Como podemos perceber, tanto a partir da figura 2.2 quanto da análise das matrizes Jacobianas, quando λ é negativo há apenas um ponto fixo, $\mathbf{X}_{03}$, na origem, classificado como um nó estável. Quando λ é nulo, por outro lado, ficamos com um ponto fixo localmente não-hiperbólico na origem. E, por fim, quando λ é positivo, temos $\mathbf{X}_{01}$ e $\mathbf{X}_{02}$ como nós estáveis e $\mathbf{X}_{03}$, a origem, como um ponto de sela.

De fato, temos três matrizes Jacobianas para cada caso representado na figura 2.2, $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$ e $\mathbf{J}_3$. No entanto, quando $\lambda < 0$ precisamos analisar apenas $\mathbf{J}_3$, pois a posição dos dois primeiros pontos

é imaginária e eles não aparecem no espaço de fase. Na figura, para este caso foi utilizado $\lambda = -3$, o que leva à Jacobiana

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

A análise desta matriz classifica $\mathbf{X}_{03}$ como um nó estável, pois $s = -2$ e $d = 3$. Continuando a análise, quando $\lambda = 0$, os três pontos estão na origem e possuem a Jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

o que os classifica como pontos fixos não-hiperbólico, já que $d = 0$, o que está de acordo com o que podemos ver na figura 2.2.

Por fim, quando $\lambda > 0$, e igual a três neste exemplo, temos três pontos fixos distintos com Jacobianas

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

e

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Para $\mathbf{J}_1$ e $\mathbf{J}_2$, $s = -7/2$ e $d = 6$ o que classifica $\mathbf{X}_{01}$ e $\mathbf{X}_{02}$, de fato, como nós estáveis. Para $\mathbf{J}_3$, temos $s = 1$ e $d = -3$ o que configura um ponto de sela, como esperado a partir da análise visual da figura 2.2.

2.1.3 Bifurcação de Hopf

A bifurcação de Hopf é um caso no qual os autovalores da matriz Jacobiana são complexos [2]. Os dois casos anteriores trataram com autovalores reais, o que pode resultar apenas em nós ou selas. Este exemplo é interessante pois além de resultar em espirais e centros, o ponto fixo bifurca para um ciclo limite. Para exemplificar vamos utilizar o sistema abaixo, similar ao sistema 1.61,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) + x(t)[\lambda - (x^2(t) + y^2(t))], \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t)[\lambda - (x^2(t) + y^2(t))]. \end{cases} \quad (2.14)$$

A posição do único ponto fixo, $\mathbf{X}_0$, fica na origem e independe do valor de λ . Entretanto, como podemos observar na Jacobiana deste ponto,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

o tipo do ponto fixo depende do parâmetro de controle. De fato, utilizando a equação (1.10) encontramos os autovalores $\mu_1 = \lambda + i$ e $\mu_2 = \lambda - i$. Com isso, $\lambda < 0$ implica em uma espiral estável, $\lambda > 0$ em uma espiral instável e $\lambda = 0$ em um rotor. Além disso, quando λ é positivo, surge uma solução da forma $\mathbf{X}(t) = (\sqrt{\mu} \cos \theta, \sqrt{\mu} \sin \theta)$, obtida em coordenadas polares [2]. Podemos observar estes casos nos espaços de fase na figura (2.3) a seguir.

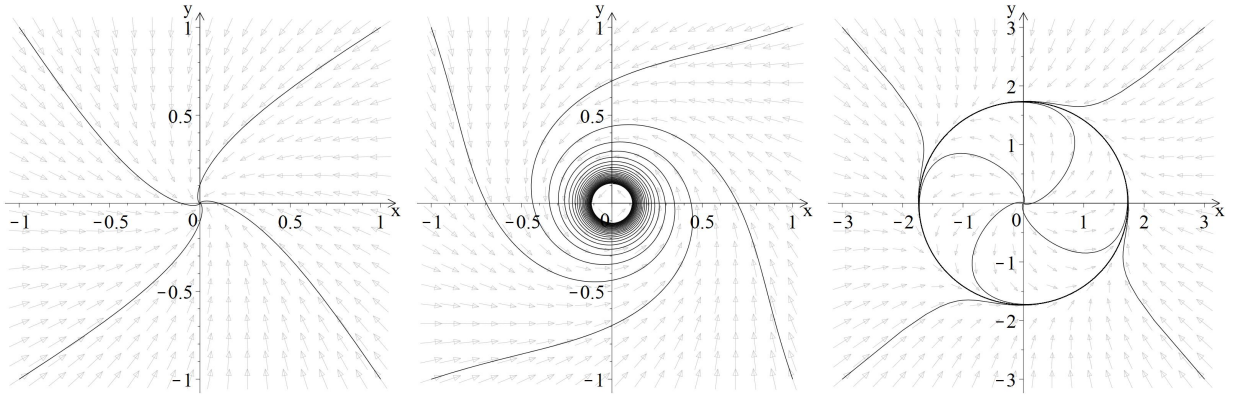


Figura 2.3 – Espaços de Fase do Sistema (2.14)

Estas figuras apresentam os espaços de fase para o sistema (2.14) para três valores de λ , da esquerda para a direita, -3 , 0 e 3 , com seus respectivos campos vetoriais, representados pelas setas.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Como é possível observar nesta figura, a vizinhança da origem, da esquerda para a direita, se comporta, respectivamente, como uma espiral estável, um rotor e uma espiral instável. Além disso, o espaço de fase da direita mostra claramente o ciclo limite que se forma quando λ é positivo, bastante similar ao ciclo limite da figura 1.16. Este exemplo ajuda a mostrar a importância dos parâmetros de controle nos sistemas dinâmicos, uma vez que fica claro o seu efeito sobre o comportamento das soluções que buscamos estudar.

2.2 Estabilidade de Soluções dependentes do Tempo

No capítulo anterior, fizemos um estudo sobre o comportamento de trajetórias vizinhas à Pontos Fixos para determinar a sua estabilidade. Agora, devemos fazer um estudo similar utilizando trajetórias vizinhas à uma trajetória de referência, para analisar a estabilidade de soluções dependentes do tempo no espaço de fase.

Para começar, podemos classificar este tipo de trajetória, neste caso, como estável de Lyapunov, com casos especiais chamados de estabilidade orbital e estabilidade assintótica [2]. Uma trajetória de referência $\mathbf{X}_r(t)$ é dita estável de Lyapunov se existe um ponto em uma trajetória vizinha $\mathbf{X}(t)$ que permanece próximo à $\mathbf{X}_r(t)$ para todo t . Matematicamente, $\mathbf{X}_r(t)$ é estável de Lyapunov se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta(\epsilon) > 0$ tal que quaisquer soluções que satisfaçam $|\mathbf{X}(t_0) - \mathbf{X}_r(t_0)| < \delta$ satisfazem $|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_r(t)| < \epsilon$ para todo $t > t_0$.

Temos também que trajetórias estáveis de Lyapunov que adicionalmente obedecem $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_r(t)| = 0$ são chamadas de assintoticamente estáveis. Neste caso, as trajetórias vizinhas à de referência são atraídas para ela com o passar do tempo. Vale ressaltar que estes dois casos exigem apenas que as trajetórias estejam próximas ou próximas e se aproximando, respectivamente.

Em adição à estes casos, temos um conceito novo para soluções dependentes do tempo: uma trajetória de referência é orbitalmente estável se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta(\epsilon) > 0$ tal que quaisquer soluções que satisfaçam $|\mathbf{X}(t_0) - \mathbf{X}_r(t_0)| < \delta$ permanecem confinadas em um tubo de raio ϵ ao redor da trajetória $\mathbf{X}_r(t)$ para todo $t > t_0$, como representado na figura 2.4 abaixo.

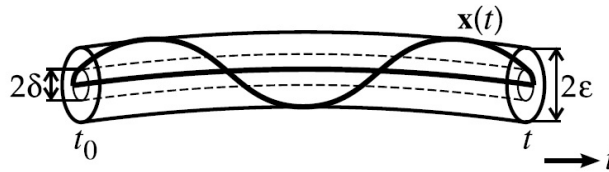


Figura 2.4 – Ilustração dos Conceitos de Estabilidade de Lyapunov e Orbital

Esta imagem caracteriza a estabilidade de Lyapunov, pois a trajetória $\mathbf{X}(t)$ deve permanecer na vizinhança da trajetória de referência $\mathbf{X}_r(t)$ no centro do tubo. No caso da estabilidade orbital, os pontos nas duas trajetórias no mesmo instante t , devem ficar em seções vizinhas deste tubo.

Fonte: Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics [2].

Com este conceito, considerando duas trajetórias circulares concêntricas, a trajetória de refe-

rência será estável apenas se a velocidade de pontos próximos for a mesma, de modo que tanto as trajetórias sejam próximas quanto os pontos inicialmente próximos permaneçam próximos. No caso da estabilidade assintótica, a trajetória $\mathbf{X}(t)$ na figura apenas tenderia ao centro do tubo. Como temos três tipos de estabilidade, é importante deixar claro que elas não são idênticas [2]. Por exemplo, uma trajetória como a da figura 2.5 abaixo, apesar de assintoticamente estável, não é orbitalmente estável.

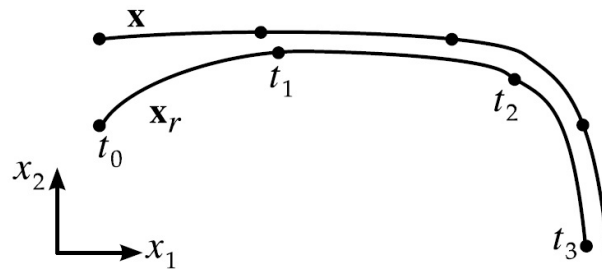


Figura 2.5 – Ilustração das diferenças entre os conceitos de Estabilidade

Este é um exemplo de uma trajetória assintoticamente estável e, logo, estável de Lyapunov, mas que não é orbitalmente estável.

Fonte: Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics [1].

Como explicado desde o capítulo 1, os sistemas podem ter um número arbitrário de dimensões, o que faz com que estes conceitos aparentemente triviais ganhem uma grande complexidade. Em função disso, Henri Poincaré desenvolveu um método útil para ajudar na análise da estabilidade e da dinâmica dos sistemas nestes casos, o qual será abordado a seguir.

2.3 Seções de Poincaré

O matemático francês Jules Henri Poincaré desenvolveu uma ferramenta matemática bastante útil na análise qualitativa de sistemas dinâmicos com soluções dependentes do tempo e com espaços de fase de dimensão maior que três, as seções de Poincaré. Esta técnica consiste, basicamente, em discretizar a dependência temporal da trajetória e utilizar uma hipersuperfície de $N - 1$ dimensões para estudar um espaço de fase de N dimensões [2].

Ao definir uma hipersuperfície conveniente, Σ , no espaço de fase, o tempo é discretizado ao se escolher os instantes nos quais Σ é perfurada em uma direção específica por uma trajetória $\mathbf{X}(t)$. Para garantir que a trajetória atravessasse a hipersuperfície, Σ deve ser transversal ao campo vetorial,

de forma que $\mathbf{N}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}) \neq 0$ em toda a hipersuperfície, onde $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ é a normal à Σ no ponto $\mathbf{X}$. Além disso, para definir um sentido único para as perfurações, devemos definir um único sinal para este produto escalar [2].

Todos os pontos da trajetória $\mathbf{X}(t)$ que satisfizerem estas condições, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \dots, \mathbf{X}_n$, são marcados, então, em Σ . Com isso, podemos estudar qualitativamente o sistema dinâmico a partir de uma "fatia" do espaço de fase com uma dimensão a menos. Apesar desta técnica ser eficiente apenas se a trajetória $\mathbf{X}(t)$ estiver restrita a uma porção do espaço, de modo que ela perfure a hipersuperfície diversas vezes, muitos sistemas, inclusive sistemas caóticos, apresentam trajetórias que se comportam desta maneira.

Para estudar os cortes de Poincaré utilizamos o mapeamento

$$P : \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_{n+1}, \quad \text{com } \mathbf{X}_n, \mathbf{X}_{n+1} \in \Sigma \quad (2.16)$$

que obtém o ponto seguinte na hipersuperfície a partir do anterior. Este mapeamento é chamado de mapa de Poincaré e é utilizado através de iterações sucessivas para encontrar todos os pontos das seções de Poincaré. Desta forma,

$$\mathbf{X}_1 = P(\mathbf{X}_0), \quad \mathbf{X}_2 = P(\mathbf{X}_1) = P^2(\mathbf{X}_0), \quad \dots, \quad \mathbf{X}_n = P^n(\mathbf{X}_0). \quad (2.17)$$

A partir do mapa de Poincaré iterado P^n , podemos abstrair o comportamento da trajetória analisada quando $n \rightarrow \infty$. Como a dinâmica do sistema é regida pela equação (1.1), este mapeamento é único e reversível, à exceção talvez de alguns pontos, devido à impossibilidade de trajetórias se cruzarem no espaço de fase [2].

Como visto na seção anterior, trajetórias estáveis de Lyapunov requerem que uma distância $\xi(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_r(t)$ seja pequena. Do mesmo modo que uma relação deste tipo serviu de base para a seção 1.4.1 sobre o processo de linearização de pontos fixos, agora, esta aproximação torna o mapeamento de Poincaré em um mapeamento linear, de forma que temos uma matriz $\mathbf{C}$ tal que

$$\xi_{n+1} = \mathbf{C}\xi_n. \quad (2.18)$$

Com isso, obtemos os autovalores λ_i desta matriz como fizemos com as matrizes $\mathbf{A}$ quando estudamos a estabilidade linear, na seção 1.2.3. Também de modo similar, são estes autovalores que determinam a estabilidade do sistema. Neste caso, se $|\lambda_i| < 1$, o mapeamento está se contraindo e a sequência de pontos converge para zero, o que indica a estabilidade assintótica da trajetória estudada. Por outro lado, se qualquer um dos autovalores possuir módulo maior do que um, a

trajetória é instável, pois mesmo pequenas perturbações divergem na direção do autovetor associado à este autovalor [2].

2.4 Estabilidade de Floquet

Em seus estudos, Achille Marie Gaston Floquet obteve resultados importantes para o estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos. Estes resultados, chamados de teoria da estabilidade de Floquet, permitem determinar o comportamento de soluções periódicas através dos chamados multiplicadores de Floquet e expoentes de Floquet, obtidos linearizando a equação de movimento [2], como veremos à seguir.

Para analisar a estabilidade de uma trajetória de referência $\mathbf{X}_r(t)$, nós utilizamos uma trajetória vizinha $\mathbf{X}(t)$ para analisar o comportamento da distância entre elas com o passar do tempo, de modo que

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_r(t). \quad (2.19)$$

Nestas condições, como feito na seção 1.4.1, contanto que $\boldsymbol{\xi}$ permaneça pequeno, a equação (1.1) corresponde a

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{B}(t)\boldsymbol{\xi}(t). \quad (2.20)$$

A diferença entre esta equação e a equação (1.56) reside nas matrizes. Enquanto que em (1.56) a matriz Jacobiana $\mathbf{J}$ surgiu da série de Taylor, é constante e é bem definida, aqui, devido à semelhança de $\boldsymbol{\xi}$ nas duas equações, assumimos que existe uma matriz $\mathbf{B}(t)$, com dependência temporal, que torna a equação (2.20) verdadeira. Neste caso, então, devemos determinar esta matriz $\mathbf{B}(t)$, algo deve ser feito sob a condição adicional de que seus coeficientes sejam periódicos, com período T , de modo que $\mathbf{B}(t+T) = \mathbf{B}(t)$.

A partir desta equação linearizada podemos obter um conjunto básico de soluções $\boldsymbol{\varphi}_i(t)$ linearmente independentes. Desta forma, podemos utilizá-las como uma base para o espaço de fase, à semelhança do que foi feito na seção 1.2.3, para autovetores. Com isso, a solução geral se torna a combinação linear

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \sum_i^N c_i \boldsymbol{\varphi}_i(t), \quad (2.21)$$

onde os coeficientes c_i são constantes e N é o número de dimensões do espaço.

Em notação matricial, as soluções $\boldsymbol{\varphi}_i(t)$ são representadas por matrizes coluna, por serem vetores, com N linhas. Podemos escolher soluções de modo que, em um dado instante inicial, coincidam

com vetores unitários no espaço N -dimensional. Apesar disso, esta consideração não restringe os resultados, apenas facilita o processo para obtê-los. Assim, temos

$$\varphi_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \varphi_N(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Adicionalmente definindo uma matriz com os coeficientes

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

e uma matriz $N \times N$ com um $\varphi_i(t)$ em cada coluna

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_N(t) \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

a equação (2.21) pode ser reescrita como

$$\xi(t) = \Phi(t)\mathbf{C}. \quad (2.25)$$

Levando em conta as condições utilizadas até aqui, uma propriedade da matriz $\Phi(t)$ é $\Phi(0) = \mathbb{1}$, já que

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) & \dots & \varphi_N(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

Esta matriz é fundamental para estudar a estabilidade do sistema. De fato, soluções ξ de (2.20) obedecem esta equação tanto no instante t , quanto no instante $t + T$. Isto não implica, no entanto, na periodicidade destas soluções, mesmo que a matriz $\mathbf{B}(t)$ seja periódica. Apesar disso, isto implica que o espaço pode ter como base tanto soluções $\varphi(t)$ quanto soluções $\varphi(t + T)$, um período depois, por exemplo. Isto quer dizer que

$$\xi(t + T) = \Phi(t)\mathbf{C} = \Phi(t + T)\mathbf{C}'. \quad (2.27)$$

A partir desta equação, percebemos que as soluções após um período obedecem

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)M, \quad (2.28)$$

onde $M = CC'^{-1}$ é chamada de matriz monodrômica [2]. Como $\Phi(0) = \mathbf{1}$, desta equação obtemos

$$M = \Phi(T). \quad (2.29)$$

Através de iterações sucessivas da equação (2.28) podemos obter o comportamento de $\Phi(t)$ quando $t \rightarrow \infty$. Quando $t = T$ obtemos uma informação importante:

$$\Phi(T + T) = \Phi(2T) = \Phi(T)M = \Phi(0)MM = M^2. \quad (2.30)$$

Este procedimento pode ser generalizado, de forma que

$$\Phi(nT) = \Phi^n(T) = M^n. \quad (2.31)$$

Com isso, podemos determinar a evolução das soluções através da equação (2.25) utilizando potências da matriz monodrômica. Assim, para estudar a estabilidade do sistema, precisamos dos N autovalores desta matriz, denominados de multiplicadores de Floquet e obtidos da seguinte equação de autovalor

$$\Phi(T)V_i = \mu_i(T)V_i, \quad (2.32)$$

onde μ_i são os autovalores e V_i são os autovetores da matriz monodrômica.

Podemos perceber que os autovetores levam à

$$\Phi(2T)V_i = \Phi(T)MV_i = M\mu_i(T)V_i = \mu_i^2(T)V_i = \mu_i(2T)V_i, \quad (2.33)$$

o que também podemos generalizar como

$$\mu_i(nT) = \mu_i^n(T). \quad (2.34)$$

Este tipo de equação pode ser resolvido através de uma função exponencial. Assim,

$$\mu_i(T) = e^{\sigma_i T}, \quad (2.35)$$

onde o σ_i , do lado direito da equação, pode ser complexo e é denominado expoente de Floquet. Este tipo de solução se aplica também a equação (2.31), logo

$$\Phi(T) = e^{ST}, \quad (2.36)$$

onde a matriz $\mathbf{S}$ pode ser definida através de série de potências. Sobre esta matriz é importante observar que seus autovalores são os expoentes de Floquet, pois

$$e^{\mathbf{S}T}\mathbf{V}_i = \boldsymbol{\Phi}(T)\mathbf{V}_i = \mu_i(T)\mathbf{V}_i = e^{\sigma_i T}\mathbf{V}_i. \quad (2.37)$$

Até aqui obtivemos resultados para instantes múltiplos de T . Então, para generalizar estes resultados para qualquer tempo t utilizamos uma matriz $\mathbf{U}(t)$ que seja periódica e obedeça $\mathbf{U}(0) = \mathbf{1}$ [2], de tal forma que

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathbf{U}(t)e^{\mathbf{S}t}. \quad (2.38)$$

Com a matriz $\mathbf{U}(t)$ periódica, o comportamento das soluções $\boldsymbol{\xi}(t)$ não é afetado por ela à longo prazo. Por outro lado, os multiplicadores e os expoentes de Floquet são fundamentais para o comportamento destas soluções, visto que

$$\boldsymbol{\xi}(nT) = \sum_i^N e^{\sigma_i nT} \mathbf{V}_i = \sum_i^N \mu_i(nT) \mathbf{V}_i, \quad (2.39)$$

com os autovetores da matriz monodrômica como base para o espaço. Desta forma, a distância $|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_r(t)|$ depende de $|\mu_i|$ ou, alternativamente, de $\text{Re}\{\sigma_i\}$.

De fato, a solução $\mathbf{X}_r(t)$ é assintoticamente estável contanto que $|\mu_i| < 1$ e $\text{Re}\{\sigma_i\} < 0$. Por outro lado, $\mathbf{X}_r(t)$ é instável se para ao menos um dos multiplicadores, $|\mu_i| > 1$, o que leva, também, a $\text{Re}\{\sigma_i\} > 0$ [2]. Quando $|\mu_i| = 1$ e $\text{Re}\{\sigma_i\} = 0$, temos alguns casos interessantes, como ciclos limite, os quais serão discutidos na seção seguinte sobre os expoentes de Lyapunov.

2.5 Expoentes de Lyapunov

Baseados nos trabalhos de Poincaré e Floquet, o russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov estendeu o estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos ao utilizar soluções arbitrárias, não restringindo suas análises à soluções periódicas como havia feito Floquet. Em seu trabalho, Lyapunov obteve expoentes, nomeados em sua homenagem, capazes de determinar a existência de pontos fixos e ciclos limite, por exemplo, bem como determinar se o sistema estudado é ou não caótico.

Para introduzir o conceito dos expoentes de Lyapunov podemos utilizar um mapeamento discreto unidimensional, $x_n = f(x_{n-1})$, como o mapa de Poincaré em uma dimensão. A ideia deste estudo é comparar duas sequências de pontos, $x_0, x_1, \dots, x_n$ e $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, as quais diferem apenas por uma pequena variação nas condições iniciais, de modo que $\bar{x}_0 = x_0 + \delta x_0$. A primeira sequência representa a solução que estamos estudando e a segunda é o que podemos chamar de solução perturbada, com perturbação δx_0 .

Sob estas condições um ponto $\bar{x}_n$ será

$$\bar{x}_n = x_n + \delta x_n = f(\bar{x}_{n-1}) = f(x_{n-1} + \delta x_{n-1}). \quad (2.40)$$

E, utilizando a série de Taylor para $f(x_{n-1} + \delta x_{n-1})$ ao redor do ponto x_{n-1} , temos

$$f(x_{n-1} + \delta x_{n-1}) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})\delta x_{n-1} + \dots \quad (2.41)$$

Desta forma, em aproximação linear, temos

$$\delta x_n = f'(x_{n-1})\delta x_{n-1}. \quad (2.42)$$

A partir desta equação vemos que

$$\delta x_{n-1} = f'(x_{n-2})\delta x_{n-2}, \quad (2.43)$$

e, logo, temos que

$$\delta x_n = f'(x_{n-1})f'(x_{n-2}) \dots f'(x_0)\delta x_0, \quad (2.44)$$

o que pode ser compactado utilizando a notação de produtório. Assim,

$$\delta x_n = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)\delta x_0. \quad (2.45)$$

Desta relação, o papel de $f'(x_i)$ fica claro. Este termo indica como a solução perturbada se comporta em relação à solução de referência, da qual desejamos conhecer a estabilidade. É perceptível, também, a semelhança desta equação com a equação (2.35), quando a sequência é constante e os termos $f'(x_i)$ são todos iguais, o que implica em periodicidade. Nesta condição, temos

$$\delta x_n = (f'(x_0))^n \delta x_0. \quad (2.46)$$

Com isso, tomando o módulo desta equação, podemos utilizar as propriedades de logaritmos e obter

$$|\delta x_n| = e^{n\sigma} |\delta x_0|, \quad (2.47)$$

onde definimos $\sigma = \ln |f'(x_0)|$ [2]. Este expoente determina como a perturbação evolui após diversas iterações do mapeamento. Apesar de construído considerando os termos $f'(x_i)$ iguais, este expoente também pode ser utilizado para estudar soluções não-periódicas. Neste caso, ele é chamado de expoente de Lyapunov e o maior expoente é definido matematicamente como um valor médio [2] através de

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\delta x_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta x_n}{\delta x_0} \right|. \quad (2.48)$$

Os limites quando $n \rightarrow \infty$ e $\delta x_0 \rightarrow 0$ garantem, respectivamente, que o valor de σ seja o máximo e que a aproximação linear seja válida.

Usando a equação (2.45), podemos definir o maior expoente de Lyapunov também através de

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (2.49)$$

Em ambos os casos, com um mapeamento discreto, “o expoente de Lyapunov é uma medida logarítmica para a taxa de expansão média por iteração [...] da distância entre duas trajetórias infinitesimalmente próximas.” [2] Por este motivo, estes expoentes são tão importantes no estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos.

Com essa noção básica do significado dos expoentes de Lyapunov, vamos seguir [8] e [9] para definir estes expoentes para sistemas contínuos e multidimensionais, além de alguns conceitos necessários para a aproximação numérica dos expoentes de Lyapunov utilizada neste trabalho.

O primeiro conceito útil que precisamos é o de fluxo de fase, mencionado no início do Capítulo 1. O fluxo de fase Φ_t é uma função que conecta $\mathbf{X}_0$ a $\mathbf{X}(t)$ de forma que

$$\Phi_t(\mathbf{X}_0) = \mathbf{X}(t). \quad (2.50)$$

Este conceito nos apresenta uma forma alternativa para lidar com sistemas dinâmicos, dada a equivalência nesta equação. Este outro método, no entanto, torna mais prática a obtenção dos expoentes de Lyapunov, como veremos ainda nesta seção. Substituindo a equação (2.50) na equação (1.1), podemos ver que o fluxo de fase obedece

$$\dot{\Phi}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\Phi_t(\mathbf{X})). \quad (2.51)$$

Esta equação é válida para qualquer $\mathbf{X}$ no espaço de fase, e, dado uma condição inicial $\mathbf{X}_0$, teremos uma única solução $\Phi_t(\mathbf{X}_0)$ de forma que $\Phi_0(\mathbf{X}_0) = \mathbf{X}_0$ e o conjunto $\{\Phi_t(\mathbf{X}_0) | t \in \mathbb{R}\}$ representa a trajetória do sistema que passa por $\mathbf{X}_0$.

A definição para o maior expoente de Lyapunov de um sistema contínuo e multidimensional pode ser escrita utilizando o fluxo de fase. Para isso, precisamos, primeiro, representar uma perturbação $\xi(t)$ através do fluxo. Assim, se causamos uma perturbação ξ_0 em um ponto $\mathbf{X}_0$, a perturbação através do fluxo será

$$\xi_t = \Phi_t(\mathbf{X}_0 + \xi_0) - \Phi_t(\mathbf{X}_0). \quad (2.52)$$

Nesta equação, podemos linearizar expandir $\Phi_t(\mathbf{X}_0 + \xi_0)$ em série de Taylor em torno do ponto $\mathbf{X}_0$ e obter a equação

$$\Phi_t(\mathbf{X}_0 + \xi_0) = \Phi_t(\mathbf{X}_0) + D_{\mathbf{X}_0} \Phi_t(\mathbf{X}_0) \cdot \xi_0, \quad (2.53)$$

onde $D_{\mathbf{X}_0}\Phi_t(\mathbf{X}_0)$ representa a derivada com relação à $\mathbf{X}_0$ do fluxo de fase de $\mathbf{X}_0$. Substituindo esta equação na (2.52), obtemos, então,

$$\xi_t = D_{\mathbf{X}_0}\Phi_t(\mathbf{X}_0) \cdot \xi_0. \quad (2.54)$$

Com base nestas relações, sempre que o limite a seguir existe, e em geral existe, ele é equivalente ao maior expoente de Lyapunov [8], σ_1 , então

$$\sigma_{\mathbf{X}_0, \xi_0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |D_{\mathbf{X}_0}\Phi_t(\mathbf{X}_0) \cdot \xi_0| \equiv \sigma_1. \quad (2.55)$$

Utilizar o termo maior expoente indica que devemos ter outros. De fato, temos tantos expoentes de Lyapunov quanto temos dimensões no sistema. Desta forma, em um espaço N -dimensional, com um conjunto completo de vetores linearmente independentes $\mathbf{v}_i$ como base, temos

$$\sigma_i = \sigma_{\mathbf{X}_0, \mathbf{v}_i}. \quad (2.56)$$

Neste caso, os índices i são escolhidos de forma que

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N. \quad (2.57)$$

Temos, na equação (2.54), a importante informação de que ξ_t se comporta como um vetor tangente ao fluxo de fase, o que nos permite estender o conceito dos expoentes de Lyapunov. Assim, classificamos os expoentes obtidos da equação (2.55) como expoentes de Lyapunov de ordem 1 e, desta forma, podemos generalizá-los para a ordem p , com $1 \leq p \leq N$. Um expoente de ordem p , então, é definido de modo a descrever a taxa de expansão ou contração média de um volume p -dimensional no espaço tangente, construído através de vetores tangentes como ξ_t . Um paralelepípedo U_0 neste espaço deve ter p vetores tangentes em suas arestas, $\xi_1, \dots, \xi_p$, o que nos leva à definição matemática

$$\sigma^p_{\mathbf{X}_0, \xi_0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln [V^p(D_{\mathbf{X}_0}\Phi_t(U_0))], \quad (2.58)$$

onde $V^p(D_{\mathbf{X}_0}\Phi_t(U_0))$ é o volume p -dimensional no espaço tangente.

Uma característica importante desta generalização é que com a base de p vetores linearmente independentes $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$, temos [8]

$$\sigma^p_{\mathbf{X}_0, \xi_0} = \sigma_1 + \dots + \sigma_p. \quad (2.59)$$

Isto nos mostra que um expoente de Lyapunov de ordem p é a soma dos maiores expoentes de ordem 1. Uma conclusão importante obtida a partir disto é que um expoente de ordem N mostra

a taxa de expansão ou contração média do volume do espaço de fase [8]. Desta forma, sempre que o sistema for conservativo, o que implica em um fluxo de fase que preserva os volumes, como discutimos brevemente a partir da equação (1.2), devemos ter

$$\sum_{i=0}^N \sigma_{\mathbf{X}_0, \xi_i} = 0. \quad (2.60)$$

Por outro lado, se o sistema for dissipativo, esta soma resultará em um valor negativo, indicando a contração do espaço de fase com o fluxo.

De posse destes conceitos, podemos definir a chamada equação variacional [9]. Primeiramente, podemos derivar a equação (2.51) para $\mathbf{X}_0$ com relação à $\mathbf{X}_0$ em $\mathbf{X}_0$. Assim,

$$D_{\mathbf{X}_0} \dot{\Phi}_t(\mathbf{X}_0) = D_{\mathbf{X}_0} \mathbf{F}(\Phi_t(\mathbf{X}_0)). \quad (2.61)$$

Levando em consideração a equação (2.50), temos que

$$D_{\mathbf{X}_0} \mathbf{F}(\Phi_t(\mathbf{X}_0)) = D_{\mathbf{X}} \mathbf{F}(\Phi_t(\mathbf{X}_0)) D_{\mathbf{X}_0} \Phi_t(\mathbf{X}_0). \quad (2.62)$$

Assim, definindo $\Gamma_t(\mathbf{X}_0) = D_{\mathbf{X}_0} \Phi_t(\mathbf{X}_0)$, obtemos

$$\dot{\Gamma}_t(\mathbf{X}_0) = D_{\mathbf{X}} \mathbf{F}(\Phi_t(\mathbf{X}_0)) \Gamma_t(\mathbf{X}_0), \quad (2.63)$$

a chamada equação variacional.

Esta equação é importante, pois ela pode ser utilizada em conjunto com a equação (1.1), ou alternativamente com a equação (2.51), em alguns métodos numéricos [8][9] para se calcular as trajetórias do sistema. No que se refere aos expoentes de Lyapunov, esta equação nos dá uma solução $\Gamma_t(\mathbf{X}_0)$, a qual pode ser utilizada para se determinar todos o espectro dos expoentes de Lyapunov, e não apenas o maior como em (2.55), através da seguinte equação de autovalor [8]

$$\Gamma_t^*(\mathbf{X}_0) \cdot \Gamma_t(\mathbf{X}_0) \mathbf{V}_i = e^{2t\sigma_i} \mathbf{V}_i, \quad (2.64)$$

onde, $\Gamma_t^*(\mathbf{X}_0)$ é a matriz adjunta de $\Gamma_t(\mathbf{X}_0)$, $\mathbf{V}_i$ representa um autovetor da matriz $\Gamma_t^*(\mathbf{X}_0) \cdot \Gamma_t(\mathbf{X}_0)$ e $e^{2t\sigma_i}$ o autovalor associado.

No entanto, esta matriz é, para tempos grandes, mal acomodada, o que implica que pequenas mudanças em seus coeficientes, ou erros em seus valores, levam a resultados imprecisos nos cálculos que a utilizarem. Isto ocorre por conta do maior expoente de Lyapunov, que, para $t \rightarrow \infty$, domina sobre os outros quando analisamos a evolução da perturbação inicial, o que faz as colunas desta matriz se alinharem com o autovetor associado ao maior expoente [8]. Este problema, como discutido

na literatura [2][8][9], pode ser resolvido, à grosso modo, calculando as grandezas necessárias para pequenos intervalos de tempo, redimensionando-as, uma vez que, em geral, elas divergem muito rapidamente, e repetindo este processo por um grande número de vezes.

Neste trabalho, seguindo [8], vamos obter expoentes de Lyapunov de ordem p e aplicar repetidamente o chamado processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, após pequenos períodos de tempo T . Este processo gera uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\}$ para um dado espaço a partir de um conjunto completo de vetores linearmente independentes $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$, passando por um conjunto de vetores ortogonais $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$. O primeiro vetor ortogonal é

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \quad (2.65)$$

e, logo,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|}. \quad (2.66)$$

O segundo vetor ortogonal é, pelo processo,

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1, \quad (2.67)$$

e, logo,

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_2|}. \quad (2.68)$$

Por sua vez, o terceiro é

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 \quad (2.69)$$

, e, logo,

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{|\mathbf{u}_3|}. \quad (2.70)$$

Assim, o p -ésimo vetor ortogonal é

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{v}_p - \sum_{i=1}^{p-1} \langle \mathbf{v}_p, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i, \quad (2.71)$$

e

$$\mathbf{e}_p = \frac{\mathbf{u}_p}{|\mathbf{u}_p|}. \quad (2.72)$$

Através deste processo, $\mathbf{u}_2$ é obtido através de $\mathbf{v}_2$ menos a sua projeção sobre $\mathbf{u}_1$, o que nos dá claramente um vetor ortogonal à $\mathbf{u}_2$. Uma propriedade interessante neste processo é que a área do retângulo formado pelos vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ é igual à área do paralelepípedo formado pelos vetores $\mathbf{v}_1$

e $\mathbf{v}_2$, o que claramente é mais fácil de calcular, pois $A = |\mathbf{u}_1||\mathbf{u}_2|$. De modo similar, o volume na equação (2.58), considerando $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_p$ linearmente independentes, se reduz à

$$V^p(D_{\mathbf{X}_0}\boldsymbol{\Phi}_t(\mathbf{U}_0)) = |\mathbf{u}_1| \cdots |\mathbf{u}_p|. \quad (2.73)$$

Assim, ao calcularmos o limite em (2.58), partimos de um paralelepípedo $\mathbf{U}_0$, aplicamos o processo de Gram-Schmidt para obter um paralelepípedo $\mathbf{U}'_0$, com todas as arestas ortogonais, e integramos o sistema dinâmico e a equação variacional para um tempo curto T , no qual obteremos o paralelepípedo

$$\mathbf{U}_1 = \boldsymbol{\Gamma}_T(\mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{U}_0. \quad (2.74)$$

As arestas de $\mathbf{U}_1$ já não são, necessariamente, ortogonais, então aplicamos novamente o processo de Gram-Schmidt para obtermos $\mathbf{U}'_1$ e seguimos repetindo estes passos por k vezes. No k -ésimo passo, temos o volume em (2.58) equivalente a $|\mathbf{u}'_1| \cdots |\mathbf{u}'_p|$ com $\{\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_p\}$ representando o conjunto de vetores ortogonais que compõem a aresta de $\mathbf{U}'_k$.

Através deste processo, no qual $t = kT$, e

$$\mathbf{U}_k = \boldsymbol{\Gamma}_T(\mathbf{X}_0)^k \cdot \mathbf{U}'_0, \quad (2.75)$$

temos que a média na definição dos expoentes de Lyapunov de ordem p se torna

$$\frac{1}{t} \ln [V^p(D_{\mathbf{X}_0}\boldsymbol{\Phi}_t(\mathbf{U}_0))] \equiv \frac{\ln [V^p(D_{\mathbf{X}_0}\boldsymbol{\Phi}_t(\mathbf{U}'_1))] + \ln [V^p(D_{\mathbf{X}_0}\boldsymbol{\Phi}_t(\mathbf{U}'_2))] + \cdots + \ln [V^p(D_{\mathbf{X}_0}\boldsymbol{\Phi}_t(\mathbf{U}'_k))]}{kT}. \quad (2.76)$$

Desta forma, a equação (2.58) se torna

$$\sigma^p_{\mathbf{X}_0, \boldsymbol{\xi}_0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT} \sum_{i=1}^k \ln (|\mathbf{u}'_1|^i \cdots |\mathbf{u}'_p|^i), \quad (2.77)$$

e, subtraindo $\sigma^{p-1}_{\mathbf{X}_0, \boldsymbol{\xi}_0}$ desta equação, obtemos o p -ésimo expoente de Lyapunov de ordem 1

$$\sigma_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT} \sum_{i=1}^k \ln (|\mathbf{u}'_p|^i). \quad (2.78)$$

Com isso, podemos estimar o conjunto completo de expoentes de Lyapunov a partir de

$$\begin{cases} \sigma_1 \approx \frac{1}{kT} \sum_{i=1}^k \ln (|\mathbf{u}'_1|^i), \\ \sigma_2 \approx \frac{1}{kT} \sum_{i=1}^k \ln (|\mathbf{u}'_2|^i), \\ \vdots \\ \sigma_N \approx \frac{1}{kT} \sum_{i=1}^k \ln (|\mathbf{u}'_N|^i). \end{cases} \quad (2.79)$$

contanto que utilizemos um número de iterações k suficientemente grande e o intervalo de integração numérica T pequeno.

Com essas informações, no estudo de sistemas dinâmicos surge um comportamento estranho, aparentemente incoerente com um sistema determinístico, quando temos expoentes de Lyapunov positivos: o caos. Isto quer dizer que quando estudamos a estabilidade de uma trajetória e obtemos um expoente positivo, ela é extremamente sensível às condições iniciais, de forma que mesmo pequenas perturbações podem levar a trajetórias completamente diferentes. A incoerência neste caso, reside no fato de que, nestas condições, um sistema determinístico se torna imprevisível, ao menos para um longo período de tempo.

Fisicamente, quando medimos alguma grandeza sempre temos um erro associado. Com isso, sempre teremos uma perturbação quando fazemos estas medições repetidas vezes. Caso o sistema para o qual estejamos obtendo valores seja caótico, fazer isso leva a valores desconexos e imprecisos. Mesmo tornando as medidas cada vez mais precisas, o desvio exponencial entre trajetórias vizinhas eventualmente irá predominar, impossibilitando previsões precisas para o sistema. Este é um outro tipo de incerteza física à qual estamos presos, como a incerteza quântica e as flutuações estatísticas, e, devido sua importância, é estudada à fundo pela Teoria do Caos.

Uma das grandes utilidades dos expoentes de Lyapunov reside na quantidade de informação contida apenas na sua combinação de sinais. Por exemplo, considerando um sistema dinâmico autônomo genérico de terceira ordem, teremos um espaço de três dimensões e, logo, três expoentes de Lyapunov. O interessante é que, da combinação de sinais, podemos descobrir o tipo de atrator presente no espaço de fase do sistema [2],

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \begin{cases} (-, -, -), & \text{ponto fixo,} \\ (0, -, -), & \text{ciclo limite,} \\ (0, 0, -), & \text{toro } T^2, \\ (+, 0, -), & \text{caos } C^1. \end{cases} \quad (2.80)$$

Os pontos fixo e os ciclos limite foram abordados no capítulo 1. O toro equivale a dois ciclos limite, formando o formato de um cilindro curvado até a sua base se conectar com seu topo. Um ciclo percorre o que seria o diâmetro do cilindro e o outro, o que seria a sua altura. Por fim, o atrator caótico é, como foi discutido na seção 1.1, um tipo de atrator com o formato, em geral, intrincado e bastante sensível às condições iniciais.

Este conceito pode ser estendido para um número arbitrário de dimensões. Em quatro, devemos

ter novos casos de atratores [8]

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = \begin{cases} (0, 0, 0, -), & \text{hypertoro } T^3, \\ (+, 0, 0, -), & \text{caos em } T^3, \\ (+, +, 0, -), & \text{hypercaos } C^3. \end{cases} \quad (2.81)$$

Estes casos representam extensões do caso em três dimensões para uma dimensão extra. Generalizando, em N dimensões devemos ter [8]

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = \begin{cases} (-, \dots, -), & \text{ponto fixo,} \\ (0, -, \dots, -), & \text{movimento periódico,} \\ (0, \dots, 0, -, \dots, -), & \text{toro } T^{N-1}, \\ (+, \dots, +, 0, \dots, 0, -, \dots, -), & \text{caos } C^{N-2}. \end{cases} \quad (2.82)$$

Na próxima seção vamos analisar pêndulo com atrito e forçado periodicamente, o qual é um ótimo exemplo para sintetizar e finalizar este capítulo do trabalho obtendo os expoentes de Lyapunov para alguns casos deste sistema. Para fazer isso, no entanto, devemos utilizar comandos mais complexos do software Mathematica e que são bastante difíceis de construir do zero sem bastante prática com este programa. Por este motivo, vamos seguir diretamente um trabalho de Marco Sandri [8], através de um pacote do Mathematica disponibilizado por ele, para estimar numericamente os expoentes de Lyapunov seguindo o processo apresentado nesta seção.

2.6 Exemplo de um Sistema Caótico: Pêndulo com Atrito e Forçado Periodicamente

Nesta seção estudaremos o comportamento de um pêndulo com atrito e forçado periodicamente. Para isso, começaremos com um exemplo mais simples para introduzir este sistema e obtermos uma noção melhor sobre as soluções no espaço de fase.

Um dos sistemas mais comuns no estudo da mecânica é o pêndulo simples. Neste sistema temos um corpo de massa m preso a um suporte capaz de girar livremente e sem atrito por um fio de comprimento l e massa desprezível que pendula com um ângulo θ com relação à vertical, através do efeito da força peso. A figura 2.6, abaixo, ilustra de forma básica esse sistema.

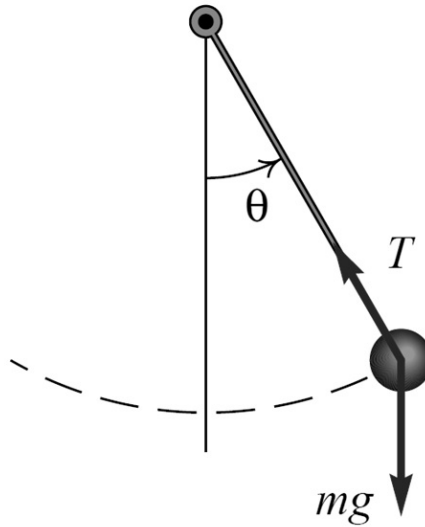


Figura 2.6 – Diagrama de um Pêndulo Simples

Fonte: Introdução aos Sistemas Dinâmicos: Uma Abordagem Prática com Maxima [3].

O corpo se move em um círculo formado pela continuação do arco tracejado na figura. Além disso, o corpo não se move paralelamente ao fio, o qual se comporta como uma haste rígida, de modo que sua dinâmica é determinada pelo seu movimento restrito ao círculo, com um raio constante e igual a l . Por este ser um exemplo muito comum em diversos livros-texto, vamos nos focar diretamente na equação que rege este movimento. Assim, com base na segunda lei de Newton e com uma mudança de coordenadas para θ , obtemos a equação diferencial não-linear e de segunda ordem

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l} \sin \theta(t), \quad (2.83)$$

considerando o eixo vertical orientado para cima.

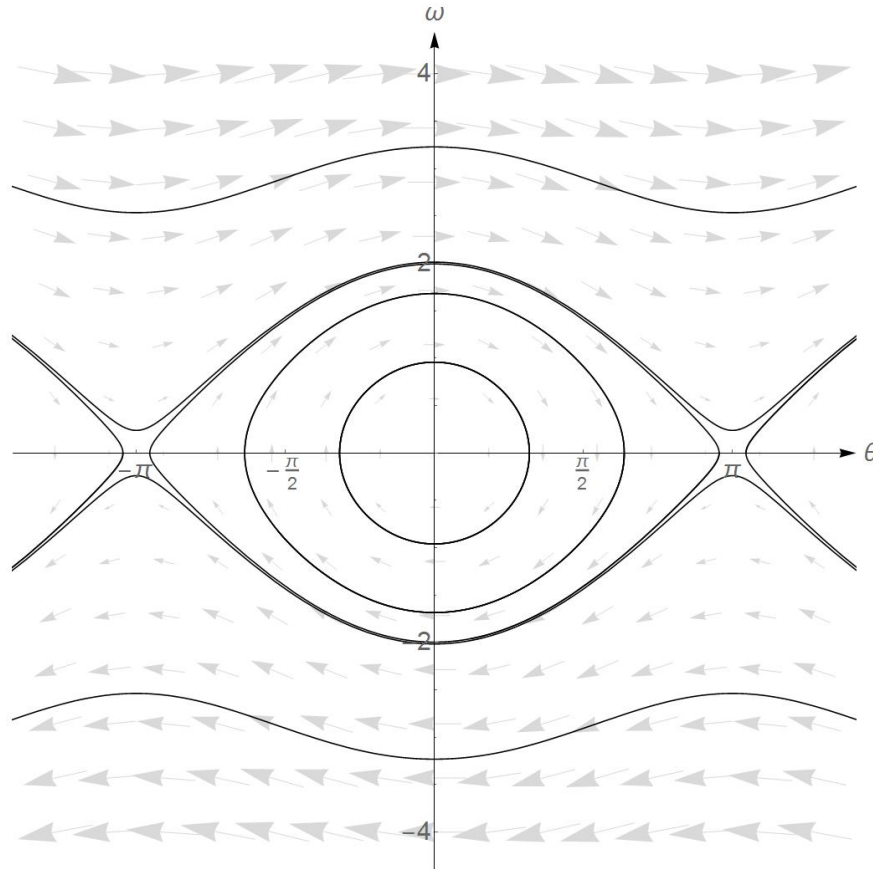
Esta equação pode ser representada através de um sistema dinâmico seguindo o início da seção 1.4, assim temos

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t), \\ \dot{\omega}(t) = -\frac{g}{l} \sin \theta(t). \end{cases} \quad (2.84)$$

Na figura 2.6, a interseção entre a linha vertical e a trajetória tracejada é chamada de ponto de equilíbrio e coincide, de fato, com um dos pontos fixos deste sistema, os quais ocorrem quando $\dot{\theta}(t) = \dot{\omega}(t) = 0$. Para representar o espaço de fase, desta vez, utilizaremos o software Mathematica, pois com ele é possível utilizar uma sequência de comandos, mostrados na seção A.3 do apêndice, para restringir o eixo de $\theta(t)$ ao intervalo $[-\pi, \pi]$, o que é útil para visualizar a periodicidade deste

tipo de sistema. Este processo será bastante útil, no entanto, quando tratarmos de um pêndulo com atrito e forçado periodicamente ainda nesta seção. Assim, a figura 2.7 mostra este espaço de fase.

Figura 2.7 – Espaço de Fase de um Pêndulo Simples



Nesta imagem temos três soluções oscilatórias no período de $-\pi$ a π , as quais partem de $(1,0)$, $(2,0)$ e $(3,0)$ e que, quanto menores os ângulos iniciais, mais são similares com soluções um oscilador harmônico simples. Temos também as soluções oscilatórias que partem de $(-2\pi + 3,0)$ e $(2\pi - 3,0)$, as quais, fisicamente, representam o mesmo movimento da solução $(3,0)$, respectivamente um período de 2π antes e outro depois. Por fim, temos as soluções rotatórias no sentido anti-horário, $(5, -3)$ e $(5, -1.62)$, e no sentido horário, $(-5, 3)$ e $(-5, 1.62)$. Todas estas soluções seguem as setas representadas, as quais indicam o campo vetorial.

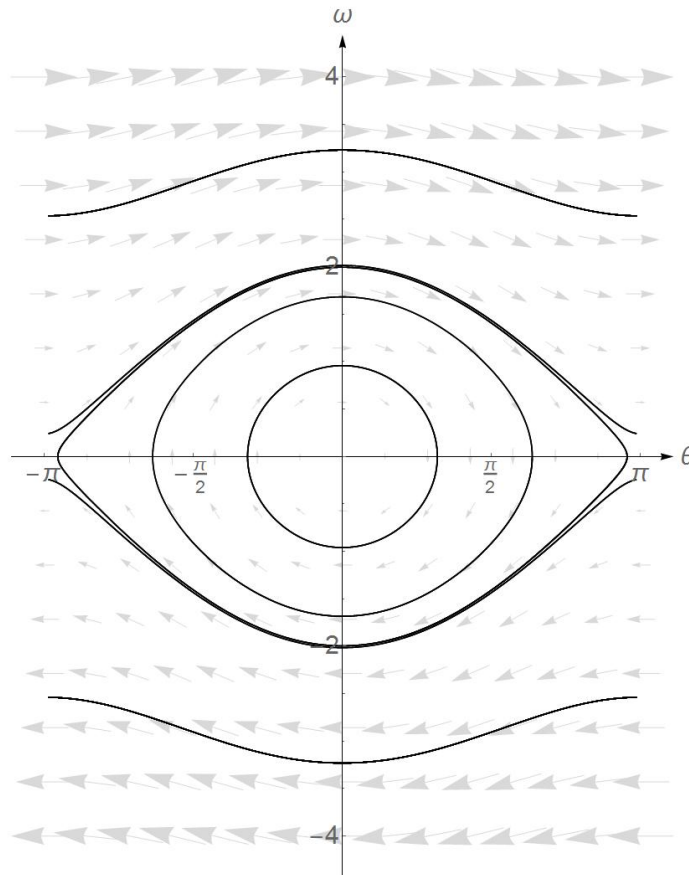
Fonte: Autoria Própria, 2017.

Nesta figura, notamos logo à primeira vista três pontos fixos, em $(-\pi, 0)$, $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$. Fisicamente, os pontos com $-\pi$ e π representam o mesmo ponto no espaço, no topo da trajetória, enquanto que a origem corresponde ao ponto mais baixo. De fato, temos pontos fixos sempre que

$\omega = 0$ e $\theta = n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$, caso n seja par, temos um ponto no topo e, caso contrário, em baixo. Com uma análise visual, também é possível perceber que os pontos baixos são estáveis (rotores) e os no topo são instáveis (pontos de sela). Quanto às soluções, as trajetórias fechadas representam oscilações com uma amplitude observável no eixo de θ , enquanto que as abertas representam rotações sucessivas e se estendem ao infinito.

Neste tipo de espaço de fase, dadas as mesmas condições iniciais a cada período, a figura central se repete a cada 2π no eixo θ . Por este motivo, é interessante observar o espaço de fase restrito a um intervalo de 2π , como o intervalo $[-\pi, \pi]$ já citado. Com isso, neste caso podemos ver uma fração do espaço de fase que se repete tanto para a esquerda quanto para a direita. Este espaço de fase é mostrado na figura 2.8, à seguir.

Figura 2.8 – Espaço de Fase de um Pêndulo Simples com o Eixo θ Restrito



Nesta figura temos exatamente as mesmas soluções e o mesmo campo apresentados na figura 2.7, mas, com a restrição do eixo θ , ficamos apenas com a “unidade do padrão” que se repete, uma vez que as soluções idênticas em períodos distintos são sobrepostas à essa.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

O grande mérito dos comandos utilizados no software Mathematica é a capacidade de representar todos os períodos como se estivessem um sobre o outro, de modo que as soluções que “saem” pela direita do espaço de fase, “entram” de volta pela esquerda e vice-versa. Neste caso, como todos são iguais, não há tanta diferença entre ignorar os demais períodos e utilizar este método. No entanto, como veremos à seguir, é possível obtermos soluções para sistemas que fisicamente são restritos ao intervalo $[-\pi, \pi]$, como qualquer pêndulo similar à este exemplo, mas que rotacionam e oscilam através de mais de um período, formando ciclos limite um pouco mais complexos e, por vezes, apresentando comportamento caótico.

Para analisarmos um caso deste tipo, vamos abordar o pêndulo com atrito e forçado periodicamente. O atrito pode ser introduzido na equação (2.83) através de um termo dissipativo proporcional à velocidade angular $\dot{\theta}(t)$ e a força externa periódica, através de um termo proporcional à $\cos \Omega t$. Com isso, temos uma força que ora introduz energia no sistema e ora a retira, enquanto que o atrito dissipa energia proporcionalmente à velocidade do pêndulo. A equação de movimento para este sistema é, então,

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l} \sin \theta(t) - \beta \dot{\theta}(t) + \gamma \cos \Omega t. \quad (2.85)$$

Nesta equação vamos utilizar l de tal forma que $\frac{g}{l} = 1$, controlar as intensidades do atrito e da força externa através das constantes β e γ , respectivamente, e a frequência da força externa através de Ω .

Seguindo as definições iniciais sobre sistemas dinâmicos, podemos perceber que este sistema é não-autônomo por conta da força externa. Assim, precisaremos de uma equação adicional para tornar o sistema autônomo ao representá-lo como sistema dinâmico, o que implica em um espaço de fase tridimensional. Apesar disso, podemos simplesmente observar as dimensões de posição e velocidade, o que nos dá informação suficiente sobre a dinâmica do sistema. Isto nos afasta, no entanto, dos estudos feitos até aqui, pois, por exemplo, agora as trajetórias podem se cruzar e não podemos utilizar a classificação de sistemas de segunda ordem, pois este é de ordem três. Ainda assim, este exemplo ilustra muito bem o comportamento caótico e a importância dos expoentes de Lyapunov para a análise da estabilidade de sistemas como este.

O sistema que utilizaremos é, então

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t), \\ \dot{\omega}(t) = -\sin \theta(t) - \beta \dot{\theta}(t) + \gamma \cos \phi, \\ \dot{\phi}(t) = \Omega. \end{cases} \quad (2.86)$$

Para resolver este sistema será utilizado o software Mathematica e os espaços de fase serão construí-

dos utilizando os comandos já mencionados. Vamos variar apenas γ para analisar o comportamento do sistema, com $\Omega = 2/3$ e $\beta = 1/2$ fixos. Por ser um sistema tridimensional, o comando responsável por construir o campo vetorial não poderá ser utilizado neste caso e, por conta disso, apenas as trajetórias serão mostradas. Por fim, vamos ignorar movimentos transientes, mencionados no início da seção 1.1, analisando os resultados para t a partir de valores altos, pois, na maioria dos casos, o sistema rotaciona por vários períodos antes de oscilar em um ciclo limite.

Vamos além disso, calcular os expoentes de Lyapunov para cada caso, para comparar os espaços de fase obtidos com o esperado pela combinação de sinais dos expoentes, de acordo com a relação (2.80). Vale ressaltar que a terceira equação do sistema (2.86) é linear, o que quer dizer que uma perturbação não aumenta e nem diminui com o tempo, o que, por sua vez, implica que, em todos os casos à seguir, pelo menos um dos expoentes de Lyapunov é nulo. Os primeiros espaços de fase, na figura 2.9, à seguir, mostram os ciclos limite para valores pequenos do parâmetro γ .

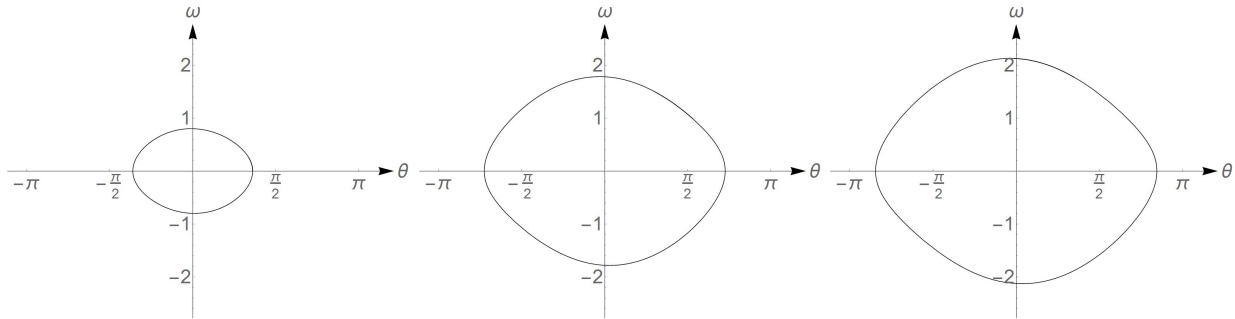


Figura 2.9 – Espaços de Fase do Sistema (2.86) para γ igual à 0.6, 0.8 e 1

Estas figuras apresentam os espaços de fase do sistema (2.86) para três valores de γ , da esquerda para a direita, 0.6, 0.8 e 1, com soluções partindo da origem, com t de 500 a 1000 e com os expoentes de Lyapunov, respectivamente, iguais à $(0, -0.246184, -0.253816)$, $(0, -0.248633, -0.251367)$ e $(0, -0.00327197, -0.496728)$.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Nesta figura é perceptível a semelhança com as soluções oscilatórias do pêndulo simples. De fato, nos três casos temos apenas oscilações no ciclo limite. Até aqui, também, não houveram bifurcações, pois o sistema não passa por nenhuma mudança brusca. Além disso, de acordo com os expoentes de Lyapunov, devemos realmente ter ciclos limites para os três casos, devido à combinação $(0, -, -)$ em todos os casos. Na figura 2.10, abaixo, começamos a analisar valores um pouco maiores do que 1 para a constante γ .

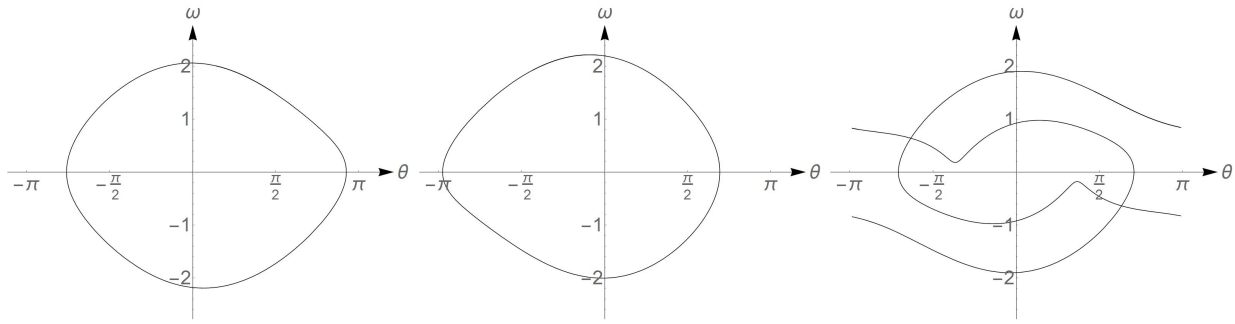


Figura 2.10 – Espaços de Fase do Sistema (2.86) para γ igual à 1.02, 1.05 e 1.08

Estas figuras apresentam os espaços de fase do sistema (2.86) para três valores de γ , da esquerda para a direita, 1.02, 1.05 e 1.08, com soluções partindo da origem, com t de 500 a 1000 e com os expoentes de Lyapunov, respectivamente, iguais à $(0, -0.0668092, -0.433191)$, $(0, -0.0851099, -0.41489)$ e $(0, -0.102862, -0.397138)$.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Nestes espaços de fase obtemos, novamente, três ciclos limite, novamente de acordo com os expoentes de Lyapunov calculados. No entanto, agora começamos a ver mais claramente o efeito induzido pela força periódica na imagem da direita, a qual causa uma bifurcação neste sistema. Durante o movimento de oscilação, quando o módulo da velocidade diminui, esta força causa um aumento neste módulo de tal forma que o pêndulo gira para o próximo período. Neste segundo período ocorre o processo inverso e o pêndulo retorna ao primeiro período e se mantém neste ciclo limite com um período espacial duplicado. Este processo ocorreu variando apenas a intensidade máxima da força através de γ , se compararmos com os demais casos até aqui, no entanto a diferença de fase entre a oscilação natural do pêndulo, dado pelo termo com seno, e da força periódica é importante para ter efeitos mais variados no movimento do pêndulo. Na figura 2.11, a seguir, temos alguns valores de γ que fazem o sistema apresentar um comportamento ainda mais interessante.

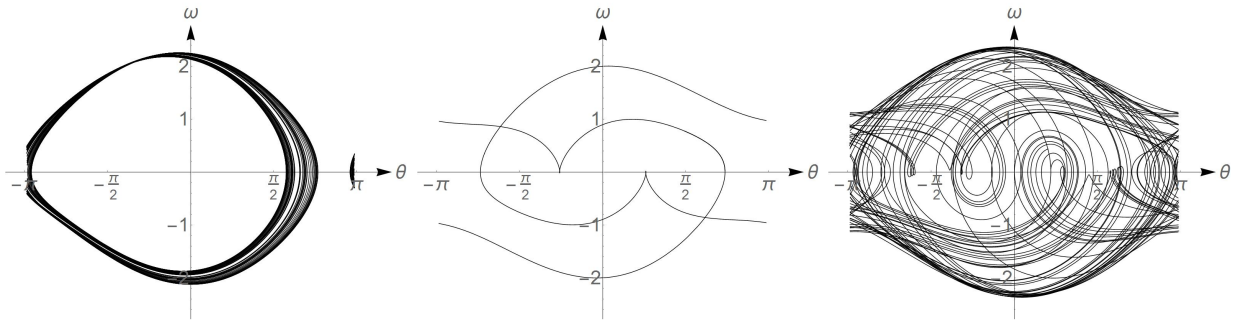


Figura 2.11 – Espaços de Fase do Sistema (2.86) para γ igual à 1.085, 1.12 e 1.2

Estas figuras apresentam os espaços de fase do sistema (2.86) para três valores de γ , da esquerda para a direita, 1.085, 1.12 e 1.2, com soluções partindo da origem, com t de 500 a 1000 e com os expoentes de Lyapunov, respectivamente, iguais à (0, -0.233253, -0.266747), (0, -0.0407414, -0.459259) e (0.134875, 0, -0.634875). Fonte: Autoria Própria, 2017.

Nestes espaços de fase obtemos, visualmente, dois ciclos limite, o primeiro, da esquerda, com a amplitude de oscilação mudando a cada período, com uma pequena parte da trajetória indicando que o pêndulo quase rotacionou, e o segundo, central, com um período duplicado, semelhante ao que vimos na figura 2.10. Quando observamos a imagem da direita, no entanto, deixamos de ver um padrão claro e vemos que as trajetórias preenchem muito mais o espaço de fase nos períodos de $-\pi$ a π sobrepostos. Isto nos indica que estas trajetórias são mais erráticas e seguem apenas o padrão que define o sistema, pois mesmo um sistema caótico ainda tem restrições originadas das suas equações de movimento. Por exemplo, neste caso, a velocidade sempre tem um valor limitado, pois mesmo que a força externa introduza energia periodicamente no sistema, quanto maior for a velocidade mais energia será dissipada pelo atrito, além de a própria força externa também retirar energia de forma periódica. As características visuais da imagem da direita nos indicam que, para $\gamma = 1.2$, o sistema é caótico e, de fato, vemos que um dos expoentes de Lyapunov é positivo e a combinação deles nos indica um atrator caótico. Para verificar este fenômeno, vamos analisar a figura 2.12, abaixo, para comparar os espaços de fase gerados com condições iniciais com perturbações da ordem de 10^{-6} mantendo $\gamma = 1.2$.

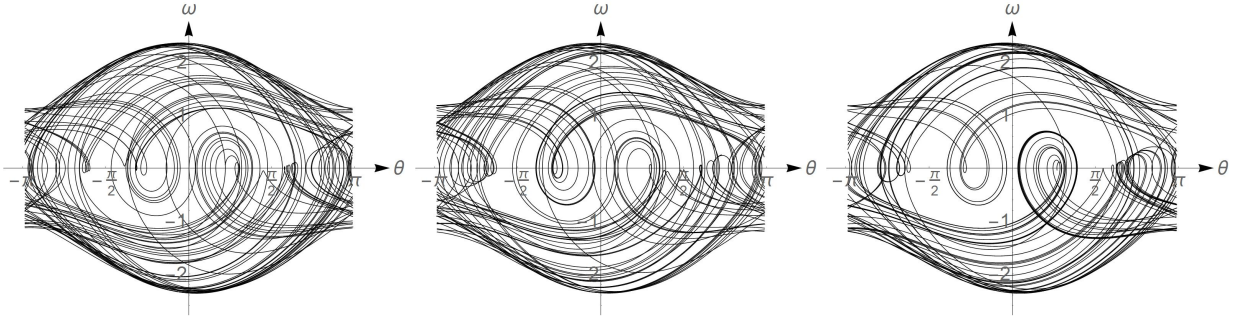


Figura 2.12 – Espaços de Fase do Sistema (2.86) para $\gamma = 1.2$

Estas figuras apresentam os espaços de fase do sistema (2.86) para $\gamma = 1.2$, para t de 500 a 1000 e as condições iniciais $(\theta_0, \omega_0, \phi_0)$, da esquerda para a direita, iguais à $(0, 0, 0)$, $(\delta, 0, 0)$ e $(0, \delta, 0)$, com a perturbação $\delta = 10^{-6}$.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

É clara, nesta figura, a diferença produzida por mudanças pequenas nas condições iniciais, exatamente como esperado para um atrator caótico. Neste ponto devemos nos recordar da estabilidade orbital, vista na seção 2.2. Lembrando deste conceito, vemos que apesar de termos estes atratores até bastante semelhantes, os pontos correspondentes em cada um no mesmo instante podem estar mais distantes do que se compararmos apenas as trajetórias, ainda mais com o método utilizado para visualizá-las todas no intervalo de $-\pi$ a π . Para termos uma noção melhor a esse respeito, utilizamos o comando `evaluate` do software Mathematica após resolvermos nele o sistema (2.86) para obter $\mathbf{X}(500)$ para $\gamma = 1.2$ e para as condições iniciais $(0, 0, 0)$, $(\delta, 0, 0)$ e $(0, \delta, 0)$, com a perturbação $\delta = 10^{-6}$, como na figura 2.12. O resultado é, respectivamente, $\mathbf{X}_{(0,0,0)}(500) = (44.6735, 0.0583256, 333.333)$, $\mathbf{X}_{(\delta,0,0)}(500) = (25.7041, 1.42028, 333.333)$ e $\mathbf{X}_{(0,\delta,0)}(500) = (-80.8348, -0.0404671, 333.333)$. Através deste vetores, podemos perceber que os pontos inicialmente próximos neste caso se distanciam muito com o passar do tempo, caracterizando este sistema como orbitalmente instável, bem como instável assintoticamente e no sentido de Lyapunov.

A análise do pêndulo com atrito e forçado periodicamente nos mostrou uma síntese dos conceitos vistos neste capítulo, desde bifurcações, apesar das bifurcações deste sistema serem distintas da que foram utilizadas para ilustrar este conceito neste trabalho, até os conceitos de estabilidade para soluções dependentes do tempo e dos expoentes de Lyapunov. Os conceitos apresentados até aqui são os conceitos centrais para o estudo dos sistemas dinâmicos e sua estabilidade e, logo, são muito importantes para diversas áreas, como a Cosmologia e a Meteorologia. Para estudar mais a fundo

algumas das aplicações de sistemas dinâmicos vamos, no próximo capítulo, analisar o problema de três corpos utilizando estes conceitos e definições discutidos até este ponto. Apesar deste problema não ser encontrado na natureza, o estudo dele foi de grande importância historicamente e modelos simplificados que o utilizam como base podem ser utilizados para explicar uma grande quantidade de sistemas físicos.

Problema de Três Corpos Restrito a um Plano

O problema de três corpos, definido a partir de Sir Isaac Newton, lida com o movimento de três corpos celestiais sob efeito da Lei da Gravitação Universal. Apesar disso, este problema foi estudado de forma mais simples desde a antiguidade, principalmente no que se refere ao movimento da Terra, do Sol e da Lua. Além disso, a formulação deste problema também pode se estender para a Relatividade Geral, de Albert Einstein, e até para a mecânica quântica, sempre que tivermos três corpos interagindo de uma forma conhecida. A formulação para a Relatividade, por exemplo, foi utilizada para descrever a emissão de luz estranha do que parecia ser uma estrela, conhecida como OJ287 [1]. Devido à rica história deste problema, na seção 3.1, a seguir, são mencionados alguns pontos importantes e curiosidades sobre ele, antes de introduzirmos matematicamente o assunto.

Uma característica importante deste problema, e de outros que tenham se estendido por bastante tempo, é que a ciência progrediu devido aos esforços para resolvê-lo. Por exemplo, este problema exigiu avanços tanto no cálculo diferencial e na forma de descrever a mecânica, quanto na programação e na implementação de métodos numéricos para o uso de um computador para calcular as trajetórias. Em ambos os casos, os métodos desenvolvidos puderam ser utilizados em outras áreas do conhecimento e para a evolução da própria física. Uma outra característica interessante deste problema, a qual justifica a omissão de unidades nas grandezas que utilizaremos, é que suas soluções podem ser consideradas em quaisquer escalas, desde que estas grandezas permaneçam nas mesmas proporções. Então, se um dos corpos tem cinco vezes a massa dos demais, podemos considerar que o maior tem ou a massa da terra ou a massa de mil sóis, desde que os demais tenham um quinto deste valor e, é claro, as demais grandezas também aumentem ou diminuam a fim de acompanhar a nova proporção. Desta forma, podemos descrever similarmente e obter as mesmas soluções considerando tanto sistemas como um planeta e duas luas e quanto um conjunto de estrelas massivas [5].

Para termos uma noção melhor sobre a complexidade deste problema e do esforço que ele demanda, uma proposta para uma solução geral foi utilizar o seu sistema em forma de séries de funções, o que, no caso da série de Sundman, para as, como veremos, 18 equações de movimento, nos leva à necessidade de utilizar, estimadamente, mais de $10^{8000000}$ termos [5]. Este número é tão grande que,

comparativamente, temos “apenas” cerca de 10^{80} átomos no universo observável. Alternativamente, utilizando técnicas numéricas, mesmo considerando que apenas 11 das equações tenham informações mais importantes, deixando de lado informações referentes ao centro de massa, por exemplo, se utilizarmos uma grade com 100 valores em cada direção, e calcularmos as trajetórias em cada parte dela, precisaríamos calcular um total de 100^{11} ou 10^{22} trajetórias. Se um computador calculasse uma trajetória por segundo, precisaríamos de cerca de 3×10^{14} anos para obtermos uma solução, a qual ainda seria imprecisa, pois teríamos que ter uma grade com mais pontos por direção para termos uma cobertura adequada do espaço de fase [5].

Como este problema parte da segunda lei de Newton, podemos tratá-lo através de um sistema dinâmico, como visto na seção 1.4. Desta forma, na seção 3.2.1 serão mostradas as equações de movimento e como usá-las como sistemas dinâmicos. Com isso, vamos fazer um estudo da estabilidade de algumas soluções famosas para este problema quando o restringimos a um plano, como veremos na seção 3.3, utilizando os conceitos discutidos nos capítulos 1 e 2 deste trabalho.

3.1 Um Breve Histórico

Uma das aplicações mais antigas, senão a mais antiga, do problema de três corpos estuda o movimento do sol, da terra e da lua com o intuito de prever eclipses. Existem lendas antigas sobre este fenômeno, por exemplo há uma em que dois astrônomos imperiais chineses foram decapitados por falhar em prever um eclipse. Em uma lenda mais importante, uma guerra entre dois povos da antiguidade, os Medos e os Lídios, terminou quando ocorreu um eclipse e isto foi interpretado como a ira dos deuses. Apesar de serem lendas, nesta segunda surge um personagem importante, Tales de Mileto, o qual teria previsto este eclipse. [1]

Tales de Mileto foi um astrônomo jônio na antiguidade e pode ter sido um dos primeiros a compreender, pelo menos em parte, os eclipses. Prova disso foi uma das próximas contribuições ao problema de três corpos, dada por um de seus alunos: Pitágoras de Samos. Pitágoras e seus seguidores, os pitagóricos, assumiram que o sol, a terra e a lua eram corpos esféricos em movimento pelo espaço cujo alinhamento provocava eclipses. A primeira explicação registrada de eclipses foi de Anaxágoras de Clazômenas, quem foi responsável por levar as novas ideias científicas dos jônios para Atenas, na Grécia. Em suas explicações, ele interpretou o sol como uma rocha quente e a lua como uma rocha que refletia a luz do sol. Ele também explicou os eclipses através do alinhamento dos três corpos, no entanto, estas explicações lhe levaram à prisão e, depois, ao exílio de volta à Jônia,

devido à força da religião em Atenas, onde o sol era Apolo, um deus. [1]

Apesar de interessantes, estes casos fogem da formulação moderna rigorosa do problema de três corpos, dada por Sir Isaac Newton, na qual os três corpos interagem através da Lei da Gravitação Universal. Seguindo os trabalhos de Johannes Kepler, sobre as órbitas dos planetas ao redor do sol, e desenvolvimento do cálculo diferencial e da mecânica vetorial de Newton, foi possível estudar com muito mais profundidade o movimento dos corpos celestes. Assim, passamos a analisar este problema com bastante rigor matemático, o que nos leva, depois, à utilização de sistemas dinâmicos para a obtenção de soluções. Como temos três corpos em um espaço de três dimensões, temos seis equações de movimento, três de posição e três de velocidade, para cada corpo, totalizando dezoito equações a serem resolvidas.

Apesar da simples formulação, como veremos na seção 3.2.1, o desafio imposto por este problema é tamanho que foram necessários 76 anos desde a publicação da obra *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* de Newton, em 1687, apresentando este problema, até a publicação da primeira solução, por Leonhard Euler, em 1763. Após outra solução, obtida por Joseph Louis Lagrange, em 1772, houveram poucas evoluções significativas até 1993, quando Christopher Moore encontrou outro tipo de solução. Outro avanço significativo foi feito em 2013, quando Milovan Šuvakov e Veljko Dmitrašinović [11] obtiveram várias novas soluções. No artigo, eles utilizaram estudos topológicos e métodos numéricos para ajudar a identificar e classificar famílias de soluções para este problema, como veremos superficialmente na seção 3.2.3.

Um caso bastante interessante, capaz de mostrar a utilidade do problema de três corpos, é o comportamento incomum do objeto celeste OJ287. Inicialmente, pensava-se que se tratava de mais uma estrela comum, no entanto, em períodos regulares de cerca de 12 anos, haviam dois momentos nos quais a intensidade da luz emitida por ela mais do que dobrava. A explicação para isso veio exatamente do problema de três corpos, mas com uma nova formulação, a partir da relatividade geral. Basicamente, foi representado um sistema com um buraco negro massivo, um buraco negro menor e uma nuvem de gás. Apesar da distância, cerca de 3.45 bilhões de anos-luz, nos impedir de observar o movimento dos três corpos em detalhes, podemos calcular os instantes nos quais o buraco negro menor colide com o chamado disco de acreção do maior. Este disco é, basicamente, a nuvem sendo absorvida pelo buraco negro maior e, com a colisão do menor em sua órbita ao redor dele, uma quantidade enorme de radiação é emitida.

Em 2007 houve um esforço internacional para a observação destes picos de luminosidade da OJ287, como previsto pelo problema de três corpos proposto. O resultado foi um grande sucesso, no

qual o pico se comportou como esperado e a relatividade geral teve uma grande comprovação. Um dos teoremas fundamentais sobre buracos negros, como provado pelo inglês Stephen Hawking e seus associados em 1970, diz que eles devem ser perfeitamente esféricos. Como uma piada, o americano John Wheeler chamou este teorema de “no-hair theorem”, algo como “teorema da calvície”, como se os buracos negros precisassem ser carecas, e isto acabou se tornando a terminologia padrão. O fato é que, se este teorema não fosse válido, os picos de luminosidade da OJ287 não ocorreriam no instante previsto. Este fato, também, nos leva a crer que os buracos negros, uma das consequências mais famosas da relatividade geral, estão longe de serem apenas objetos matemáticos sem importância física. [1]

3.2 O Problema de Três Corpos Restrito a um Plano

Como visto na seção anterior, apesar de ter uma formulação simples, como detalharemos a seguir, este problema foi bastante complicado de ser estudado, principalmente antes da utilização dos computadores. Inicialmente, as soluções eram obtidas impondo diversas restrições às equações de movimento, por exemplo, coordenadas nulas, distâncias fixas entre os corpos, um corpo com massa desprezível com relação aos outros dois, entre outros. Com a aplicação computadorizada de métodos numéricos, por outro lado, se tornou mais simples o estudo de casos menos restritos e até mesmo com mais corpos, uma vez que cálculos que levariam meses se feitos à mão, passaram a exigir apenas alguns segundos. Ainda assim, mesmo que os computadores possam calcular virtualmente qualquer solução, dada uma condição inicial, continua sendo uma tarefa difícil encontrar trajetórias periódicas, o que é muito mais interessante fisicamente do que soluções que terminam em colisão ou na expulsão de corpos do sistema.

3.2.1 Equações de Movimento Gerais

A dinâmica do problema de três corpos, como já dito, é regida pela segunda lei de Newton (1.47), utilizando a lei da gravitação universal para especificar a força resultante. Podemos definir a lei da gravitação da seguinte maneira [5]: se dois corpos têm massa m_1 e m_2 , e se estão separados por uma distância r , o corpo 2 irá atuar no centro de massa do corpo 1 com uma força direcionada ao centro de massa do corpo 2 de módulo

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \quad (3.1)$$

onde G é a constante da gravitação universal e consideramos os corpos como puntiformes, com toda a massa concentrada nos centros de massa, o que é válido, em geral, para corpos celestes devido às enormes distâncias envolvidas.

Esta definição pode ser utilizada vetorialmente com o auxílio de um sistema de coordenadas inercial. Dado um sistema deste tipo, podemos definir a posição dos corpos 1 e 2 como os vetores $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$, os quais começam na origem e terminam no centro de massa do respectivo corpo. Com isso, a distância entre os corpos é o módulo do vetor $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, o qual também determina a direção $\hat{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{r}_{12}/|\mathbf{r}_{12}|$ entre os centros de massa. Assim, a lei da gravitação pode ser dada por

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_{12}|^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|}, \quad (3.2)$$

onde o sinal negativo indica que a força sobre o corpo 1 está no sentido de 1 para 2. Com esta equação, podemos facilmente introduzir mais um corpo, uma vez que a força resultante sobre 1, por exemplo, é a soma vetorial de todas as forças que agem sobre ele.

Assim, se temos três corpos de massas m_1 , m_2 e m_3 , a força resultante sobre o corpo 1 será

$$\mathbf{F}_1 = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3} - Gm_1m_3 \frac{\mathbf{r}_{13}}{|\mathbf{r}_{13}|^3}. \quad (3.3)$$

Antes de tratar dos outros dois corpos, vamos analisar as componentes dos vetores desta equação. Primeiro, da segunda lei de Newton, temos que $\mathbf{F} = m_1\ddot{\mathbf{r}}_1$ e, em coordenadas cartesianas, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, o que nos leva à $\mathbf{F} = m_1(\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{z}_1)$. Por outro lado, como $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $\mathbf{r}_3 = (x_3, y_3, z_3)$, temos que $\mathbf{r}_{12} = (x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ e $\mathbf{r}_{13} = (x_1 - x_3, y_1 - y_3, z_1 - z_3)$. Desta forma, o módulo destes vetores serão, respectivamente,

$$|\mathbf{r}_{12}| = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.4)$$

e

$$|\mathbf{r}_{13}| = [(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Observando os padrões nestas relações, podemos definir o termo

$$d_{ij} = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.6)$$

o qual irá ajudar tanto a reduzir o tamanho das equações, quanto facilitar a utilização dos comandos numéricos a serem utilizados. Além disso, podemos generalizar a equação 3.3 para n corpos, com

$$\mathbf{F}_i = -\sum_{j \neq i}^n Gm_i m_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^3}. \quad (3.7)$$

Desta forma, podemos representar esta equação matricialmente de forma mais compacta e explicitando as componentes de seus vetores, como

$$m_i \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \\ \ddot{z}_i \end{bmatrix} = - \sum_{i \neq j}^n G m_i m_j \frac{1}{d_{ij}^3} \cdot \begin{bmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \\ z_i - z_j \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

de onde obtemos o sistema

$$\begin{cases} \ddot{x}_i = - \sum_{i \neq j}^n G m_j \frac{x_i - x_j}{d_{ij}^3}, \\ \ddot{y}_i = - \sum_{i \neq j}^n G m_j \frac{y_i - y_j}{d_{ij}^3}, \\ \ddot{z}_i = - \sum_{i \neq j}^n G m_j \frac{z_i - z_j}{d_{ij}^3}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Para deixar estas equações na forma de um sistema dinâmico, basta utilizarmos a relação $\dot{x}_i = v_{x_i}$, o que nos leva ao sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_{x_i}, \\ \dot{y}_i = v_{y_i}, \\ \dot{z}_i = v_{z_i}, \\ \dot{v}_{x_i} = - \sum_{i \neq j}^n G m_j \frac{x_i - x_j}{d_{ij}^3}, \\ \dot{v}_{y_i} = - \sum_{i \neq j}^n G m_j \frac{y_i - y_j}{d_{ij}^3}, \\ \dot{v}_{z_i} = - \sum_{i \neq j}^n G m_j \frac{z_i - z_j}{d_{ij}^3}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Este sistema mostra todas as coordenadas do i -ésimo corpo sob efeito da gravidade de $n - 1$ outros corpos. Como podemos perceber, a formulação deste tipo de problema não é complicada, no entanto, vemos também que para n corpos precisamos resolver um conjunto de $6n$ equações diferenciais ordinárias não-lineares e acopladas, o que está bastante longe de ser fácil, ou até mesmo de ser possível, analiticamente [5].

Ao longo da história, principalmente nos seus primeiros anos, o problema de três corpos sempre passa por uma série de artifícios matemáticos antes da busca por uma solução [1][5][6][7]. Neste trabalho, no entanto, vamos nos concentrar apenas no chamado problema de três corpos restrito ao plano, o qual discutiremos na seção 3.2.2, uma vez que utilizaremos métodos numéricos com o software Mathematica, para resolvê-lo. Ainda assim, estes artifícios, os quais, em geral, buscam reduzir o número de equações do sistema, são bastante interessantes, a exemplo da utilização de

constantes de movimento, como o momento angular total, o movimento do centro de massa do sistema, e da utilização de coordenadas distintas, como a diferença entre coordenadas individuais de Lagrange ou o centro de massa de dois corpos, com o terceiro distante, de Jacobi [5].

Para o problema de três corpos geral, o sistema (3.10) é, então,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = v_{x_1}, \\ \dot{y}_1 = v_{y_1}, \\ \dot{z}_1 = v_{z_1}, \\ \dot{x}_2 = v_{x_2}, \\ \dot{y}_2 = v_{y_2}, \\ \dot{z}_2 = v_{z_2}, \\ \dot{x}_3 = v_{x_3}, \\ \dot{y}_3 = v_{y_3}, \\ \dot{z}_3 = v_{z_3}, \\ \dot{v}_{x_1} = -Gm_2 \frac{x_1 - x_2}{d_{12}^3} - Gm_3 \frac{x_1 - x_3}{d_{13}^3}, \\ \dot{v}_{y_1} = -Gm_2 \frac{y_1 - y_2}{d_{12}^3} - Gm_3 \frac{y_1 - y_3}{d_{13}^3}, \\ \dot{v}_{z_1} = -Gm_2 \frac{z_1 - z_2}{d_{12}^3} - Gm_3 \frac{z_1 - z_3}{d_{13}^3}, \\ \dot{v}_{x_2} = -Gm_1 \frac{x_2 - x_1}{d_{21}^3} - Gm_3 \frac{x_2 - x_3}{d_{23}^3}, \\ \dot{v}_{y_2} = -Gm_1 \frac{y_2 - y_1}{d_{21}^3} - Gm_3 \frac{y_2 - y_3}{d_{23}^3}, \\ \dot{v}_{z_2} = -Gm_1 \frac{z_2 - z_1}{d_{21}^3} - Gm_3 \frac{z_2 - z_3}{d_{23}^3}, \\ \dot{v}_{x_3} = -Gm_1 \frac{x_3 - x_1}{d_{31}^3} - Gm_2 \frac{x_3 - x_2}{d_{32}^3}, \\ \dot{v}_{y_3} = -Gm_1 \frac{y_3 - y_1}{d_{31}^3} - Gm_2 \frac{y_3 - y_2}{d_{32}^3}, \\ \dot{v}_{z_3} = -Gm_1 \frac{z_3 - z_1}{d_{31}^3} - Gm_2 \frac{z_3 - z_2}{d_{32}^3}. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

O vetor de estado é, matricialmente,

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_2 & y_2 & z_2 & x_3 & y_3 & z_3 & v_{x_1} & v_{y_1} & v_{z_1} \\ & & & & & & & & & v_{x_2} & v_{y_2} & v_{z_2} & v_{x_3} & v_{y_3} & v_{z_3} \end{bmatrix}^T. \quad (3.12)$$

o que nos diz que o espaço de fase do problema de três corpos tem 18 dimensões, o que o afasta bastante das análises gráficas que fizemos no decorrer deste trabalho. No entanto, os três corpos, é claro, se movem em um espaço tridimensional, uma vez que não estamos interessados em efeitos relativísticos, e isto nos permite utilizar um espaço $x-y-z$ para plotar as trajetórias percorridas por eles. Desta forma, agora não vamos analisar trajetórias que dependem da posição e da velocidade, mas a trajetória que o corpo, de fato, faz em seu movimento, ao custo de não termos informação explícita sobre a velocidade dos corpos.

Como estamos trabalhando com equações diferenciais, é claro que as soluções dependem de condições iniciais arbitrárias, dada por

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_{1_0} & y_{1_0} & z_{1_0} & x_{2_0} & y_{2_0} & z_{2_0} & x_{3_0} & y_{3_0} & z_{3_0} & v_{x_{1_0}} & v_{y_{1_0}} & v_{z_{1_0}} \\ & & & & & & & & & v_{x_{2_0}} & v_{y_{2_0}} & v_{z_{2_0}} & v_{x_{3_0}} & v_{y_{3_0}} & v_{z_{3_0}} \end{bmatrix}^T. \quad (3.13)$$

As soluções históricas para este problema, por exemplo, apesar de obtidas através de manipulações matemáticas e de forma analítica, podem ser construídas, também, a partir de algumas suposições, como alguma proporção entre as massas dos corpos, e através de um vetor como o (3.16) específico. Isto é algo que também se aplica às soluções obtidas mais recentemente de forma numérica [11], como veremos na seção 3.3. Em ambos os casos, no entanto, uma outra consideração importante é feita, como veremos na próxima seção.

3.2.2 A Restrição a um Plano

Como já discutido, o sistema (3.11) é simplificado através de algumas considerações a fim de ser resolvido com mais facilidade. Para este trabalho, vamos discutir e utilizar uma das simplificações mais utilizadas: a restrição a um plano. Para fazer isso, apenas temos que ter uma mesma constante em uma das três coordenadas para os três corpos. Com isso, temos a velocidade também é nula nesta direção e, usualmente, também podemos considerar nula, sem problemas, a constante mencionada.

Desta forma, restringindo o sistema (3.11) ao plano $x-y$, com z e $\dot{z}$ nulos para os três corpos, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = v_{x_1}, \\ \dot{y}_1 = v_{y_1}, \\ \dot{x}_2 = v_{x_2}, \\ \dot{y}_2 = v_{y_2}, \\ \dot{x}_3 = v_{x_3}, \\ \dot{y}_3 = v_{y_3}, \\ \dot{v}_{x_1} = -Gm_2 \frac{x_1 - x_2}{d_{12}^3} - Gm_3 \frac{x_1 - x_3}{d_{13}^3}, \\ \dot{v}_{y_1} = -Gm_2 \frac{y_1 - y_2}{d_{12}^3} - Gm_3 \frac{y_1 - y_3}{d_{13}^3}, \\ \dot{v}_{x_2} = -Gm_1 \frac{x_2 - x_1}{d_{21}^3} - Gm_3 \frac{x_2 - x_3}{d_{23}^3}, \\ \dot{v}_{y_2} = -Gm_1 \frac{y_2 - y_1}{d_{21}^3} - Gm_3 \frac{y_2 - y_3}{d_{23}^3}, \\ \dot{v}_{x_3} = -Gm_1 \frac{x_3 - x_1}{d_{31}^3} - Gm_2 \frac{x_3 - x_2}{d_{32}^3}, \\ \dot{v}_{y_3} = -Gm_1 \frac{y_3 - y_1}{d_{31}^3} - Gm_2 \frac{y_3 - y_2}{d_{32}^3}, \end{array} \right. \quad (3.14)$$

com

$$d_{ij} = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.15)$$

e

$$\mathbf{X}_0 = \left[\begin{array}{cccccccccccc} x_{1_0} & y_{1_0} & x_{2_0} & y_{2_0} & x_{3_0} & y_{3_0} & v_{x_{1_0}} & v_{y_{1_0}} & v_{x_{2_0}} & v_{y_{2_0}} & v_{x_{3_0}} & v_{y_{3_0}} \end{array} \right]^T. \quad (3.16)$$

Mesmo com esta restrição, em muitos casos de interesse isto pode ocorrer, como no caso de planetas orbitando uma estrela em um mesmo plano, o que ocorre aproximadamente no caso do nosso Sistema Solar. Além disso, é com esta restrição que várias das soluções para o problema de três corpos foram obtidas, como veremos na seção seguinte.

3.2.3 Classificação das Famílias de Soluções do Problema de Três Corpos.

Em 2013, através de estudos numéricos do problema de três corpos, os físicos sérvios Milovan Šuvakov e Veljko Dmitrašinović, estudaram a topologia das soluções obtidas por eles para desenvolver

uma classificação através das simetrias algébricas e geométricas, nas quais as famílias de soluções se encaixam em quatro classes distintas. Basicamente, eles estudaram as simetrias das soluções do problema de três corpos representadas em um espaço em forma de esfera e espaço gerado pela projeção estereográfica desta esfera sobre um plano. Com isso, famílias de soluções periódicas e sem colisões são caracterizadas por curvas fechadas sobre a esfera e, de acordo com suas simetrias são classificadas em I e II , enquanto que, de acordo com a o sentido de rotações completas sobre dois pontos específicos as classifica em A , B e C . Como, em seu trabalho, eles identificaram que a classe A sempre corresponde à classe I , a classe C , à classe II e a B pode corresponder a I ou II . Desta forma, temos uma classificação interessante, onde as soluções se encaixam em IA , IB , $II.B$ ou $II.C$, que pode ser vista com mais detalhes do trabalho de Šuvakov e Dmitrašinović [11].

3.3 Soluções Numéricas para o Problema de Três Corpos Restrito a um Plano

Nesta seção, vamos utilizar o sistema (3.14) para mostrar algumas soluções obtidas ao longo da história do problema de três corpos. Para tanto vamos utilizar as massas e condições iniciais necessárias para mostrarmos as soluções em linha reta, em oito [10], a borboleta e a yin-yang [11]. Em cada caso vamos, também, calcular os expoentes de Lyapunov, para analisar a estabilidade das soluções, utilizando o comando “LCEsC”, definido no pacote disponibilizado por Marco Sandri [8], no software Mathematica, o qual sintetiza o método numérico discutido na seção 2.5 e é esclarecido na seção A.3, do apêndice. É necessário destacar que, para estes casos, vamos representar apenas as posições dos três corpos em um mesmo plano, pois o espaço de fase tem 12 dimensões.

3.3.1 Solução em Linha Reta

Esta solução foi uma das primeiras a serem obtidas analiticamente, ainda em 1763, pelo suíço Leonhard Euler. Nela, os corpos rotacionam sempre sobre uma mesma linha reta, de modo que permanecem sempre alinhados em seu movimento. A solução feita por Euler pode ser utilizada com as massas e as condições iniciais adequadas. Neste caso, o importante é que os corpos estejam em equilíbrio na direção da linha reta, de modo que a força resultante sobre eles os mantenham em um movimento circular. Para isso, podemos utilizar $m_1 = 2$ e $m_2 = m_3 = 0.5$ em conjunto com a condição inicial $\mathbf{X}_0 = (x_{10}, y_{10}, x_{20}, y_{20}, x_{30}, y_{30}, v_{x_{10}}, v_{y_{10}}, v_{x_{20}}, v_{y_{20}}, v_{x_{30}}, v_{y_{30}}) =$

$(-1, 1.254953728, 2.745046272, 0, 0, 0, 0, 0, -0.3660350371, 0.4593570344, 1.004783114)$ [10]. As trajetórias dos corpos no plano $x - y$ são mostradas na figura 3.1, a seguir.

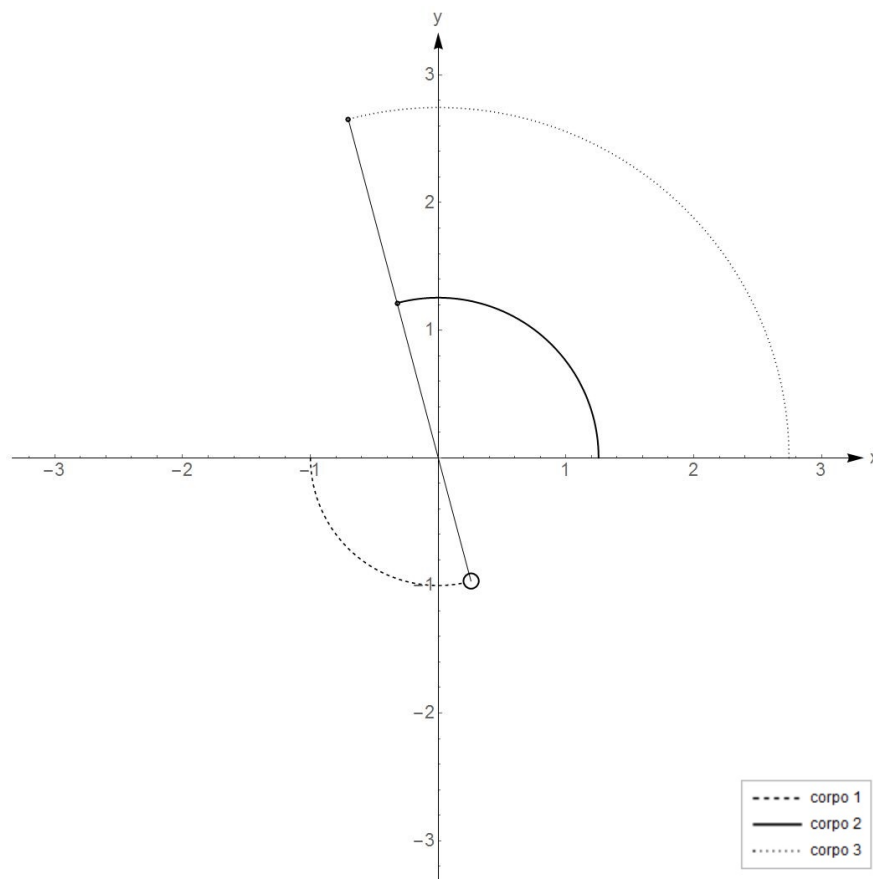


Figura 3.1 – Instantes Iniciais da Solução em Linha Reta

O parâmetro t foi utilizado de 0 à 5 para observarmos o início do movimento dos corpos. As trajetórias dos corpos 1, 2 e 3 estão, respectivamente, tracejada, sólida e pontilhada, para os identificarmos, com a posição dos corpos representada no instante $t = 5$. A linha que liga os três corpos foi plotada para explicitar a característica principal desta solução.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Como é visível nesta figura, temos os corpos se movendo sobre uma linha reta, a qual rotaciona, descrevendo um movimento circular. Esta configuração do sistema se mantém, de modo que temos uma trajetória periódica neste formato, como mostrado na figura 3.2, abaixo.

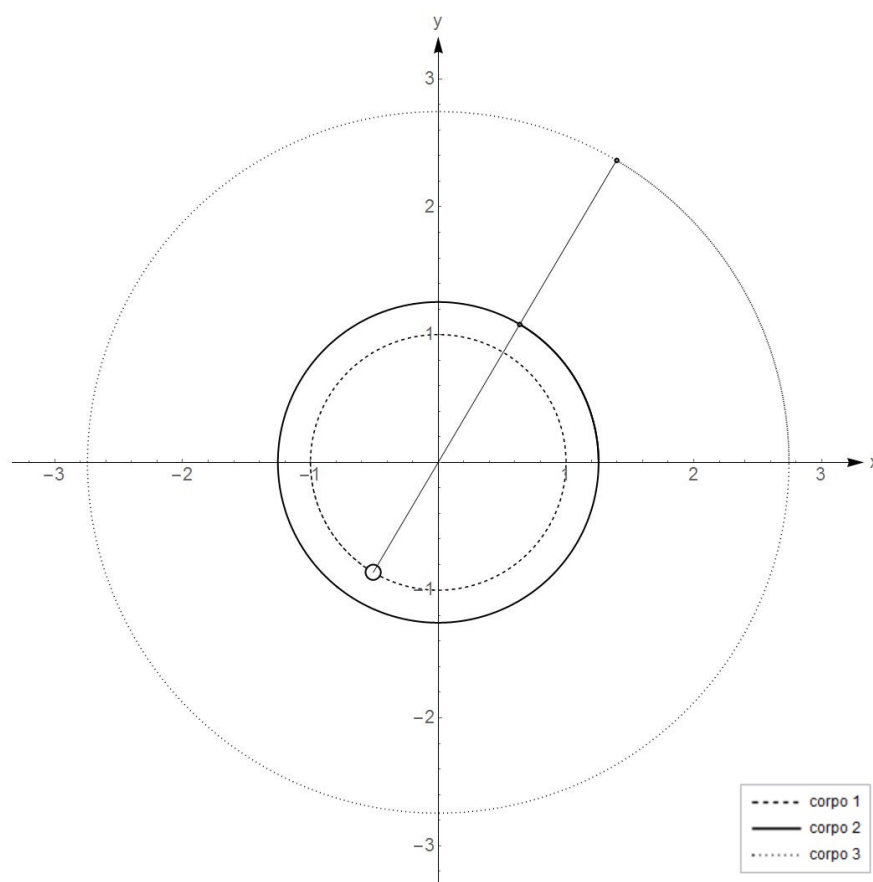


Figura 3.2 – Solução em Linha Reta

O parâmetro t foi utilizado de 0 à 20 a continuação do movimento na figura 3.1. Os corpos estão representados no instante $t = 20$, juntamente com a linha que liga os três corpos.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Apesar de conseguirmos mostrar a periodicidade deste caso, este sistema ainda assim é instável. Isto quer dizer que pequenas mudanças nas condições indicadas farão este sistema se comportar de uma forma distinta e não-periódica. Mesmo com estas condições, se buscarmos uma alta precisão nos cálculos, após vários períodos este movimento vai acabar se desfazendo. Podemos observar este comportamento na figura 3.3, abaixo, na qual somamos uma perturbação $\delta = 10^{-4}$ em v_{x_1} .

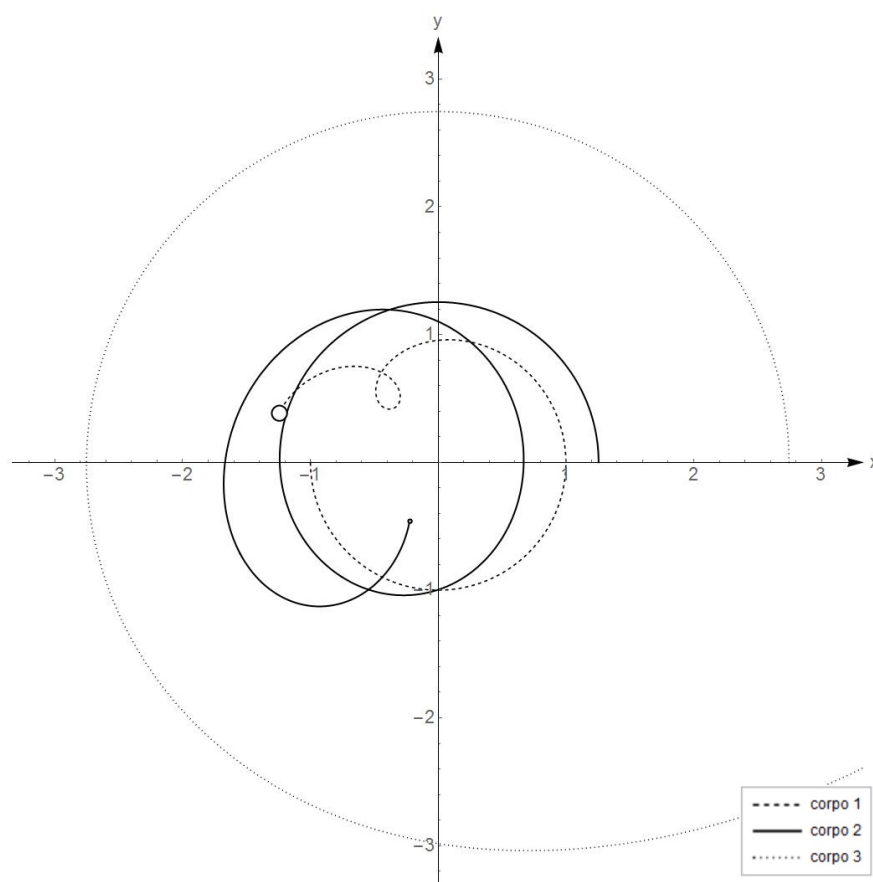


Figura 3.3 – Solução em Linha Reta Perturbada

O parâmetro t foi utilizado de 0 à 20 como na figura anterior. Agora, no entanto, perturbamos a velocidade inicial do corpo 1 na direção x com uma perturbação da ordem de 10^{-4} .

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Como podemos observar, mesmo com uma perturbação pequena, o sistema já não apresenta a mesma configuração regular anterior nos instantes iniciais. Isto implica, também, que com a maior precisão anterior, só adiamos o instante onde o sistema perde este equilíbrio. Para corroborar esta análise, os expoentes de Lyapunov deste caso são $(0.036444, 0.0319237, 0.00294284, 0.00274646, 0.000715837, 0.000125364, -0.000330924, -0.00123978, -0.00274581, -0.0126583, -0.0210688, -0.0375839)$, de onde podemos observar claramente o regime caótico de classe C^{10} que rege o sistema, de acordo com as discussões da seção 2.5. Por esta ser uma solução instável, ela dificilmente pode ser encontrada naturalmente, mas, apesar disso, foi um dos primeiros passos para a compreensão do problema de três corpos e carrega uma grande importância científica e histórica.

3.3.2 Solução em Oito

Esta solução foi obtida pelo matemático americano Cristopher Moore em 1993, utilizando cálculos computacionais, e foi provada pouco tempo depois pelo matemático francês Alain Chenciner e pelo americano Robert Montgomery [1]. Nesta solução devemos ter três corpos de massas iguais e com as condições iniciais $\mathbf{X}_0 = (x_{1_0}, y_{1_0}, x_{2_0}, y_{2_0}, x_{3_0}, y_{3_0}, v_{x_{1_0}}, v_{y_{1_0}}, v_{x_{2_0}}, v_{y_{2_0}}, v_{x_{3_0}}, v_{y_{3_0}}) = (-0.97000436, 0.24308753, 0.97000436, -0.24308753, 0, 0, -0.46620369, -0.43236573, -0.46620369, -0.43236573, 0.93240737, 0.86473146)$ [10]. Utilizando as massas iguais a 1, então, podemos representar o espaço $x - y$ e plotar as trajetórias dos três corpos utilizando o software Mathematica, com a sequencia de comandos explicadas no apêndice, como mostrado na figura 3.4, abaixo.

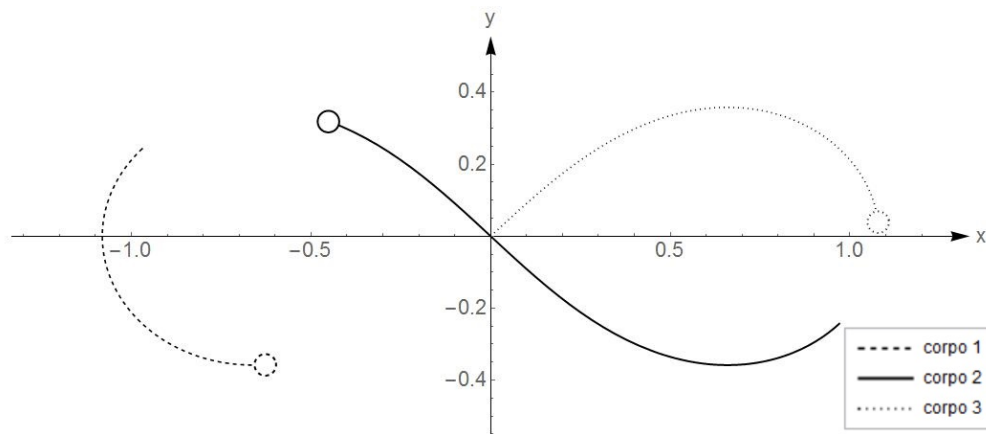


Figura 3.4 – Instantes Iniciais da Solução em Oito

O parâmetro t foi utilizado de 0 à 1.5 para termos uma noção da formação da trajetória em oito. As trajetórias e os corpos 1, 2 e 3 estão, respectivamente, tracejados, sólidos e pontilhados, para os identificarmos, com a posição dos corpos no instante $t = 1.5$.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Nesta figura, podemos perceber um esboço da figura em oito, a qual é uma trajetória percorrida por todos os três corpos, em momentos distintos. Por exemplo, na figura 3.5, abaixo, vemos as trajetórias dos corpos após mais algum tempo.

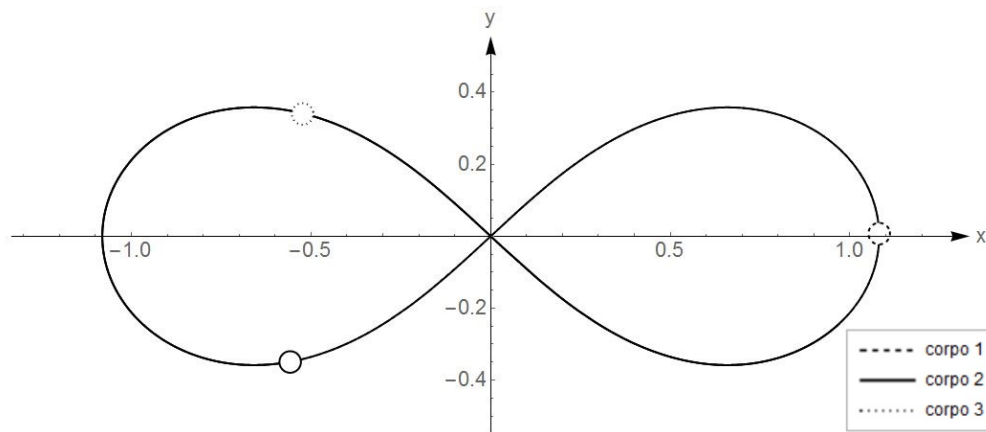


Figura 3.5 – Solução em Oito

O parâmetro t foi utilizado de 0 à 10 para vermos que todos os corpos seguem a mesma trajetória. Neste caso, os corpos já percorreram toda a trajetória. Novamente, os corpos 1, 2 e 3 estão, respectivamente, tracejado, sólido e pontilhado, agora nas posições para o instante $t = 10$.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Como podemos perceber, esta é uma trajetória periódica. No entanto, ela é só é obtida com as condições iniciais indicadas, o que também nos leva a outro problema, como no caso anterior: a precisão. É claro que com o computador temos uma precisão muito grande, mas, ainda assim, ele é limitada. Após vários períodos, mesmo com grande precisão, veremos as trajetórias se afastarem da figura em oito. Para ilustrar isso, vamos utilizar as condições iniciais com apenas duas casas após a vírgula, o que é uma precisão bastante baixa, para mostrar a diferença com relação à figura 3.5. A figura 3.6, abaixo, mostrar então esta situação para o mesmo intervalo de tempo da figura 3.5.

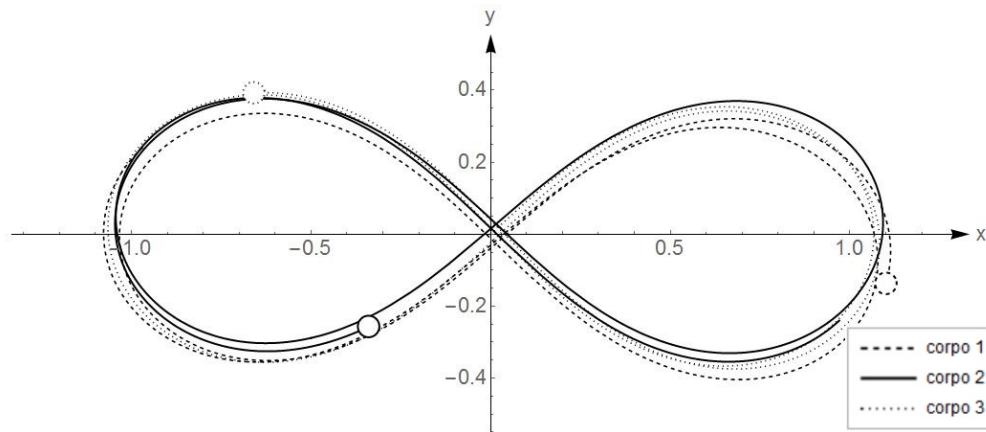


Figura 3.6 – Solução em Oito sem Precisão

O parâmetro t também foi utilizado de 0 à 10, mas agora utilizamos condições iniciais com precisão baixa. Podemos ver claramente que as trajetórias não estão bem alinhadas umas com as outras como nas outras figuras.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Esta situação nos remete aos atratores caóticos e indica a instabilidade desta solução. Para compreendermos melhor esta solução, obtivemos, numericamente, os expoentes de Lyapunov (0.0352873, 0.0325406, 0.00636226, 0.00321533, 0.00274652, 0.00112212, -0.00178415, -0.00274651, -0.00389627, -0.0112491, -0.0284665, -0.0331316) para este sistema. Como podemos ver, temos um atrator caótico, por conta do sinal do primeiro expoente, classificado como C^{10} devido ao número de dimensões do sistema, como vimos no final da seção 2.5. Como estamos tratando de um sistema caótico, a solução em oito é sensível às condições iniciais, o que podemos perceber pela diferença imposta apenas pela redução da sua precisão, então esta solução, também, é altamente improvável de ser encontrada na natureza, mas, ainda assim, foi uma das soluções que nos possibilitou ter uma noção melhor sobre o problema de três corpos ao longo da história [1][5].

3.3.3 Soluções Borboleta e Yin-yang

As soluções borboleta e yin-yang são duas das várias obtidas por Milovan Šuvakov e Veljko Dmitrašinović [11], em 2013, através de estudos numéricos do problema de três corpos. Elas são, respectivamente, exemplos das classes *I.A* e *II.C*, propostas por eles e discutida na seção 3.2.3. Como nos dois casos anteriores, estamos lidando com soluções instáveis e, por isso, bastante sensíveis às condições iniciais. A diferença entre estas soluções está em apenas duas coordenadas

das condições iniciais, $v_{x_{1_0}}$ e $v_{y_{1_0}}$. As demais são $(x_{1_0}, y_{1_0}, x_{2_0}, y_{2_0}, x_{3_0}, y_{3_0}, v_{x_{2_0}}, v_{y_{2_0}}, v_{x_{3_0}}, v_{y_{3_0}}) = (-1, 0, 1, 0, 0, 0, v_{x_{1_0}}, v_{y_{1_0}}, -2v_{x_{1_0}}, -2v_{y_{1_0}})$ e, para a borboleta, temos $(v_{x_{1_0}}, v_{y_{1_0}}) = (0.30689, 0.12551)$, enquanto que a yin-yang é $(v_{x_{1_0}}, v_{y_{1_0}}) = (0.51394, 0.30474)$ [11]. Como as demais soluções apresentadas no artigo de Šuvakov e Dmitrašinović, estas têm correspondentes invertidas, pois se $(v_{x_{1_0}}, v_{y_{1_0}})$ geram uma solução em conjunto com as outras condições mostradas, $(\pm v_{x_{1_0}}, \pm v_{y_{1_0}})$ também geram. Entretanto, estas outras soluções são consideradas fisicamente equivalentes, pois ou são idênticas ou diferem apenas pela inversão do parâmetro t ou por uma reflexão [11]. A figura 3.7 abaixo mostra, então, os movimentos iniciais das trajetórias destas duas soluções.

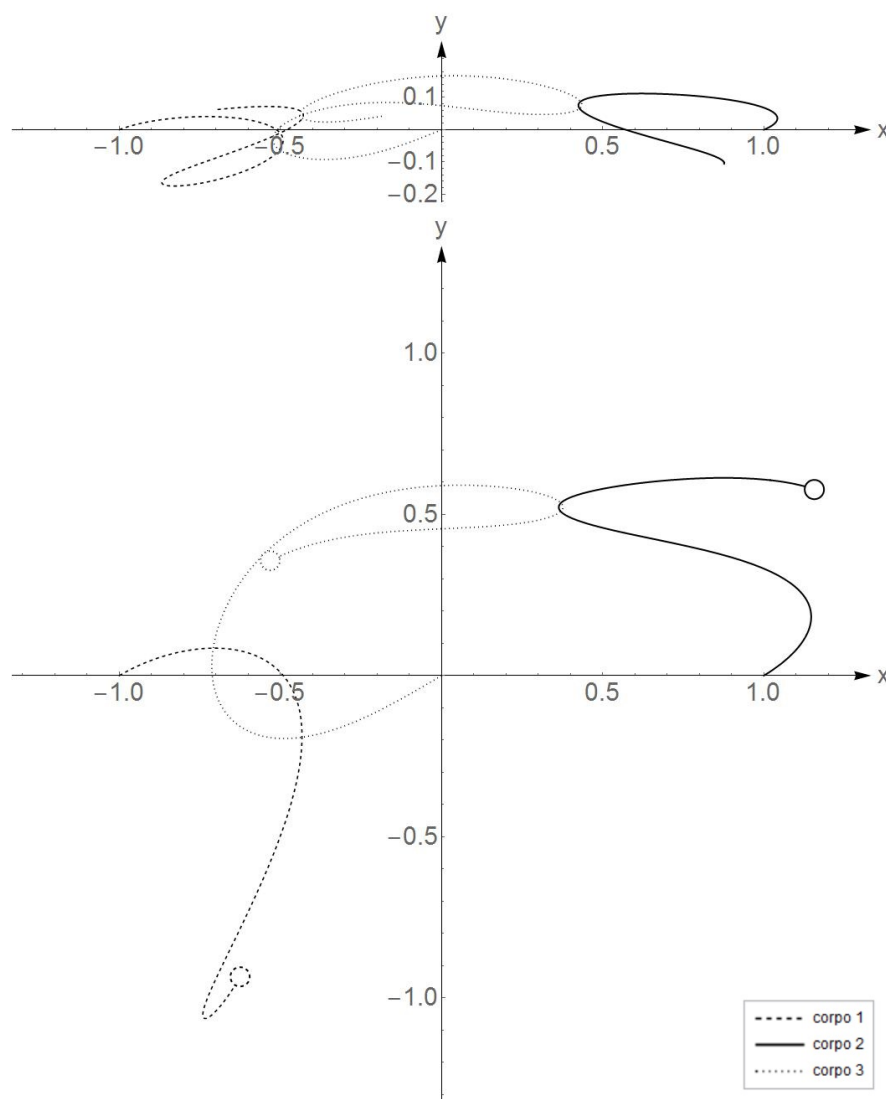


Figura 3.7 – Instantes Iniciais das Soluções Borboleta e Yin-yang

Acima temos as trajetórias da solução borboleta, para t de 0 à 2 e abaixo temos a solução yin-yang, de 0 à 3. Neste caso vale lembrar que, apesar das trajetórias se cruzarem, os corpos passam por estes pontos em instantes distintos e, além disso, aparentes colisões entre os pequenos círculos não devem ser levadas em conta, uma vez que eles apenas representam a posição do corpo, os quais, devemos também lembrar, são considerados pontuais.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Como podemos ver, já nos instantes iniciais estas soluções descrevem trajetórias mais complicadas do que os outros casos discutidos até aqui. Ainda assim, são soluções de interesse, por serem periódicas, com período $T = 6.2356$ para a borboleta e $T = 17.3284$ para a yin-yang [11]. As trajetórias percorridas após um período completo são mostradas na figura 3.8, a seguir.

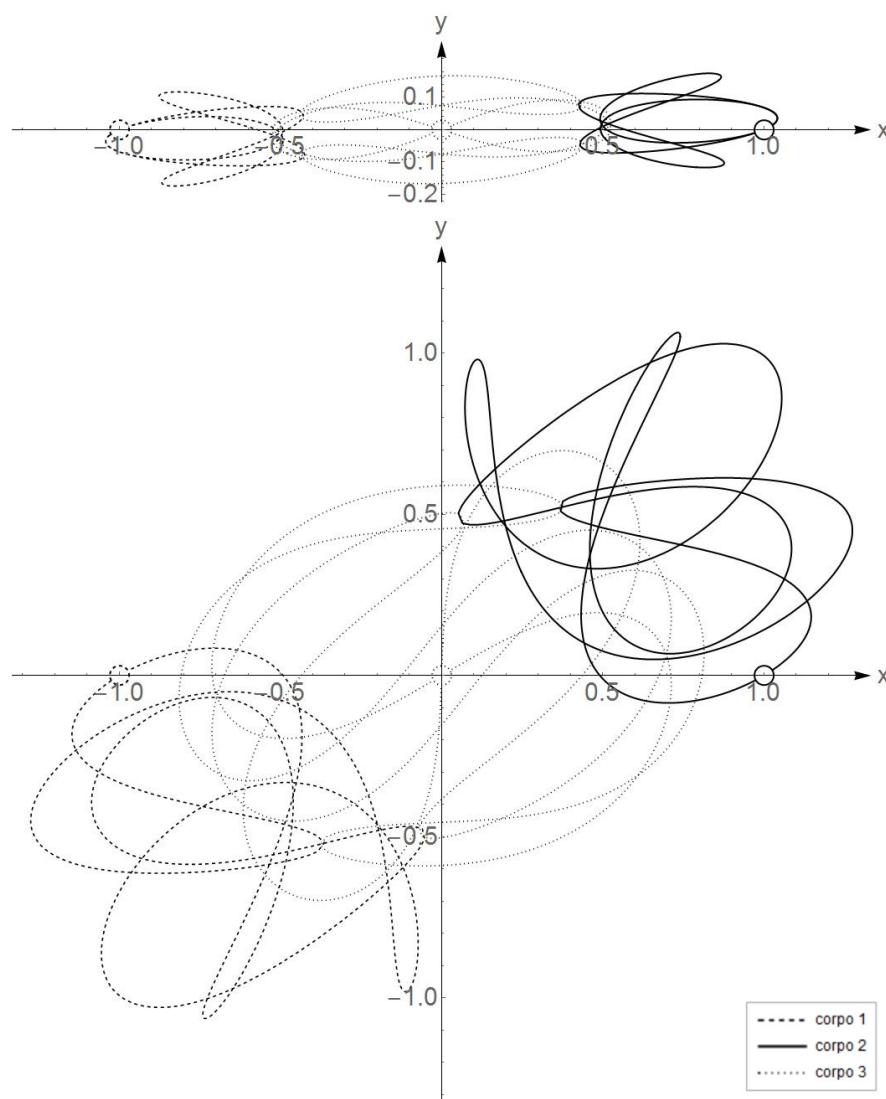


Figura 3.8 – Soluções Borboleta e Yin-yang

Temos agora as soluções borboleta e yin-yang após um período completo, o que nos permite observar a maior complexidade das trajetórias.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Após observarmos as trajetórias das figuras 3.7 e 3.8, vamos agora analisar estas soluções através de uma perturbação pequena. Como sabemos, estas trajetórias são sensíveis às condições iniciais, como podemos ver na figura 3.9, a seguir.

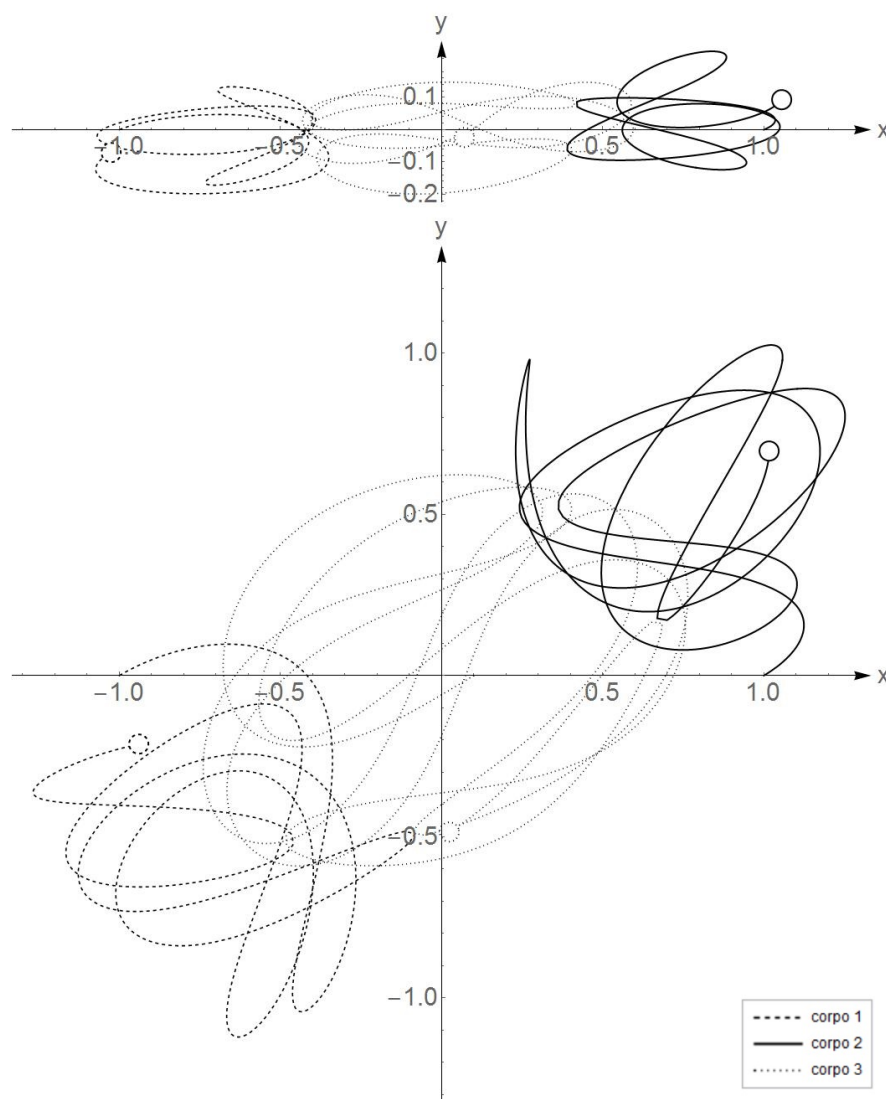


Figura 3.9 – Soluções Borboleta e Yin-yanç Perturbadas

Nesta figura foram aplicadas perturbações $\delta = 0.1$ em ambas as soluções, para observarmos claramente sua instabilidade, com os mesmos intervalos de tempo da figura 3.8.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Desta forma, podemos ver claramente a já esperada instabilidade destas soluções. No entanto, perturbações pequenas alteram bem pouco as trajetórias ainda no primeiro período e, por isso, utilizamos uma perturbação maior do que das outras vezes para vermos logo sua influência sobre os corpos. Para nos ajudar a explicar isso, temos para a solução borboleta e yin-yanç, respectivamente, os expoentes de Lyapunov $(1.72989 \cdot 10^{-6}, 1.26896 \cdot 10^{-6}, 7.26022 \cdot 10^{-7}, 6.8222 \cdot 10^{-7}, 6.12219 \cdot 10^{-7}, 2.06848 \cdot 10^{-7}, -2.06615 \cdot 10^{-7}, -6.12297 \cdot 10^{-7}, -6.82307 \cdot 10^{-7}, -7.25581 \cdot 10^{-7})$.

$10^{-7}, -1.26956 \cdot 10^{-6}, -1.72981 \cdot 10^{-6}$) e $(7.79229 \cdot 10^{-8}, 5.04487 \cdot 10^{-8}, 3.77605 \cdot 10^{-8}, 1.71535 \cdot 10^{-8}, 1.4817 \cdot 10^{-8}, 7.05588 \cdot 10^{-11}, -6.84786 \cdot 10^{-11}, -1.4813 \cdot 10^{-8}, -1.71527 \cdot 10^{-8}, -3.7763 \cdot 10^{-8}, -5.04504 \cdot 10^{-8}, -7.79255 \cdot 10^{-8})$, o que nos indica, como nos demais casos, o caos presente neste sistema e, especificamente nestas soluções, a divergência pequena para trajetórias próximas. Um valor pequeno para os expoentes de Lyapunov, no entanto, não implica, é claro, na estabilidade. Contanto que o sinal de um deles seja positivo, as trajetórias se distanciam exponencialmente, o que fica claro para tempos ou perturbações relativamente grandes. Apesar de repetitiva, estas informações são características importantes do problema de três corpos e o estudo que fizemos ajuda a compreendê-las melhor, além de abrir nossos olhos à complexidade do universo, onde a maioria dos casos, se não em todos, temos um número maior de corpos interagindo ativamente.

Considerações Finais

A análise do problema de três corpos através de um sistema dinâmico mostra uma das suas principais características: o caos. A grande quantidade de esforço necessário para o estudo deste problema fez com que fossem necessárias mentes brilhantes e históricas da física e da matemática, como Newton, Euler e Lagrange, para a obtenção de suas primeiras soluções. Além disso, cientistas mais recentes, como Moore, Šuvakov e Dmitrašinović foram indispensáveis para a obtenção de soluções mais complexas e para a utilização de computadores nos estudos do problema. Neste trabalho, então, foi possível investigar a estabilidade de algumas destas soluções, através da utilização de softwares matemáticos como wxMaxima, Maple e Mathematica, programados a partir das diversas características dos sistemas dinâmicos e do problema de três corpos.

Com a utilização dos sistemas dinâmicos pudemos, matematicamente, identificar o regime caótico do problema de três corpos, ao analisarmos os expoentes de Lyapunov para as soluções em linha, em oito, borboleta e yin-yang. Para isso, foi feita uma revisão bastante abrangente, tanto sobre sistemas dinâmicos quanto sobre o próprio problema de três corpos, com vários exemplos e com a descrição dos comandos utilizados nos softwares, a fim de facilitar a reprodução e aprimoramento dos resultados. Cumprindo os objetivos deste trabalho, então, apresentamos uma formulação para este problema utilizando a teoria por trás dos sistemas dinâmicos, a fim de aplicarmos os métodos numéricos propostos e executados.

Analisando dos resultados obtidos, quando observamos as trajetórias da seção 3.3, podemos ver figuras bem definidas, como no caso das soluções em linha reta e em oito, ou figuras ao menos periódicas, como na borboleta e no yin-yang, entretanto, como vimos, todas estas soluções são instáveis. Isto está intrínseco na complexidade causada pelo acoplamento das equações de movimento, o que faz que mudanças em um dos termos se propague automaticamente para os demais. Quando isto ocorre, vemos trajetórias periódicas que, visualmente, parecem regulares e estáveis, se desfazerem facilmente. É importante destacar, novamente, que nestes casos não é possível plotar nem o campo vetorial e nem o espaço de fase completo, o que deixaria mais clara a influência de perturbações, tanto nas posições quanto nas velocidades. Ainda assim, temos outras ferramentas, como os expoentes de

Lyapunov que foram utilizados, para termos informações qualitativas sobre o sistema.

Utilizar sistemas dinâmicos foi bastante útil para tratar do problema de três corpos. Este tipo de sistema é poderoso o bastante, por exemplo, para tratar das equações da cosmologia para a evolução do universo [12]. Este tema é, também, bastante interessante, porém bem mais complexo, mas, ainda assim, é um ótimo exemplo da utilidade dos sistemas dinâmicos para a solução e estudo de problemas em diversas áreas. No que se refere aos métodos numéricos empregados, os comandos, em geral, dependem de um intervalo de tempo, e de quantos passos temos neste intervalo. Por esse motivo, é possível obter mais precisão nos resultados controlando este tipo de informação. Vale destacar neste ponto o método para a obtenção dos expoentes de Lyapunov. Para este caso, damos um limite ao número de passos que o software deve utilizar em seus cálculos, mas, como vimos, o valor que obtemos tende ao valor real do expoente apenas se este número de passos tender ao infinito, o que não temos como fazer na prática. Ainda assim, podemos obter uma informação confiável sobre o sinal deles ao utilizar um número suficiente de passos, como fizemos, ou, alternativamente, aumentar este número até o valor obtido convergir para o valor real com um erro aceitável.

De modo geral, então, a revisão dos assuntos feita neste trabalho e a utilização dos sistemas dinâmicos, nos forneceu uma forma interessante de abordar o problema de três corpos, além de nos levar aos resultados esperados e destacar a utilidade e importância deste assuntos. Desta forma, apresentamos uma ferramenta matemática excelente, a qual pode ser utilizada para estudo de sistemas em diversas áreas e um problema que pode facilmente extrapolar sua formulação newtoniana inicial, se estendendo até mesmo à mecânica quântica e à relatividade geral.

Referências Bibliográficas

- [1] VALTONEN, Mauri; ANOSOVA, Joanna; KHOLSHEVNIKOV, Kostantin; MYLLÄRI, Aleksandr; ORLOV, Victor; TANIKAWA, Kiyotaka. **The Three-body Problem from Pythagoras to Hawking**. 1ª Edição. New York: Springer, 2016. 188 p.
- [2] GREINER, Walter. **Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics**. 2ª Edição. New York: Springer, 2010. 580 p.
- [3] VILLATE, Jaime A. **Introdução aos Sistemas Dinâmicos: Uma Abordagem Prática com Maxima**. Disponível em: http://www.villate.org/doc/sistemasdinamicos/sistdinam-1_2.pdf. Edição do Autor: Porto, 2007.
- [4] HIRSCH, Morris W.; SMALE, Stephen; DEVANEY, Robert L. **Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos**. 2ª Edição. San Diego: Academic Press. 2003. 425 p. (Pure and Applied Mathematics, v. 60).
- [5] VALTONEN, Mauri; KARTTUNEN, Hannu. **The Three-Body Problem**. New York: Cambridge University Press, 2006. 356 p.
- [6] MOULTON, Forest Ray. **An Introduction to Celestial Mechanics**. 2ª Edição Revisada. New York: The MacMillan Company, 1914. 478 p.
- [7] MARCHAL, Christian. **The Three-Body Problem**. New York: Elsevier Science Ltd., 1990. 592 p (Studies in Astronautics, v. 4).
- [8] SANDRI, Marco. **Numerical Calculations of Lyapunov Exponents**. *The Mathematica Journal*, v. 6, n. 3, p. 78-84, 1996.
- [9] PARKER, Thomas S.; CHUA, Leon O. **Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems**. New York: Springer-Verlag, 1989. 348 p.
- [10] Maplesoft. *Applications by Dr. Yasuyuki Nakamura*. Disponível em: <http://www.maplesoft.com/applications/Author.aspx?mid=927>. Acesso em: 01 mai. 2017.

-
- [11] ŠUVAKOV, Milovan; DIMITRAŠINOVIĆ, Veljko. **Three Classes of Newtonian Three-Body Planar Periodic Orbits**. *Physical Review Letters*, v. 110, n.114301, p. 1-4, mar. 2013.
- [12] BÖHMER, Christian G.; CHAN, Nyein. Dynamical Systems in Cosmology. In: BULLET, Shaun; FEARN, Tom; SMITH, Frank (Eds.). **Dynamical and Complex Systems**. Londres: World Scientific Ltd, 2017. p. 121-156.



Comandos do Maple e Mathematica

Neste tópico serão mostrados os comandos dos softwares utilizados ao longo do trabalho de conclusão de curso. A intenção de disponibilizar os comandos é facilitar os trabalhos futuros que necessitem dessas ferramentas. Neste trabalho foram utilizados dois tipos de softwares, o Maple e o mathematica, a princípio serão tratados os comandos das figuras do Maple.

A.1 A.1 Comandos - Maple

A utilização de imagens em qualquer trabalho acadêmico é inevitável, no entanto, nem sempre encontramos a imagem desejada. Os softwares de simulação gráfica podem auxiliar e para utilizá-los é necessário saber como funcionam alguns comandos. No capítulo 2 foi utilizado o Maple para plotar os retratos de fase vistos na seção 2.4 de estabilidade linear em duas dimensões e na seção 2.6 de bifurcações. O primeiro passo é definir as equações de movimento e utilizar o comando "DEplot" para especificar as condições iniciais, os tipos de soluções, o tamanho de das setas etc. Assim, serão agrupados vários comandos através do comando "display". A seguir é mostrado os

comandos do primeiro retrato de fase da figura 2.1 do capítulo 2

$$deS := diff(x(t), t) = -x(t) + y(t)$$

$$deI := diff(y(t), t) = (1/2) * x(t) - y(t)$$

```
p1 := DEtools[DEplot]([deS, deI], [x(t), y(t)], t = 0..40, x = -5..5, y = -5..5, [[x(0) = 0, y(0) = 5], [x(0) = 0.1e - 3, y(0) = -5], [x(0) = -0.1e - 4, y(0) = -5], [x(0) = 0.1e - 4, y(0) = 5], [x(0) = -5, y(0) = 0.1e - 4], [x(0) = 5, y(0) = 0.1e - 4]], arrows = medium, color = gray, numpoints = 1000, linecolor = black,
arrowsize = magnitude, thickness = 1, axesfont = [title, "ROMAN", 26], labels = [],
eixos := plots[textplot]([[-.3 * (5/3), 3.15 * (5/3), "y"], [3.15 * (5/3), -.3 * (5/3), "x"]], font = [title, "ROMAN", 26], 'align' = 'above', 'right')
setax := plots[arrow](' < , > '(0, 3.25 * (5/3)), shape = arrow, color = black, width = [0.7e - 1 * (5/3)],
headlength = [.13 * (5/3)])
setay := plots[arrow](' < , > '(3.25 * (5/3), 0), shape = arrow, color = black, width = [0.7e - 1 * (5/3)],
headlength = [.13 * (5/3)])
plots[display](p1, eixos, setay, setax, size = [1050, 1050])
```

(A.1)

Como pode ser observado na imagem 2.1 da seção de estabilidade linear em duas dimensões, temos outros retratos de fase e para todos eles foram utilizados os mesmos comandos. No trabalho foram utilizados dois pacotes o “*DEtools*” e “*plots*” onde pode ser observado no comando acima que utilizamos “*DEtools[DEplot]*”, “*plots[display]*”, “*plots[textplot]*” e “*plots[arrow]*”, cada comando exerce uma função as quais serão explicadas em seguida.

1. “DEplot”

Este comando é utilizado quando se deseja plotar o retrato de fase do sistema. O retrato de fase é construído de acordo com o sistema de equações diferenciais usado. Observando os comandos percebemos os comandos devem estar entre parênteses e os termos individuais estão separados por vírgulas como é caso das equações das variáveis “[*deS, deI*]”, das variáveis “[*x(t), y(t)*]” e os outros termos encontrados separados por vírgulas. É importante ressaltar que, neste comando os parâmetros devem estar de forma explícita, no modo $x(t)$.

É importante identificar as equações utilizadas por nomes diferentes. Para isso, escreve-se o nome escolhido e depois coloque o símbolo $:=$. Esta identificação de equações é feita para facilitar o uso do comando “display”. Os nomes das equações para este caso são “*deS*” e

deI” e estão no primeiro colchete do comando *DEplot*”. Em seguida colocamos as variáveis com a dependência do parâmetro, o qual deve ser identificado em seguida, por exemplo, $[x(t), y(t), t = 0..40,]$. Logo após temos $x = -5..5, y = -5..5$, esse comando corresponde a delimitação do espaço de fase através da limitação dos eixos x e y . Dessa maneira, é plotado o campo vetorial do sistema de equações diferenciais escolhido. Na sequência colocamos as condições iniciais entre parênteses, como nos outros comandos, para a plotar as soluções que irão parecer no retrato de fase. Com todos os comandos citados no texto temos uma imagem com várias informações contidas.

Na imagem obtida podemos utilizar dois métodos para personalizá-la. O primeiro é utilizar as opções do comando e o segundo é plotar outras figuras para depois unir todas elas com a imagem original usando o comando *display*”. Nos comandos do programa existem outros termos do *DEplot*”. Entre esses termos existe o *arrow*” que apresenta a função de definir os tamanhos das setas do campo vetorial, *color*” para definir a cor do campo vetorial. *mumpoints*” para limitar a quantidade de pontos a serem plotados, *linecolor*” que dá a cor das soluções, *arrowsize*” que identifica a intensidade do campo vetorial através do tamanho das setas, *thickness*” que define a espessura das linhas das soluções, *axesfont*” que serve para escolher a fonte dos números e rótulos dos eixos e por fim, o *labels*” que identifica o rótulo dos eixos e foi deixado em branco para controlarmos melhor esta informação, como veremos

2. *textplot*” e *arrow*”

Para melhorar a visualização da figura podemos rotular as figuras utilizamos os comandos *texplot*” e *arrow*” para a orientação das setas. O primeiro comando é usado na forma *plots[textplot]([posiovertical], “texto”, opes)*. Assim, podemos colocar letras em parte do plano por meio da opção *font*” para a escolha do tipo e o tamanho da fonte e o comando *align*” para alinhar as palavras em uma caixa de texto, caso sejam muitas. O segundo comando foi usado na forma *plot[arrow](‘ <, >’(coordenada 1 do ponto de origem, coordenada 2 do ponto de origem), ‘ <, >’(coordenada 1 do ponto final, coordenada 2 do ponto final), opções)*. O termo *‘ <, >’*, é usado para representar vetores, por exemplo, *‘ <, >’ (x, y)*” é uma representação de um vetor com coordenadas x e y . Neste comando foi utilizado apenas um dos pontos para plotar uma seta da origem até o ponto final. Com as coordenadas utilizadas, estas setas foram úteis para colocar a seta de orientação dos dois eixos x e y nas figuras, depois

de ajustá-las com as opções “*shape*” para escolher o formato desejado das setas, “*color*” para definir as cores das setas e “*width*” e “*headlength*” onde o primeiro é para definir a largura e o segundo é para o comprimento da ponta.

3. “display”

Este serve para combinar várias imagens em apenas uma sendo imprescindível para complementar a imagem principal. Como cada comando tem seus respectivos nomes, colocamos eles no comando “*plots[display](nomedafigura1, ..., nomedafigura_n, opes)*”. Como as imagens serão plotadas em própria proporção, as imagens menores podem apresentar pouco visibilidade, para este caso. Para resolver este problema será usado o comando “*size*” para definição das imagens em pixels e para padronizar o tamanho das figuras.

A.2 Comandos - wxMaxima

Este programa pode ser utilizado no estudo em sistema com duas dimensões. Com ele podem ser feitos cálculos e plotagem de gráficos. Neste trabalho o software foi utilizado para fazer os cálculos da matriz Jacobiana na seção 2.6 de bifurcações. A seguir são mostrados os comandos usados

$$\begin{aligned} A &: matrix([2x, 0], [0, -1]); \\ eigenvectors(A); \end{aligned} \tag{A.2}$$

e calculamos a matriz jacobiana nos quatro pontos do sistema 2.41, seus traços e determinantes com:

$$\begin{aligned} l &: [2 - x^2, -y]; \\ fixos &: ev(solve(l), numer); \\ v &: [x, y]; \\ h[i, j] &:= diff(f[i], v[j]); \\ jacobiana &: genmatrix(h, 2, 2); \\ jacobiana1 &: jacobiana, fixos[1]; \\ determinant &(jacobiana1); \\ jacobiana1[1, 1] &+ jacobiana1[2, 2]; \end{aligned} \tag{A.3}$$

Cada comando tem uma função importante no programa, estes serão explicadas como segue

1. “matrix” e “eigenvectors”

Estes comandos indicam que a saída do comando está sendo identificada por algum nome, neste caso o código dado é a letra "A". O comando `matrix` é utilizado na programação do software na forma: `matrix([2x,0],[0,-1])`, onde o termo $2x$ é o elemento da primeira linha e primeira coluna, o 0 é o elemento da segunda linha e primeira coluna, o 0 é o elemento da segunda linha e o -1 , do segundo parênteses é o elemento da primeira coluna. Tendo uma matriz podemos usar o comando `eigenvalues` que serve para calcular os autovetores e autovalores da matriz Jacobiana.

2. "ev" e "solve"

Na parte do cálculo dos determinantes, nos comandos acima, foi feita uma lista com duas equações como "l". Para efetuar o cálculo das equações que estão em "l" usamos o comando `fixos` para encontrarmos os pontos fixos deste sistema. Para obter o valor numérico da expressão utilizamos o comando `ev`, colocando "number" na parte opção. Para a expressão usou-se o comando `solve` na resolução das equações. Caso seja de interesse encontrar calcular cada ponto fixo utiliza-se o comando `fixos[1]` para o primeiro ponto, `fixos[2]` para o segundo ponto e assim sucessivamente.

3. "diff", "genmatrix" e "determinant"

Após os procedimentos anteriores, temos que encontrar a matriz Jacobiana. Para isso, utilizamos definimos uma nova lista `v:[x,y]`. Com cada elemento da lista obedece a equação, X , podemos definir o termo `h[i,j]:=diff(f[i],v[j])`. O comando `diff` fornece o resultado da derivada de uma função por uma dada variável. Como cada termo da lista tem um índice, podemos usá-lo para escolher um termo da matriz individualmente. Assim, podemos utilizar o comando `genmatrix` que foi rotulado como jacobiana para construir a matriz Jacobiana. Isto pode ser observado nos comandos na forma: `jacobiana: genmatrix(h,2,2)`. Caso seja de interesse encontrar a matriz Jacobiana com os valores dos pontos fixos no lugar de suas variáveis usa-se `jacobiana, fixos[1]`. Por fim, temos o comando `determinant` para calcular o determinante da matriz.

A.3 Comandos - Mathematica

O software mathematica pode ser usado para plotar gráficos e efetuar cálculos numéricos. Neste trabalho este software foi usado para plotar o retrato de fase do atrator de Lorenz no capítulo 3,

seção 3.1 e para calcular o expoente de Lyapunov para o atrator de Lorenz, os comandos de ambos seguem respectivamente.

```
a = 10; b = 8/3; r = 28;
x = 1; y = 1; z = 1; points = {{1, 1, 1}};
i := AppendTo[ points, {x = N[x + (a*y - a*x)/100], y = N[y + (-x*z + r*x - y)/100], z = N[z + (x*y -
Do[i, {3000}]
ListPointPlot3D[points, PlotStyle -> {Red, PointSize[Tiny]]]
```

(A.4)

Analisando os comandos acima podemos perceber que não foram precisos vários comandos. Na primeira linha temos os valores dos parâmetros do sistema com seus respectivos valores, na segunda linha temos a delimitação dos eixos x, y e z e a quantidade de pontos em cada direção, na terceira linha foi dada uma identificação para a função, neste caso “i”. No comando “AppendTo” criar uma lista de pontos que serão usados para plotar o atrator de Lorenz. Na quarta linha temos o comando para o número de passos e na última temos o comando para plotar os pontos desejados no retrato de fase.

O próximo comando é do expoente de Lyapunov do atrator de Lorenz,

```
<< LCE'F[{x_, y_, z_}] := {10*(y - x), x*(28 - z) - y, x*y - 8/3*z}
LCEsC[F, {1, 1, 1}, 0.1, 800, 20, 0.02]
LCEsC[F, {1, 1, 1}, 0.1, 800, 20, 0.02, LCEsPlot -> True]
```

(A.5)

Para este caso temos um item ainda não mencionado, o “« LCE” que é um pacote que ativa o comando “LCEsC” que foi utilizado para encontrar os expoentes de Lyapunov das seções 3.2 e 3.4.