



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

LUIZ GULHERME CARNEVALI DE ARAUJO JUNIOR

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA CINEMÁTICA COM
APLICAÇÕES DO SOFTWARE MAPLE

Belém
2023

LUIZ GUILHERME CARNEVALI DE ARAUJO JUNIOR

**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA
CINEMÁTICA COM APLICAÇÕES DO SOFTWARE
MAPLE**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador Prof. Dr. Juaci Picanço da Silva.

Belém
2023

LUIZ GUILHERME CARNEVALI DE ARAUJO JUNIOR

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA
CINEMÁTICA COM APLICAÇÕES NO SOFTWARE
MAPLE

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à
Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências
Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará
como requisito básico para a obtenção do título de
Licenciado em Matemática.

Data da Apresentação: 11/12/2023

Juaci Picango da Silva

Prof. Dr. Juaci Picango da Silva.
Faculdade de Matemática, UFPA - Orientador.

Irene Castro Pereira

Prof. Dra. Irene Castro Pereira.
Faculdade de Matemática, UFPA - Membro.

Valter Borges

Prof. Dr. Valter Borges Sampaio Junior.
Faculdade de Matemática, UFPA - Membro.

Dedico este trabalho à minha mãe, meus familiares, minha noiva e amigos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus que me conduziu e permitiu que eu chegasse até aqui.

Aos meus pais, Valdilene Ribeiro de Amorim e Luiz Guilherme Carnevali de Araujo, que sonharam junto comigo e estiveram ao meu lado todos os dias.

Aos meus irmãos, Ícaro Amorim Carnevali de Araujo e Lucas Amorim Carnevali de Araujo que são meus companheiros para tudo e me apoiaram com palavras de incentivo.

A minha noiva, Jayanne Marques Bitencourt que está comigo desde antes de começar a faculdade e esteve presente em todos os momentos.

Aos amigos que fiz durante o curso Alisson Thiago, Augusto Cezar, Wallace Coelho e Felipe Quaresma, com os quais destinamos muitos momentos de aprendizados e lutas e sempre estiveram comigo como verdadeiros co orientadores, mas especialmente ao Williams da Silva que foi minha dupla desde o começo, sendo a primeira pessoa que eu me comuniquei e fiz amizade e seguiu sendo um amigo e posso dizer até como um orientador, me auxiliando nas disciplinas e em tudo que fizemos juntos.

A professora Amanda Sena a qual foi minha primeira orientadora e coordenadora da monitoria que fiz parte durante o curso.

Ao prezado e querido orientador Professor Juaci Picanço, pela compreensão, amizade e trabalho feito arduamente.

Filipenses 4:11–13

Sei estar abatido, e sei também ter abundância; em toda maneira, e em todas as coisas estou instruído, tanto a ter fartura como a ter fome, tanto a ter abundância como a padecer necessidade. Posso todas as coisas em Cristo que me fortalece.

RESUMO

No presente trabalho é descrito o estudo do cálculo diferencial e integral, tal como é visto nas disciplinas do curso de licenciatura em matemática. Os conceitos, definições, teoremas e exemplos são apresentados de forma gradual de modo que o leitor possa compreender da melhor maneira possível. Todavia, no decorrer dos capítulos é exposto um pouco mais dos conhecimentos de cinemática e como o cálculo diferencial e integral pode ser aplicado nesse assunto.

Neste TCC também será abordado o conhecimento do software Maple, que é uma ferramenta útil para cálculos matemáticos, gráficos e muito mais, porém, nesse momento o principal foco são os gráficos que o software nos possibilita construir. É de conhecimento geral que o ensino da cinemática muitas vezes é complicado por ter uma linguagem técnica em um assunto muito prático.

PALAVRAS-CHAVE: Cálculo diferencial e integral, Maple, cinemática, velocidade, aceleração.

ABSTRACT

This work describes the study of differential and integral design, as seen in the subjects of the mathematics degree course. The concepts, definitions, theorems and examples are presented gradually so that the reader can understand them in the best possible way. However, throughout the chapters, a little more knowledge of kinematics is exposed and how differential and integral design can be applied to this subject.

This TCC will also cover knowledge of the Maple software, which is a very useful tool for mathematical calculations, graphics and much more, however, at this moment the main focus is the graphics that the software allows us to build. It is common knowledge that the teaching of kinematics is often complicated by having technical language in a very practical subject.

KEYWORDS: Differential and integral calculus, Maple, kinematics, speed, acceleration.

Índice

Introdução	1
1 Derivada e Integral	2
1.1 Derivada	2
1.1.1 Taxa de variação	6
1.1.2 Diferenciabilidade	6
1.1.3 Notações de derivadas	9
1.1.4 Técnicas de diferenciação	9
1.1.5 Derivadas de ordens superiores	13
1.1.6 Derivada de funções trigonométricas	14
1.1.7 Regra da cadeia	15
1.2 Integral	17
1.2.1 Integral indefinida	17
1.2.2 Propriedades	17
1.2.3 Partição de um intervalo	18
1.2.4 Soma de Riemann	18
1.2.5 Integral de Riemann	20
1.2.6 Teorema fundamental do cálculo	21
2 O Cálculo diferencial e Integral na Cinemática	24
2.1 Cinemática da partícula	24
2.1.1 Posição de uma partícula	24

2.1.2	Velocidade da partícula	25
2.1.3	Aceleração da partícula	26
2.2	Movimento Retilíneo no Cálculo Diferencial	27
3	Aplicações no software Maple	30
3.1	Aplicações	31

Lista de Figuras

1.1	Gráfico da função $f(x) = \frac{3}{x}$.	4
3.1	Posição da partícula em $t = 0s$	31
3.2	Posição da partícula em $t = 5s$	32
3.3	Posição na qual a partícula "para".	33
3.4	Posição da partícula em $t = 1s$	34
3.5	Posição da partícula em $t = 3s$	35
3.6	Posição da partícula em $t = 5s$	36
3.7	Posição da partícula em $t = 6s$	36
3.8	Posição do carro em $t = 1$	38
3.9	Posição do carro em $t = 4s$	38
3.10	Posição do carro em $t = 9s$	39
3.11	Posição do carro em $t = 12s$	39
3.12	Gráfico exemplo 3.4	40
3.13	Posição da partícula em $t = 1,5s$	42
3.14	Posição da partícula em $t = 4s$	43
3.15	Posição da partícula em $t = 0s$	44
3.16	Posição da partícula em $t = 5s$	44
3.17	Posição da partícula em $t = 0s$	46
3.18	Posição da partícula em $t = 5s$	46
3.19	Posição da partícula em $t = 5s$	47
3.20	Posição da partícula em $t = 5s$	48

3.21	Posição das partículas em $t = 3s$	49
3.22	Posição das partículas em $t = 3s$	50
3.23	Posição das partículas em $t = 3s$	51
3.24	Posição das partículas em $t = 3s$	52

Introdução

Neste trabalho apresentamos a aplicação do cálculo diferencial e integral à cinemática junto com o uso do software Maple para a visualização dos movimentos estudados.

Antes de apresentar o uso do cálculo diferencial e integral à cinemática, que é uma das suas mais consagradas aplicações, pretendemos desenvolver um estudo dos conceitos e resultados básico dessa área do conhecimento. Assim, veremos as definições, teoremas e exemplos a respeito de derivada e integral.

Queremos apresentar a cinemática como é ensinada no ensino médio, Enem e concursos e também como podemos utilizar o cálculo diferencial e integral como ferramenta a fim de facilitar a compreensão do leitor e realizar soluções mais rápidas e eficazes.

O cálculo diferencial e integral é uma das mais poderosa ferramenta matemática da atualidade. Porém, para chegar a essa descoberta, a humanidade estuda o assunto há séculos, buscando respostas para problemas de áreas e tangentes, e atualmente, com a contribuição de diversos pensadores, percebe-se que a aplicação do cálculo é muito maior do que inicialmente imaginado. Arquimedes, Kepler e Fermat deram sua contribuição ao estudo, até que no século XVII, a criação do cálculo alimentou uma grande polêmica durante muitos anos entre Newton e Leibniz. Os estudos de Newton são anteriores aos de Leibniz, entretanto este foi quem primeiro publicou seus resultados. Atualmente, acredita-se que ambos desenvolveram suas pesquisas independentemente.

A derivada tem um importante papel na cinemática. Desde o seu surgimento até os dias atuais, a derivada ou cálculo diferencial é fundamental para o desenvolvimento da cinemática e de outras ciências.

A primitiva F de uma função f , também chamada de antiderivada, existe se a derivada de F for igual a f .

A cinemática é a área de estudos da Física na qual o movimento de um objeto é equacionado. Dessa forma, é possível prever a posição, a velocidade ou outros parâmetros do movimento de um móvel em instantes posteriores ao presente. É um objetivo deste trabalho desenvolver figuras e gráficos animados no software Maple, com o objetivo de visualizar o movimento de partículas, a fim de melhorar a compreensão dos alunos.

Capítulo 1

Derivada e Integral

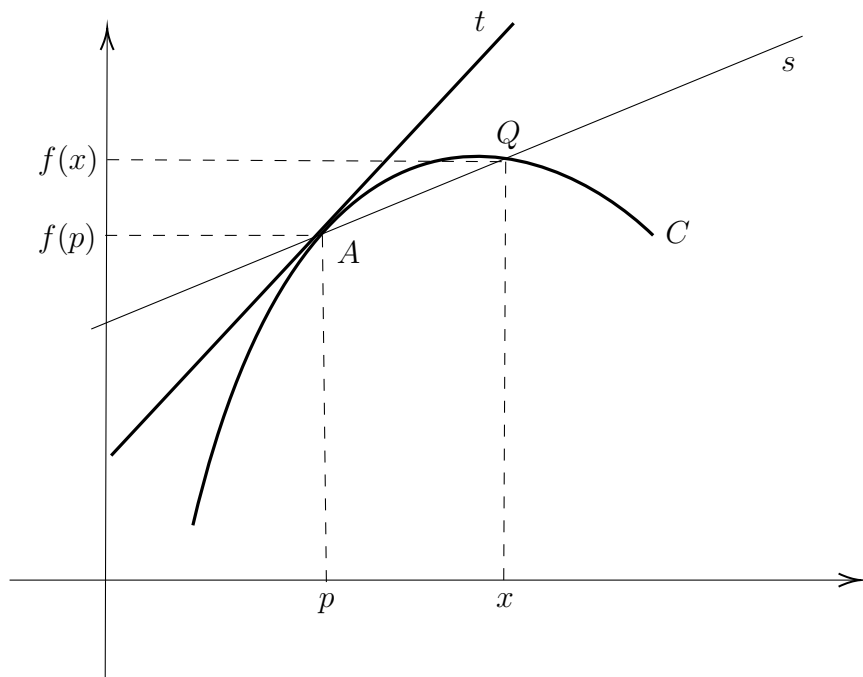
1.1 Derivada

A princípio analisaremos o conceito de reta tangente à uma curva que seja o gráfico de uma função uma função f . O problema de encontrar a reta tangente ao gráfico de uma função envolve o cálculo de um determinado tipo de limite. Este especial limite é chamado de *derivadas* da função f .

Mais especificamente, seja C a curva que coincide com o gráfico de uma função $y = f(x)$. Temos como objetivo encontrar a reta tangente à curva C em um ponto $A(p, f(p))$. Para isso, consideremos um ponto próximo $Q(x, f(x))$ em que $x \neq p$ e calculemos a inclinação (coeficiente angular)

$$m_s = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

da reta secante s , que passa pelos pontos A e Q . Em seguida, façamos o ponto Q se aproximar do ponto A ao longo da curva C fazendo x tender para p . Se m_s tender a um número m , então definimos a reta tangente t como sendo a reta que passa por A e tem inclinação m .



Portanto, a inclinação da reta tangente é definida através de um processo de limite de retas secantes. O valor desse limite, quando existe, será a inclinação da reta tangente.

Definição 1.1. A reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ em um ponto $A(p, f(p))$ é a reta que passa por A e tem coeficiente angular igual a

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p},$$

quando esse limite existe.

Fazendo a mudança de variável $h = x - p$ no limite da definição anterior, obtemos esta outra fórmula para o coeficiente angular da reta tangente.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

Exemplo 1.1. Vamos encontrar uma equação para a reta tangente à hipérbole $y = \frac{3}{x}$ no ponto $(3, 1)$. Neste caso, a curva considerada coincide com o gráfico da função $f(x) = \frac{3}{x}$. Assim, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x)$ no ponto $(3, 1)$ é

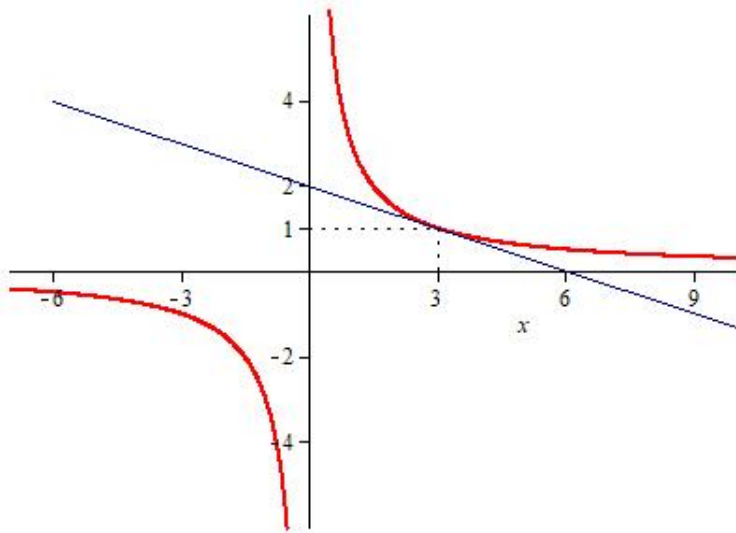
dado por

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{3+h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3+h}{h(3+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(3+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{3+h} \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Logo, uma equação da reta tangente no ponto $(3, 1)$ é $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 3)$, ou seja,

$$x + 3y = 6.$$

Figura 1.1: Gráfico da função $f(x) = \frac{3}{x}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No exemplo anterior, para o cálculo do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f dada, foi usado o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Tal limite aparece em estudos de outros ramos da ciência como física, engenharias e economia. Devido a sua importância daremos um nome especial a esse limite.

Definição 1.2. A derivada de uma função f em um número p do seu domínio, denotada $f'(p)$, é o limite

$$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

quanto tal limite existe.

A expressão $f'(p)$ é lida como "f linha de p". Tal como já foi observado anteriormente,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Assim, temos esta outra expressão para a derivada da função f no ponto p

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Mais adiante apresentaremos as fórmulas de derivada das funções elementares e as regras de derivação, o que nos permitirá calcular a derivada de muitas funções sem o uso direto do limite que a define. Mas, por enquanto, calcularemos a derivadas de uma dada função usando tal limite.

Exemplo 1.2. Vamos encontrar a derivada da função $f(x) = x^2 - 2x + 3$ em um número p . Por definição, temos

$$\begin{aligned} f'(p) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(p+h)^2 - 2(p+h) + 3] - (p^2 - 2p + 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p^2 + 2ph + h^2 - 2p - 2h + 3 - p^2 + 2p - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ph + h^2 - 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2p + h - 2) \\ &= 2p - 2. \end{aligned}$$

1.1.1 Taxa de variação

Suponha que y seja uma grandeza que depende de outra quantidade x . Logo y é uma função de x , então $y = f(x)$. Se x variar de x_1 a x_2 então essa variação de x será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em y será

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

Temos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Por conta disso teremos uma segunda interpretação da derivada $f'(p)$, na qual consideramos que há uma variação de p para x , tendo então $\Delta x = x - p$, a qual corresponde a uma variação de $f(x)$ para $f(p)$, de modo que $\Delta y = f(x) - f(p)$. Assim,

$$\begin{aligned} f'(p) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}, \end{aligned}$$

ou seja, a derivada $f'(p)$ é a taxa instantânea da variação de $y = f(x)$ em p .

1.1.2 Diferenciabilidade

Temos que a derivada de uma função f é definida nos pontos nos quais o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

existe. Tais pontos são chamados *pontos de diferenciabilidade* para f e os pontos nos quais esse limite não existe são chamados *pontos de não-diferenciabilidade* para f . Se x_0 é um ponto de diferenciabilidade de f , iremos dizer que f é *diferenciável* em x_0 ou que a derivada de f existe em x_0 . Agora, se x_0 é um ponto de não-diferenciabilidade de f , dizemos que a derivada de f não existe em x_0 . Se f é diferenciável em todo intervalo aberto $]a, b[$, então iremos dizer que f é *diferenciável* em $]a, b[$. Se f é diferenciável em todos os pontos do seu domínio, diremos, simplesmente, que f é *diferenciável*.

Geometricamente, os pontos de diferenciabilidade de f correspondem aqueles nos quais o gráfico da função $y = f(x)$ tem uma reta tangente. Já os pontos de não-diferenciabilidade correspondem aqueles nos quais o gráfico da função f , geometricamente, não tem reta tangente. De modo informal, os pontos de não-diferenciabilidade mais comuns são as abscissas de pontos do gráfico de f que apresentam bicos, pontos de tangência vertical e pontos de descontinuidade.

Definição 1.3. *Seja f uma função $f : Df \rightarrow \mathbb{R}$, Df o seu domínio e $p \in Df$. Dizemos que f é contínua em um ponto p se*

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$$

Gráfico que apresenta bico

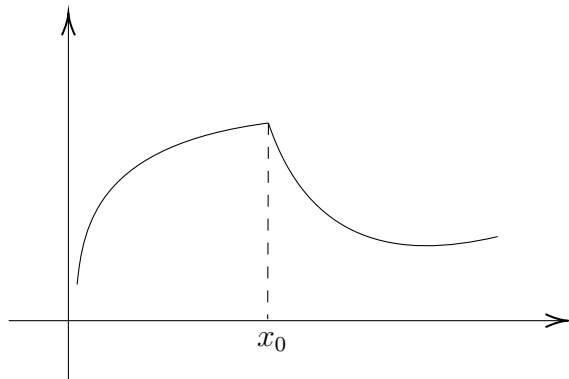


Gráfico com ponto de tangência vertical

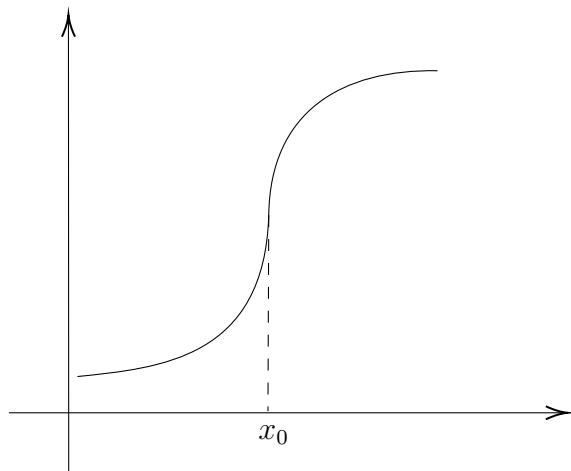
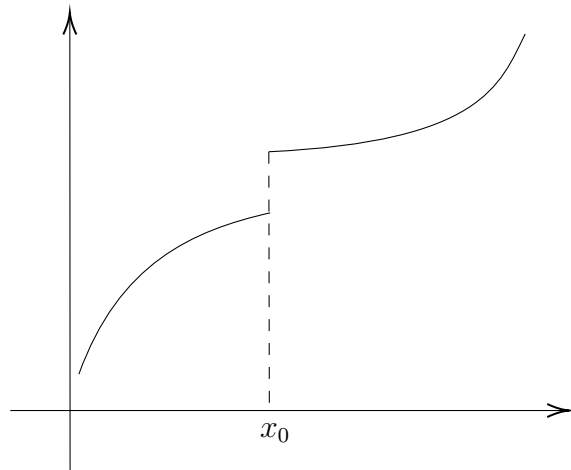


Gráfico com ponto de descontinuidade



Teorema 1.1. *Se uma função f é diferenciável em x_0 , então f é contínua em x_0 .*

Demonstração.

Suponhamos que f é diferenciável em x_0 , então $f'(x_0)$ existe e

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Para demonstrar tal teorema usaremos a definição 1.3. Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[(f(x) - f(x_0)) \frac{x - x_0}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0) + f(x_0)] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \\ &= 0 + f(x_0) \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$

□

1.1.3 Notações de derivadas

O processo de encontrar a derivada de uma função é chamado de diferenciação da função. Podemos pensar nesse processo como uma operação sobre funções que associa a função f' a função f . Quando a variável é denotada por x , a operação de diferenciação é frequentemente denotada por

$$\frac{d}{dx}[f(x)].$$

e lemos como "derivada de $f(x)$ em relação a x " ou por $f'(x)$.

Existem outras notações tal como esta $D_x[f(x)] = f'(x)$, porém não é muito usual. Em problemas nos quais o nome da variável independente é claro a partir do contexto, existe algumas notações possíveis para derivada, por exemplo se $y = f(x)$, está claro que a variável independente é x , então a derivada com relação à x pode ser denotada por y' ou f' .

Há uma notação no qual usamos Δ_x em vez de h para quantidade variante. Neste caso, temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta_x) - f(x)}{\Delta_x}.$$

A notação $\frac{df}{dx}$ é conhecida como notação de Leibniz.

1.1.4 Técnicas de diferenciação

Anteriormente definimos a derivada de uma função f como limite e usamos tal limite para o cálculo da derivada em casos simples. Nesse momento vamos desenvolver alguns resultados que nos possibilitarão calcular derivadas de forma mais eficiente.

Proposição 1.1. *A derivada de uma função constante é zero, ou seja, se c for um número real qualquer, então*

$$\frac{d}{dx}[c] = 0.$$

Demonstração.

Seja $f(x) = c$. Então, a partir da definição de derivada,

$$\frac{d}{dx}[c] = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

□

Exemplo 1.3. Se $f(x) = 5$ para todo x , então $f'(x) = 0$ para todo x , ou seja

$$\frac{d}{dx}[5] = 0.$$

Sabemos que o gráfico de uma função constante $f(x) = c$ é a reta horizontal $y = c$. Logo, a reta tangente neste gráfico tem a inclinação 0 em todo ponto x . Portanto, é esperado que a derivada de uma constante seja 0 para todo x .

Proposição 1.2. *Se n for um número inteiro positivo, então*

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}.$$

Demonstração.

Seja $f(x) = x^n$. Logo, segundo a definição de derivada e do teorema do binômio para a expansão de expressões do tipo $(x + h)^n$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^n] = f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n+1)x^{n-2}}{2!}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1} + \frac{n(n+1)x^{n-2}}{2!}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [nx^{n-1} + \frac{n(n+1)x^{n-2}}{2!}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}] \\ &= nx^{n-1} + 0 + \dots + 0 + 0 \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Com isso, para diferenciar x elevado a uma potência inteira n , multiplicamos por n , por x elevado a potência menos um. \square

Exemplo 1.4. $\frac{d}{dx}[x^5] = 5x^{5-1} = 5x^4$.

Proposição 1.3. *Se f for diferenciável em x e c for um número real qualquer, então cf também é diferenciável em x e temos,*

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c \frac{d}{dx}[f(x)].$$

Demonstração.

Derivando a função $cf(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[cf(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} c \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= c \frac{d}{dx}[f(x)]. \end{aligned}$$

Logo, $(cf)' = cf'$. □

Exemplo 1.5.

$$\frac{d}{dx}[4x^8] = 4 \frac{d}{dx}[x^8] = 4[8x^7] = 32x^7.$$

Proposição 1.4. *Se f e g forem diferenciáveis em x , então $f + g$ também será e*

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)].$$

Demonstração.

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]. \end{aligned}$$

□

Proposição 1.5. *Se f e g forem diferenciáveis em x , então $f - g$ também será e*

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)].$$

Demonstração.

Aplicando a definição de derivada, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] - [g(x+h) - g(x)]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)].
 \end{aligned}$$

□

Proposição 1.6. *Se f e g forem diferenciáveis em x , então o produto fg também será e*

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \frac{d}{dx}[g(x)] + g(x) \frac{d}{dx}[f(x)].$$

Demonstração.

Aplicando a definição de derivada, obtemos

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}.$$

As demonstrações iniciais são aplicações diretas da definição de derivada, entretanto nesta demonstração vamos somar e subtrair $f(x+h)g(x)$ ao numerador da definição. Assim temos

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x+h) \cdot \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] + g(x) \cdot \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \left[\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \right] \frac{d}{dx}[g(x)] + \left[\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \right] \frac{d}{dx}[f(x)] \\
 &= f(x) \frac{d}{dx}[g(x)] + g(x) \frac{d}{dx}[f(x)].
 \end{aligned}$$

□

Proposição 1.7. *Se f e g forem diferenciáveis em x e $g'(x) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é diferenciável em x e*

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) \frac{d}{dx}[f(x)] - f(x) \frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}.$$

Demonstração.

Derivando a função $\frac{f(x)}{g(x)}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)}. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo ao numerador o termo $f(x) \cdot g(x)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{g(x) \cdot (f(x+h) - f(x))}{h} \right] - \left[\frac{f(x) \cdot (g(x+h) - g(x))}{h} \right]}{g(x) \cdot g(x+h)} \\ &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)} \\ &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \frac{d}{dx}[f(x)] - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{d}{dx}[g(x)]}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)} \\ &= \frac{g(x) \cdot \frac{d}{dx}[f(x)] - f(x) \frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}. \end{aligned}$$

□

1.1.5 Derivadas de ordens superiores

Se uma função $y = f(x)$ é derivável em todos os pontos do seu domínio Df , então está bem definida a função $y = f'(x)$, que associa a cada x de Df a derivada de f em x . Se essa nova função for derivável, temos a função $y = f''(x)$ que, a cada x , associa a derivada da função f' , e assim podemos prosseguir.

Definição 1.4. Dizemos que a função é duas vezes diferenciável se sua derivada é também uma função diferenciável. Isso significa, que existem os seguintes limites

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

e

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

De modo análogo definimos a função que é três (ou mais) vezes diferenciável.

Exemplo 1.6. Calcule a derivada de ordem três da função $f(x) = x^3 + 3x$.

Solução: Temos pela técnica de derivação:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 + 3, \\f''(x) &= 6x, \\f'''(x) &= 6.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que a derivada de terceira ordem de f é igual a 6.

1.1.6 Derivada de funções trigonométricas

Nesta subseção vamos obter as derivadas das funções $y = \text{sen } x$, $y = \text{cos } x$, $y = \text{tg } x$, $y = \text{cotg } x$, $y = \text{sec } x$ e $y = \text{cosec } x$

Proposição 1.8. Se $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \text{cos } x$. Então,

- $f'(x) = \text{cos } x$.
- $g'(x) = -\text{sen } x$.

Demonstração.

Usando o fato de que $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$ e $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{cos } \theta - 1}{\theta} = 0$.

1)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x \cdot \text{cos } h + \text{cos } x \cdot \text{sen } h - \text{sen } x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\text{sen } x \left(\frac{\text{cos } h - 1}{h} \right) + \text{cos } x \left(\frac{\text{sen } h}{h} \right) \right] \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \text{sen } x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos } h - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \text{cos } x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h}\end{aligned}$$

Então, temos que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \text{sen } x \cdot 0 + \lim_{h \rightarrow 0} \text{cos } x \cdot 1.$$

Logo, $f'(x) = \cos x$.

2)

$$\begin{aligned}g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} h - \cos x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} h}{h} \right] \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}.\end{aligned}$$

Então, temos que

$$g'(x) \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot 0 - \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen} x \cdot 1.$$

Logo, $g'(x) = -\operatorname{sen} x$. □

Agora, usando a regra de derivação do quociente, obtemos $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$, $(\operatorname{cotg} x)' = \operatorname{cosec}^2 x$, $(\sec x)' = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$ e $(\operatorname{cosec} x)' = \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cosec} x$.

1.1.7 Regra da cadeia

O próximo teorema estabelece uma fórmula que permite o cálculo da derivada da função composta.

Teorema 1.2. *Sejam $y = h(u)$ e $u = g(x)$ duas funções deriváveis, com a imagem g contida no domínio de h , e consideremos a função composta $y = f(x) = h[g(x)]$. Então f é derivável e $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$, para todo $x \in D_g$.*

Na notação de Leibniz temos,

$$\frac{df}{dx} = \frac{dh}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Demonstração.

Demonstraremos o teorema apenas para o caso que existe um intervalo $(x - \delta, x + \delta)$ em torno do x tal que, $g(x) \neq g(y)$ para todo $y \in (x - \delta, x + \delta)$.

Seja $u = g(x)$, e $\Delta_u = g(x + \Delta_x) - g(x)$. Assim, $\Delta_u \neq 0$, desde que Δ_x esteja bem próximo de zero, mas diferente de zero. Além disso $\Delta_u \rightarrow 0$, quando $\Delta_x \rightarrow 0$.

Dessa forma, $g(x + \Delta_x) = g(x) + \Delta_u = u + \Delta_u$ e podemos escrever,

$$h(g(x)) = h(u),$$

e

$$h(g(x + \Delta_x)) = h(u + \Delta_u)$$

com isso,

$$\lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta_x} = \lim_{\delta_x \rightarrow 0} \frac{h(u + \Delta_u) - h(u)}{\Delta_x}.$$

Como $\Delta_u \neq 0$, para $\Delta_x \neq 0$, podemos escrever,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta_x} &= \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{h(u + \Delta_u) - h(u)}{\Delta_x} \\ &= \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{h(u + \Delta_u) - h(u)}{\Delta_u} \cdot \frac{\Delta_u}{\Delta_x} \\ &= \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{h(u + \Delta_u) - h(u)}{\Delta_x} \cdot \frac{g(x + \Delta_x) - g(x)}{\Delta_x} \\ &= h'(u) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

O que conclui a prova do teorema neste caso. □

Exemplo 1.7. Determine a derivada de $f(x) = \text{sen}(x^3 + 2x^2)$.

Solução: Considerando que $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = x^3 + 2x^2$, aplicando a regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sen}(x^3 + 2x^2) \\ f'(x) &= \cos(x^3 + 2x^2) \cdot (x^3 + 2x^2)' \\ &= \cos(x^3 + 2x^2) \cdot (3x^2 + 4x). \end{aligned}$$

□

1.2 Integral

No cálculo a integral de uma função foi criada originalmente para determinar a área sob uma curva no plano cartesiano e também surge naturalmente em dezenas de problemas da física, por exemplo, na determinação da posição em todos os instantes de um objeto, se for conhecida a sua velocidade instantânea. O processo de se calcular a integral de uma função é chamado de integração. A integral indefinida também é conhecida como antiderivada ou primitiva. Neste capítulo, iremos apresentar definições, propriedades, teoremas e exemplos com o objetivo de desenvolver esse assunto da melhor maneira possível para o aprendizado dos alunos.

1.2.1 Integral indefinida

Definição 1.5. Uma função F é chamada primitiva de f em um intervalo de $[a, b]$ se $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

Exemplo 1.8. $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$.

Neste exemplo, observamos que se adicionarmos uma constante a $F(x)$, esta nova função continuará sendo uma antiderivada de $f(x)$. Logo, temos uma infinidades de antiderivadas para $f(x)$, todas no formato de $F(x) + C$ em que C é uma constante arbitrária.

Usaremos o simbolo \int para denotar a operação de integral.

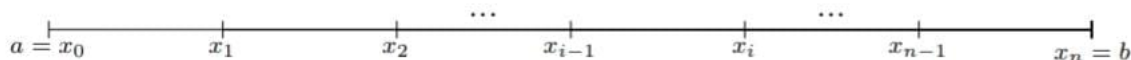
1.2.2 Propriedades

As propriedades para cálculo das integrais indefinidas são:

- $\int dx = x + C$;
- $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$ (a constante);
- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$).

1.2.3 Partição de um intervalo

A *partição de um intervalo* $[a, b]$ é um conjunto finito $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, no qual $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ e pode ser representado gráficamente da seguinte forma,



Sendo assim, temos que uma partição P divide o intervalo $[a, b]$ em n intervalos menores e que podem ser escritos de forma arbitrária como: $\{x_{i-1}, x_i\}$, no qual $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

A amplitude do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ será dada por $\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\Delta_{x_1} &= x_1 - x_0 \\ \Delta_{x_2} &= x_2 - x_1 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \Delta_{x_n} &= x_n - x_{n-1}.\end{aligned}$$

Essas amplitudes $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$ podem ou não ter valores iguais. Para maior amplitude damos o nome de *amplitude da partição* P em relação ao intervalo $[a, b]$ e será indicado por $m_x \Delta_{x_i}$. Indica-se uma partição $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de um intervalo $[a, b]$ por,

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

□

1.2.4 Soma de Riemann

Sejam uma função f definida em $[a, b]$ e uma partição,

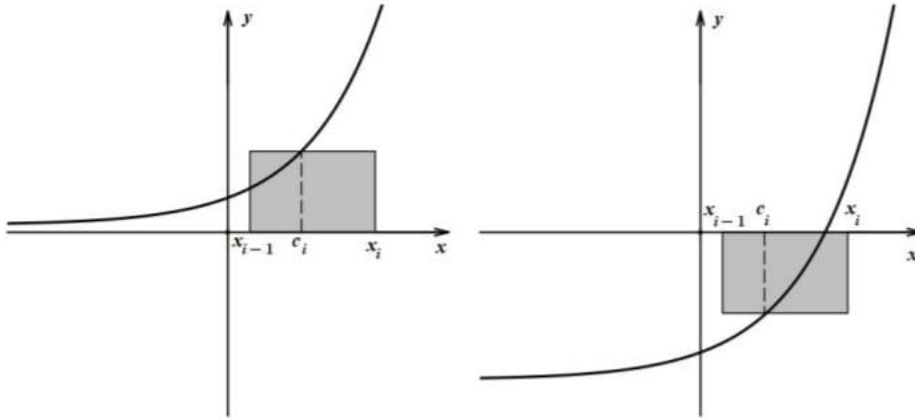
$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

do intervalo $[a, b]$. Seja um $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, no qual $i = 1, 2, \dots, n$ um elemento escolhido de forma arbitrária obtendo assim um novo conjunto $A = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ chamado de conjunto admissível à partição P . Teremos que o número

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n,$$

será chamado de soma de Riemann de f relativa a partição P e ao conjunto admissível A .

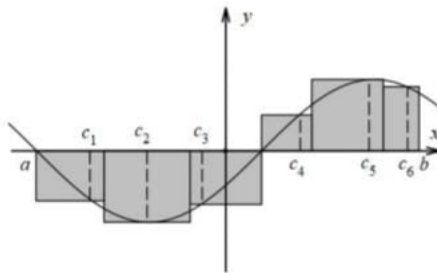
Quando $f(c_i) > 0$ podemos notar que $f(c_i)\Delta x$ será a área do retângulo R_i Determinado pelas retas $x = x_i, x = x_{i-1}, y = 0$ e $y = f(c_i)$. Quando $f(c_i) < 0$ a área de R_i será $-f(c_i)\Delta x$.



(a) área de $R_i = f(c_i)\Delta x_i$

(b) área de $R_i = -f(c_i)\Delta x_i$

Geometricamente interpretamos a soma de Riemann $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ como a diferença entre a soma das áreas dos retângulos R_i que estão acima do eixo x e a soma das áreas dos que estão abaixo do eixo x .



A figura acima representa a seguinte soma de Riemann,

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i.$$

Seja uma função F definida em $[a, b]$ e $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b$ uma partição de $[a, b]$. Ao efetuar o acréscimo $F(b) - F(a)$, iremos observar que ao passar de $x = a$ para $x = b$ iremos obter a soma dos acréscimos $F(x_i) - F(x_{i-1})$ com o $i = 1, 2, 3, 4$, sendo assim, $F(b) - F(a) = F(x_4) - F(x_0) = [F(x_4) - F(x_3)] + [F(x_3) - F(x_2)] + [F(x_2) - F(x_1)] + [F(x_1) - F(x_0)]$. Isto também pode ser escrito como,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^4 [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Se generalizarmos para uma partição $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, então

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Com base neste resultado teremos que, dadas F e f duas funções definidas em $[a, b]$, sendo F uma primitiva de f em $[a, b]$, ou seja, $F' = f$. E sendo uma partição $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$, podemos observar, como visto anteriormente, que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

Pelo teorema do valor médio existe um $\bar{c}_i \in [x_i, x_{i-1}]$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\bar{c}_i)(x_i - x_{i-1})$$

Sendo assim, como $F' = f$ e $\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$, então

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta_{x_i}.$$

Note que conforme Δ_{x_i} vai diminuindo, o $f(\bar{c}_i)$ vai começar a diferir pouco de um $f(c_i)$ onde $c_i \in [x_i, x_{i-1}]$ não foi escolhido conveniente. Ou seja, teremos

$$F(b) - F(a) \cong \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta_{x_i}.$$

1.2.5 Integral de Riemann

Seja uma função f definida em $[a, b]$ e $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta_{x_i}$$

tende a L , quando $mx\Delta_{x_i} \rightarrow 0$, e escrevemos

$$\lim_{\max \Delta_{x_i} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta_{x_i} = L$$

se para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ que só depende de ϵ , mas não da particular escolha dos c_i , tal que

$$\left[\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta_{x_i} - L \right] < \epsilon$$

para toda a partição P de $[a, b]$, com $mx\Delta_{x_i}$. Tal número L será denominado de integral de Riemann de f em $[a, b]$, com $msx\Delta_{x_i}$ e indica-se por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta_{x_i} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta_{x_i}.$$

Com isso, diremos que se $\int_a^b f(x)dx$ existe, então a f é integrável (segundo Riemann) em $[a, b]$ e também iremos nos referir à $\int_a^b f(x)dx$ como sendo a integral definida de f em $[a, b]$.

1.2.6 Teorema fundamental do cálculo

O próximo resultado estabelece uma relação entre a teoria da diferenciação de funções e a teoria de interpretação de funções, sendo um resultado central no cálculo. Por essa razão tal resultado é chamado de teorema fundamental do cálculo

Teorema 1.3. *Se f for integrável em $[a, b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a).$$

Demonstração.

Suponhamos que f é integrável em $[a, b]$ e que F seja uma primitiva em $[a, b]$, isto é, $F'(x) = f(x)$ em $[a, b]$. Seja $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$, uma partição qualquer de $[a, b]$, podemos escolher, pelo teorema do valor médio, c_i em $[x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F(c_i)\Delta_{x_i} \Rightarrow F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta_{x_i}.$$

Se, para cada partição P de $[a, b]$ escolhermos convenientemente os c_i , teremos

$$\lim_{\max \Delta_{x_i} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta_{x_i} = F(b) - F(a).$$

Portanto,

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a).$$

□

Exemplo 1.9. Calcule $\int_{-2}^1 (x^2 - 1)dx$.

Solução: Antes de calcular a integral definida iremos calcular a indefinida

$$\int (x^2 - 1)dx.$$

Usando,

$$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

teremos.

$$\int (x^2 - 1)dx = \int x^2 dx - \int 1dx.$$

Para $\int x^2 dx$ usaremos

$$\int x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k,$$

para $n \neq -1$. Com isso, temos.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + k,$$

para $-\int 1dx$,

$$\int a dx = ax + k,$$

sendo assim, temos

$$-\int 1dx = -x + k,$$

portanto,

$$\int (x^2 - 1)dx = \frac{x^3}{3} - x + k.$$

□

Para calcular a integral definida, usaremos o Teorema Fundamental do Cálculo se f for integrável em $[a, b]$, e se F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 (x^2 - 1)dx &= \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_{-2}^1 \\ &= \frac{1^3}{3} - 1 - \left(\frac{(-2)^3}{3} - (-2)\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

O Cálculo diferencial e Integral na Cinemática

Neste capítulo abordaremos os conceitos físico da cinemática, mas aplicando também os conhecimentos do cálculo diferencial e integral para construir um modelo matemático. A cinemática é a área da física que estuda o movimento dos corpos sem levar em conta a origem do movimento. Busca entender a velocidade e a aceleração utilizadas por eles durante seu deslocamento no espaço. Com expressões matemáticas é possível prever o posicionamento de um corpo no espaço após um determinado tempo de deslocamento.

2.1 Cinemática da partícula

2.1.1 Posição de uma partícula

Se um ponto ou partícula P se move ao longo de uma reta r , dizemos que seu movimento é *retilíneo*. Se r é uma reta ordenada com coordenada x e se a coordenada de P no instante t é $x = f(t)$, então x é chamada de *função posição* de P . Isto significa que a função f fornece, a cada instante, a posição ocupada pela partícula na reta.

O *deslocamento* de uma partícula é a variação de posição da partícula em movimento em determinado intervalo de tempo, ou seja, a distância percorrida com relação a um ponto fixo

$$\Delta_x = x - x_0,$$

onde x é a posição em t e x_0 a posição em t_0 .

Também escrevemos

$$\Delta_t = t - t_0.$$

No cálculo diferencial teremos que o deslocamento de uma partícula é

$$\Delta_x = f(t + \Delta_t) - f(t)$$

nos instantes t e $t + \Delta_t$.

2.1.2 Velocidade da partícula

Definimos *velocidade média* de uma partícula em um intervalo de tempo Δ_t como sendo a razão entre o deslocamento Δ_x nesse intervalo de tempo. Sendo assim, temos,

$$v_{media} = \frac{\Delta_x}{\Delta_t}.$$

A unidade da velocidade média no S.I. (Sistema internacional), é o metro/segundo, entretanto, muito se utiliza a unidade quilômetros/hora. Vale ressaltar que é importante observar a direção do movimento. Tendo como base o eixo das abscissas e $x = 0$, se a partícula se movimenta da esquerda para direita, o valor do x aumenta com o decorrer do tempo, então a velocidade média será positiva, caso contrário, será negativa.

Concluimos que a velocidade média da partícula é o coeficiente angular da reta que liga o ponto (x_1, t_1) e o ponto (x_2, t_2) em um gráfico da posição x em função do tempo t .

No cálculo diferencial teremos que a velocidade média da partícula nos instantes t e $t + \Delta_t$ é definida por

$$\frac{f(t + \Delta_t) - f(t)}{\Delta_t}.$$

A priori, podemos imaginar que não é possível calcular a velocidade de um objeto em um instante dado. Com os recursos que aprendemos nos capítulos anteriores é possível calcular a velocidade instantânea de uma partícula. Utilizando esse conhecimento, a *velocidade instantânea* pode ser calculada como,

$$v(t) = \lim_{\Delta_t \rightarrow 0} \frac{\Delta_x}{\Delta_t} = \frac{dx}{dt}.$$

De forma que $v(t)$ é numericamente igual ao coeficiente angular da reta tangente à curva $x(t)$ no ponto estudado.

Pela definição de derivada, temos

$$v(t) = \lim_{\Delta_t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta_t) - f(t)}{\Delta_t}.$$

□

Por conta disso, podemos obter a velocidade em qualquer instante no movimento retilíneo, sendo conhecida uma função que expresse a posição em função do tempo, apenas calculando a derivada da posição com relação ao tempo, como concluiremos no exemplo.

Exemplo 2.1. *A posição de uma pedra que cai do alto de um rochedo a partir do repouso é dada por $x = 10t^2$, em que x está em metros e t em segundos. O sentido positivo do eixo x é para baixo. Determine a velocidade instantânea em um instante qualquer.*

Solução: A partir da equação $x = 10t^2$ podemos calcular a velocidade instantânea considerando que a derivada da posição com relação ao tempo irá nos resultar numa função que mostrar a velocidade da partícula em um instante de tempo qualquer de forma que

$$\begin{aligned}x'(t) &= \frac{dx}{dt} \\x'(t) &= \frac{d}{dt}10t^2 \\v(t) &= 20t\end{aligned}$$

Concluimos que pode-se calcular a velocidade em qualquer instante apenas substituindo o valor do instante de tempo no qual se quer calcular a velocidade da partícula, na função $v(t)$. □

2.1.3 Aceleração da partícula

Esta seção é similar a anterior, no geral tratamos da velocidade. Note que quando a velocidade da partícula muda com o passar do tempo, diz-se que ela está acelerada. Definimos a *aceleração média* como a razão entre a variação da velocidade Δ_v e o intervalo do tempo Δ_t de forma que

$$a_{media} = \frac{\Delta_v}{\Delta_t}.$$

Sendo que a unidade de aceleração no S.I. é o m/s^2 , mas utiliza-se também a unidade km/h^2 .

É complicado somente com conhecimentos básicos determinar em um instante dado a aceleração. Dessa forma, os conhecimentos do Cálculo Diferencial são importantes para definirmos a *aceleração instantânea*, de forma que a aceleração no instante t é definida como a derivada em t da função $v = v(t)$, assim

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Pela definição derivada, temos

$$a(t) = \lim_{\Delta_t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta_t) - v(t)}{\Delta_t},$$

em que o quociente $\frac{v(t + \Delta_t) - v(t)}{\Delta_t}$ é a aceleração média entre os instantes t e $t + \Delta_t$.

2.2 Movimento Retilíneo no Cálculo Diferencial

De acordo com o que vimos anteriormente, a cinemática de uma partícula pode ser definida conforme algumas definições e conceitos.

Se temos a posição $x(t)$ a uma coordenada de um ponto P em uma reta l num instante t , temos que

- A velocidade de P é $v(t) = x'(t)$;
- O módulo da velocidade de P é $|v(t)|$;
- A aceleração de P é $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

Em outras palavras, a velocidade é a primeira derivada da posição e a aceleração é a primeira derivada da velocidade ou também a segunda derivada da posição.

No Brasil é comum observar questões em concursos e vestibulares que sempre abordam esse assunto, pois possui grande relação com o cotidiano dos alunos, sendo assim é aplicado de maneira recorrente.

O cálculo diferencial é uma ferramenta que ajuda a entender melhor o conteúdo e com certeza faria com que os alunos fossem capazes de resolver os problemas com mais facilidade e também resolver problemas complexos com mais rapidez.

O *movimento retilíneo uniformemente variado* se caracteriza por ter uma aceleração constante, com isso a velocidade varia linearmente de acordo com o tempo, ou seja,

$$v(t) = v_0 + at.$$

com $v_0 =$ velocidade inicial.

Se considerarmos que a partícula começa a se mover no instante $t_0 = 0$, com o movimento sendo começado em x_0 , ou seja, na posição inicial e que no instante t sua posição é x , então o deslocamento $\Delta_x = x - x_0$ da partícula, em um intervalo de tempo $\Delta_t = t - t_0 = t$, podemos expressar como

$$\Delta_x = v_{media}t.$$

Sabendo que a aceleração é constante, a velocidade média pode ser calculada através da média aritmética entre a velocidade inicial e final. Podemos calcular também o valor da velocidade média apenas somando a metade da variação da velocidade e assim temos que,

$$v_{media} = \frac{\Delta_x}{\Delta_t} = v_0 + \frac{1}{2}at.$$

sendo assim,

$$\begin{aligned}\Delta_x &= \left(v_0 + \frac{1}{2}at\right)t \\ x &= x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}.\end{aligned}$$

□

Essa equação determina a posição em função do tempo.

Existe outro resultado importante que é a *equação de Torricelli*. Essa equação é obtida substituindo na equação da posição $t = \frac{v - v_0}{a}$, obtemos assim

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2} \\ \Delta_x &= v_0t + \frac{at^2}{2} \\ &= v_0 \frac{(v - v_0)}{a} + a \frac{(v - v_0)^2}{2a^2} \\ &= \frac{2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2}{2a} \\ 2a\Delta_x &= 2v_0v - 2v_0^2 + v^2 - 2v_0v + v_0^2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta_x.\end{aligned}$$

□

Isto é na verdade o que é utilizado pelos professores de física do ensino médio, pois não envolve os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. É desta maneira que os estudantes aprendem as fórmulas com o conhecimento matemático ensinado até então.

Neste momento mostraremos que todos os resultados do movimento uniformemente variado podem ser demonstrado através da utilização do que estudamos do cálculo diferencial. Sabemos que a equação que determina a posição em função do tempo é dada por

$$x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}.$$

É de nosso conhecimento que a derivada da posição em função do tempo é igual a velocidade. Logo, temos

$$\begin{aligned}v &= \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left(x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}\right) \\ &= v_0 + at.\end{aligned}$$

Da mesma forma que a derivada da posição em função do tempo é a velocidade, a derivada da velocidade em função do tempo é igual à aceleração, obtemos que a aceleração é constante. Logo, podemos considerar v como função de x , pela regra da cadeia vamos ter que

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{dv}{dx} \cdot v. \end{aligned}$$

Temos um resultado importante $adx = vdv$, ele será importante para obter a equação de Torricelli com

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x adx &= \int_{v_0}^v vdv \\ a(x - x_0) &= \int_{v_0}^v vdv \\ &= \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \\ v^2 - v_0^2 &= 2a(x - x_0) \\ v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta_x. \end{aligned}$$

□

Dessa forma pode-se construir as equações do movimento uniformemente variado. Elas são utilizadas nos assuntos de queda livre, nos quais possui a aceleração com valor igual ao da gravidade e de lançamento oblíquo.

Capítulo 3

Aplicações no software Maple

Maple é um sistema algébrico computacional comercial de uso genérico. Desde 1988 o Maple tem sido desenvolvido e comercializado pela Maplesoft, uma companhia canadense baseada em Waterloo, Ontario. É comercializado como a ferramenta de produtividade essencial para cada profissional técnico. A versão atual é Maple 2023.

Esse software, que para muitos é desconhecido, mesmo tendo muitas ferramentas importantes para auxílio do aluno e também para professores, veio ao meu conhecimento através do professor e orientador Juaci Picanço que havia utilizado em aulas e com outros orientandos de TCC. Nesse sentido, o software se mostrou útil não somente no que era necessário para o trabalho, que são os gráficos e as animações, mas ele auxilia em vários tópicos como por exemplo resolver integrais.

No presente trabalho focaremos em realizar os gráficos das aplicações de cinemática, pois mostraremos que é possível construir animações que simulem uma partícula ou objeto se movendo em uma função do tempo. Isso provavelmente ajudaria alunos do ensino básico a entender de uma maneira visível o que realmente está ocorrendo com a partícula ou objeto determinado.

É de conhecimento de todos que a educação básica não está preparando o suficiente para o ensino superior ou até mesmo para o ENEM. Logo, é de suma importância que estratégias como a utilização do Maple seja discutida e orientada para que haja motivação dos alunos com soluções fora de definições e exemplos com pincéis e lousa, mas que o aluno possa visualizar e compreender de outras formas.

3.1 Aplicações

Faremos a seguir as aplicações com o cálculo diferencial e integral com exemplos, posteriormente colocando imagens dos gráficos do software Maple.

Exemplo 3.1. *O movimento de uma partícula é dado por $f(t) = 5 + 2t - 2t^2$, sendo f a posição e t o tempo. Determine:*

- a) *Posição inicial;*
- b) *Posição em $t = 5s$;*
- c) *Função de velocidade;*
- d) *Velocidade em $t = 5s$;*
- e) *Instante e a posição em que a partícula para;*
- d) *Aceleração do movimento;*

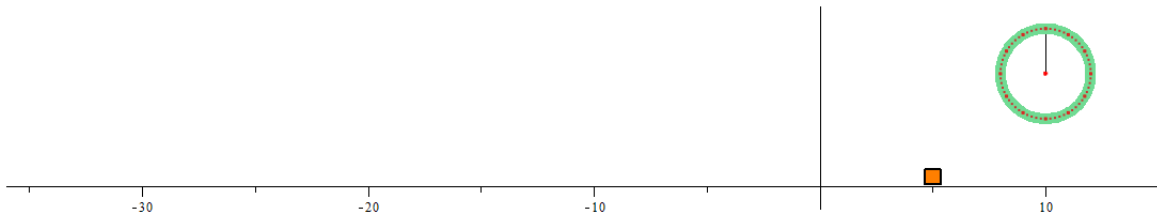
Solução:

- a) *Posição inicial $t = 0s$*

$$f(0) = 5 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2$$

$$f(0) = 5m.$$

Figura 3.1: Posição da partícula em $t = 0s$

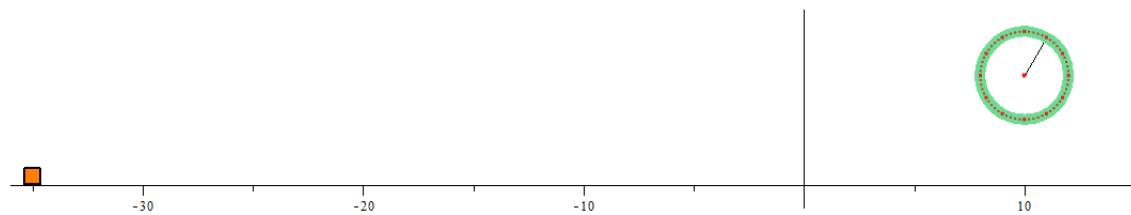


Fonte: Elaborada pelo autor.

b) posição $t = 5s$

$$\begin{aligned} f(5) &= 5 + 2 \cdot 5 - 2 \cdot 5^2 \\ &= 5 + 10 - 50 \\ &= -35m. \end{aligned}$$

Figura 3.2: Posição da partícula em $t = 5s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

c) Função velocidade é a primeira derivada da função espaço.

$$f'(t) = 2 - 4t.$$

d) Velocidade em $t = 5s$.

$$\begin{aligned} v &= 2 - 4 \cdot 5 \\ &= -18m/s. \end{aligned}$$

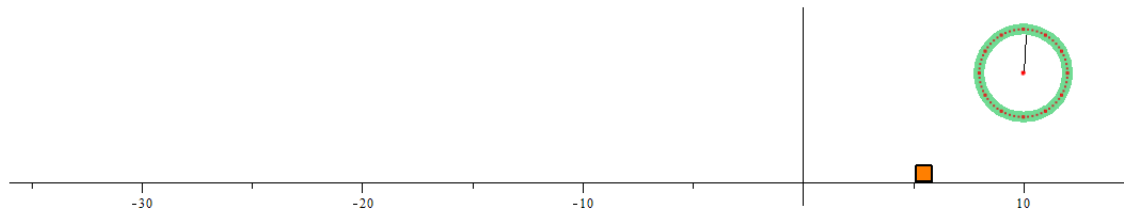
e) Instante e a posição em que a partícula para.

$$\begin{aligned} 0 &= 2 - 4t \\ t &= \frac{1}{2}s. \end{aligned}$$

Posição em que o corpo para.

$$\begin{aligned} f(0,5) &= 5 + 2 \cdot 0,5 - 2 \cdot (0,5)^2 \\ &= 5,5m. \end{aligned}$$

Figura 3.3: Posição na qual a partícula "para".



Fonte: Elaborada pelo autor.

f) *Aceleração do movimento é a segunda derivada da função espaço.*

$$\begin{aligned} f''(t) = v'(t) &= 0 - 4 \\ a &= -4m/s^2. \end{aligned}$$

Exemplo 3.2. *A equação da velocidade de um objeto é dado por $v = 3t + 2$ em que v esta em metros e t em segundos. Temos que $s(0) = -4$, sendo assim qual a equação do movimento do objeto. Além disso, qual o espaço nos seguintes tempos:*

- a) $t = 1s$
- b) $t = 3s$
- c) $t = 5s$
- d) $t = 6s$

Solução: *Note que a equação do movimento é dada, entretanto devemos diferente do primeiro exemplo integrar a equação ao invés de derivar como aprendemos no capítulo anterior.*

$$\begin{aligned} v &= 3t + 2 \\ s &= \int (3t + 2) dt \\ &= \frac{3t^2}{2} + 2t + c. \end{aligned}$$

Perceba que é necessário usar a informação $s(0) = -4$, dada no enunciado, para encon-

trarmos o valor de c . Logo,

$$\begin{aligned}s(0) &= \frac{3t^2}{2} + 2t + c \\ -4 &= \frac{3 \cdot 0^2}{2} + 2 \cdot 0 + c \\ c &= -4.\end{aligned}$$

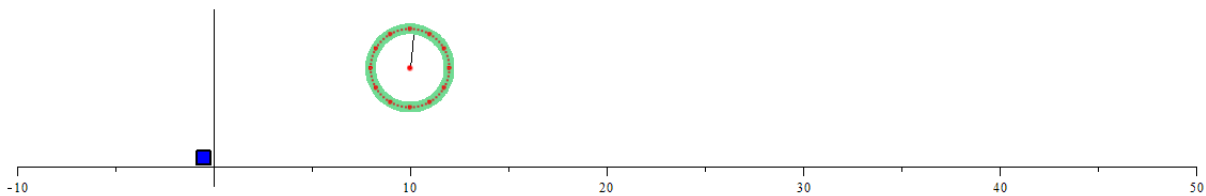
Portanto, temos que a equação do movimento é:

$$s = \frac{3t^2}{2} + 2t - 4.$$

a) Em $t = 1s$, temos:

$$\begin{aligned}s(1) &= \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 2 \cdot 1 - 4 \\ &= \frac{3 \cdot 1}{2} + 2 - 4 \\ &= \frac{3}{2} - 2 \\ &= -\frac{1}{2} \\ &= -0,5.\end{aligned}$$

Figura 3.4: Posição da partícula em $t = 1s$

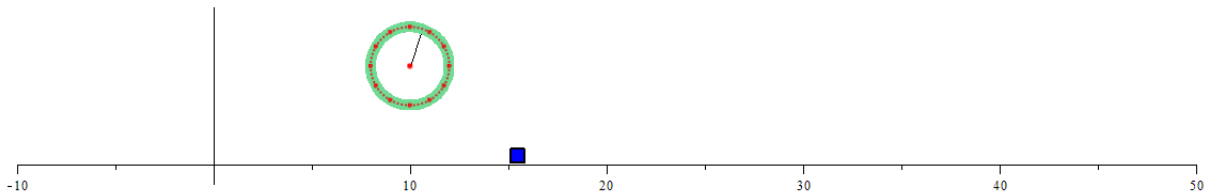


Fonte: Elaborada pelo autor.

b) Em $t = 3s$, temos

$$\begin{aligned}s(3) &= \frac{3 \cdot (3)^2}{2} + 2 \cdot (3) - 4 \\ &= \frac{3 \cdot 9}{2} + 6 - 4 \\ &= \frac{27}{2} + 2 \\ &= \frac{31}{2} \\ &= 15,5.\end{aligned}$$

Figura 3.5: Posição da partícula em $t = 3s$

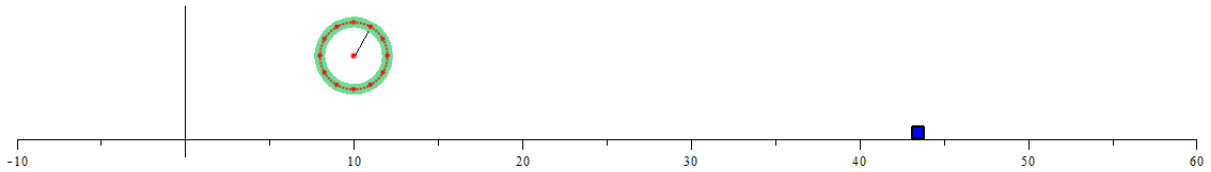


Fonte: Elaborada pelo autor.

c) Em $t = 5s$, temos:

$$\begin{aligned}s(5) &= \frac{3 \cdot 5^2}{2} + 2 \cdot 5 - 4 \\ &= \frac{3 \cdot 25}{2} + 10 - 4 \\ &= \frac{75}{2} + 6 \\ &= \frac{87}{2} \\ &= 43,5.\end{aligned}$$

Figura 3.6: Posição da partícula em $t = 5s$

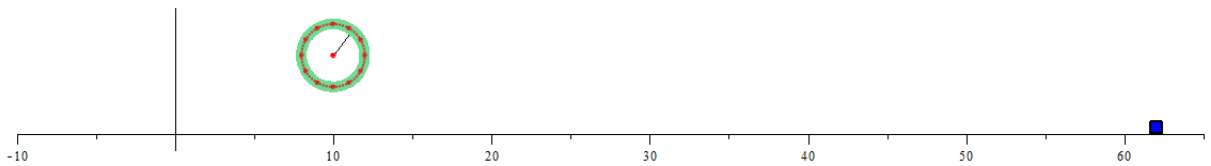


Fonte: Elaborada pelo autor.

d) Em $t = 6s$, temos

$$\begin{aligned} s(6) &= \frac{3 \cdot 6^2}{2} + 2 \cdot 6 - 4 \\ &= \frac{3 \cdot 36}{2} + 12 - 4 \\ &= \frac{108}{2} + 8 \\ &= 54 + 8 \\ &= 62. \end{aligned}$$

Figura 3.7: Posição da partícula em $t = 6s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.3. A equação do movimento de um carro é dado por $s = 4t^2$ em que s está em metros e t em segundos. Qual a velocidade nos instantes:

- a) $t = 1$
- b) $t = 4$
- c) $t = 9$
- d) $t = 12$

Solução: Perceba que a equação do movimento é dada, logo é necessário derivarmos para encontrarmos a velocidade.

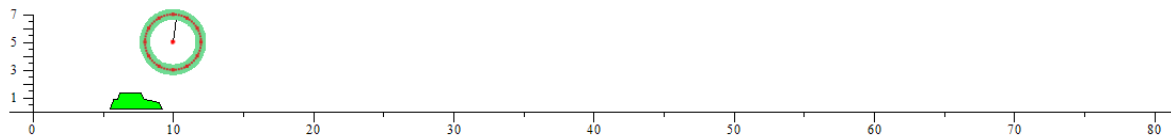
$$\begin{aligned}s &= 4t^2 \\s' &= 8t \\v &= 8t.\end{aligned}$$

Após encontrarmos a equação da velocidade podemos achar em cada instante pedido.

a) Para $t = 1s$, temos:

$$\begin{aligned}v &= 8t \\&= 8 \cdot 1 \\&= 8m/s.\end{aligned}$$

Figura 3.8: Posição do carro em $t = 1$

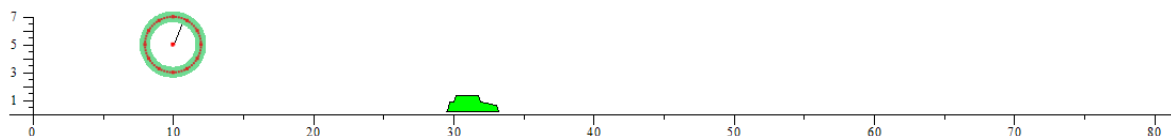


Fonte: Elaborada pelo autor.

b) Para $t = 4s$, temos:

$$\begin{aligned} v &= 8t \\ &= 8 \cdot 4 \\ &= 32m/s. \end{aligned}$$

Figura 3.9: Posição do carro em $t = 4s$

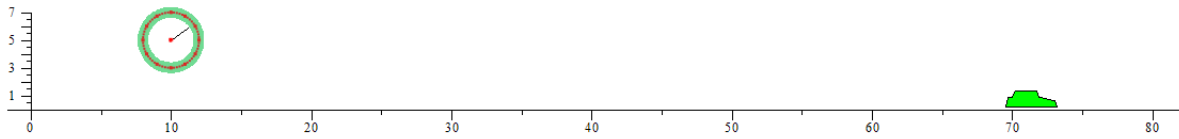


Fonte: Elaborada pelo autor.

c) Para $t = 9s$, temos:

$$\begin{aligned} v &= 8t \\ &= 8 \cdot 9 \\ &= 72m/s. \end{aligned}$$

Figura 3.10: Posição do carro em $t = 9s$

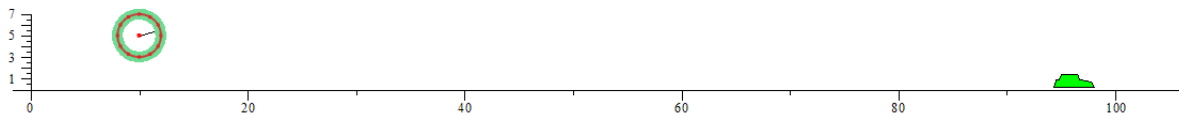


Fonte: Elaborada pelo autor.

d) Para $t = 12s$, temos:

$$\begin{aligned}v &= 8t \\ &= 8 \cdot 12 \\ &= 96m/s.\end{aligned}$$

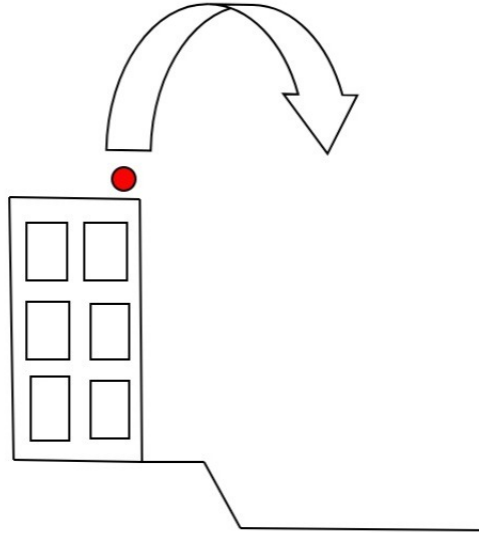
Figura 3.11: Posição do carro em $t = 12s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.4. Conforme a figura a seguir um objeto é lançado para cima do alto de um prédio. Sabendo que a velocidade inicial é 15m/s , o espaço inicial é 12m e considerando a gravidade 10m/s^2 ,

Figura 3.12: Gráfico exemplo 3.4



Fonte: Elaborada pelo autor.

Determine:

- Equação da velocidade;
- Tempo para atingir a altura máxima;
- Equação horária das posições;
- Posição após 4 segundos;

Solução: Perceba que essa questão é da mesma forma que o ENEM aborda a temática de cinemática. Logo, veremos com o que aprendemos que é possível resolver de forma eficiente usando técnicas de integração.

- Como a gravidade é uma força contrária movimento do objeto, ela será negativa. Temos que

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{dv}{dt} \\
 -10 &= \frac{dv}{dt} \\
 dv &= -10dt \\
 \int dv &= \int -10dt \\
 v &= -10t + c.
 \end{aligned}$$

Para encontrar a constante c , temos que $v(0) = 15$, logo

$$\begin{aligned}
 v &= -10t + c \\
 15 &= -10 \cdot 0 + c \\
 c &= 15.
 \end{aligned}$$

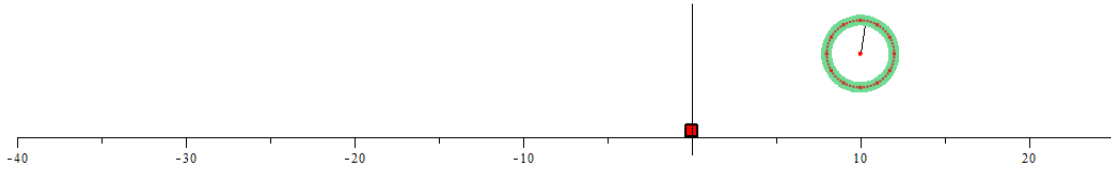
A equação da velocidade é

$$v = -10t + 15.$$

b) Para encontrarmos a altura máxima é necessário igualar a 0, pois é quando ela "para".

$$\begin{aligned}
 v &= 15 - 10t \\
 0 &= 15 - 10t \\
 t &= \frac{15}{10} = 1,5s.
 \end{aligned}$$

Figura 3.13: Posição da partícula em $t = 1,5s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

c) Para encontrar a equação horária será necessário integrar a equação da velocidade e após isso encontrar a constante.

$$\begin{aligned}v &= 15 - 10t \\ \int ds &= \int 15 - 10t dt \\ s &= 15t - \frac{10t^2}{2} + c.\end{aligned}$$

Para encontrar a constante c , temos que $s(0) = 12$, logo

$$\begin{aligned}s &= 15t - \frac{10t^2}{2} + c \\ 12 &= 15 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + c \\ c &= 12.\end{aligned}$$

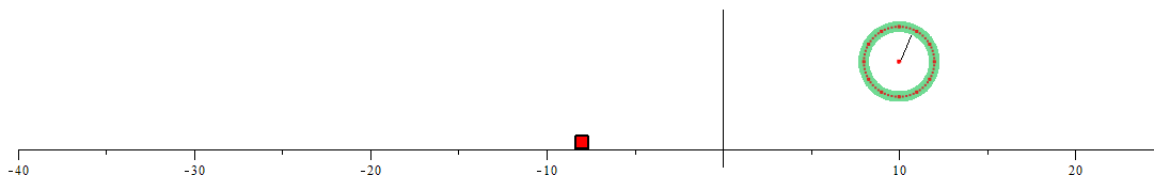
A equação horária é

$$s = -5t^2 + 15t + 12.$$

d) A posição no tempo $t = 4s$ será:

$$\begin{aligned}s &= -5(4)^2 + 15(4) + 12 \\ &= -80 + 60 + 12 \\ &= -8.\end{aligned}$$

Figura 3.14: Posição da partícula em $t = 4s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.5. O movimento de um elétron é dado pela função

$$s = 10 + 2t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{5}t^3.$$

Sendo que, s e t estão em unidades do sistema internacional, determine:

- A velocidade média entre $0s$ e $5s$;
- A função da velocidade;
- A aceleração média entre $0s$ e $5s$;
- A máxima posição positiva que o elétron atinge;
- A função da aceleração;
- A máxima velocidade positiva atingida pelo elétron;

Solução: Note que nesse caso, será importante usar conhecimentos visto no capítulo anterior sobre velocidade média e derivadas.

a) A velocidade média é dada por $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$, mas será necessário achar a posição no tempo dado.

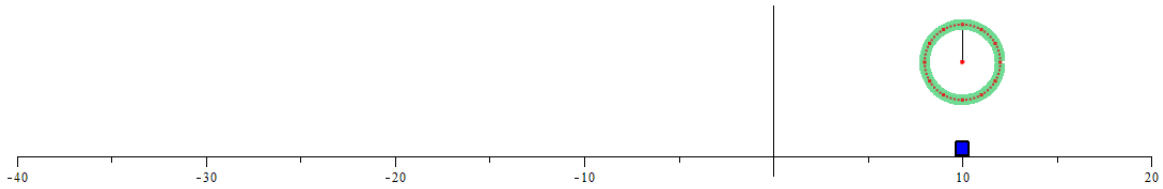
$$\begin{aligned} s(0) &= 10 + 2 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{1}{5} \cdot 0^3 \\ &= 10m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(5) &= 10 + 2 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 5^2 - \frac{1}{5} \cdot 5^3 \\ &= 10 + 10 + 12,5 - 25 \\ &= 7,5m. \end{aligned}$$

Agora, substituindo para achar a velocidade média, temos

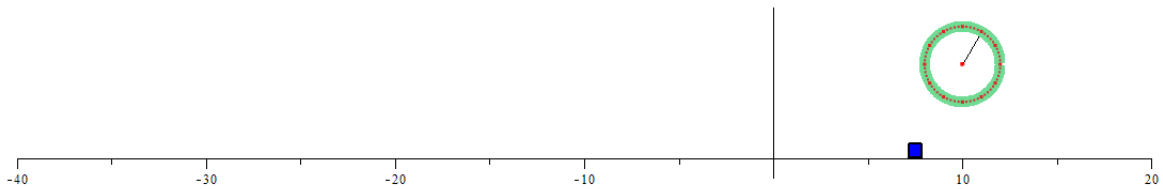
$$\begin{aligned}v_m &= \frac{s - s_0}{t - t_0} \\ &= \frac{7,5 - 10}{5 - 0} \\ &= \frac{-2,5}{5} \\ &= -0,5m/s.\end{aligned}$$

Figura 3.15: Posição da partícula em $t = 0s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 3.16: Posição da partícula em $t = 5s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

b) Sabemos que derivando a função do movimento, temos a função da velocidade.

$$\begin{aligned}s &= 10 + 2t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{5}t^3 \\s' &= 2 + t - \frac{3}{5}t^2 \\v &= 2 + t - \frac{3}{5}t^2.\end{aligned}$$

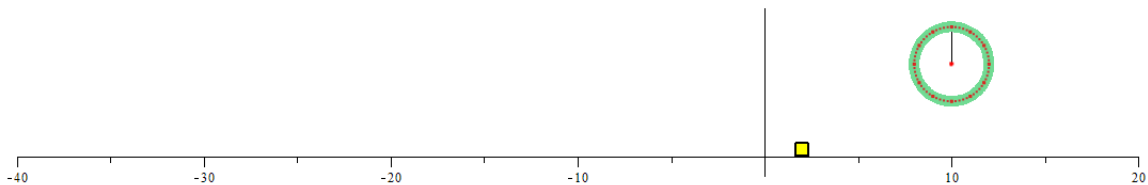
c) A aceleração média é dada por $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$, mas será necessário achar a velocidade no tempo dado.

$$\begin{aligned}v(0) &= 2 + 0 - \frac{3}{5} \cdot 0^2 \\&= 2m/s \\v(5) &= 2 + 5 - \frac{3}{5} \cdot 5^2 \\&= -8m/s.\end{aligned}$$

Agora, substituindo para achar a velocidade média, temos

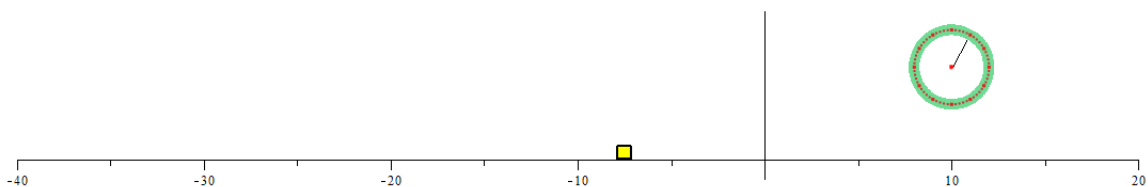
$$\begin{aligned}a_m &= \frac{v - v_0}{t - t_0} \\&= \frac{-8 - 2}{5 - 0} \\&= \frac{-10}{5} \\&= -2m/s^2.\end{aligned}$$

Figura 3.17: Posição da partícula em $t = 0s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 3.18: Posição da partícula em $t = 5s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

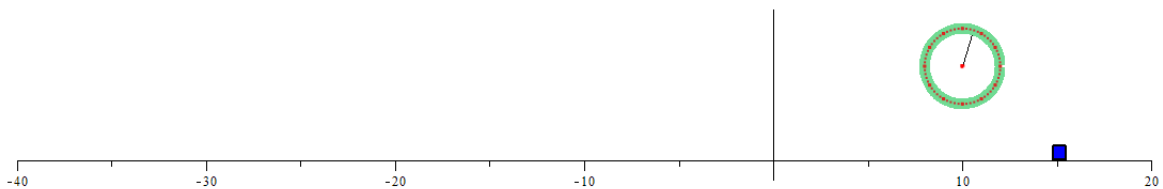
d) A posição máxima será quando a velocidade for igual a 0. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= 2 + t - \frac{3}{5}t^2 \\ t &= \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) \cdot 2}}{2 \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{24}{5}}}{-\frac{6}{5}} \\ &= \frac{-1 + 2,4}{-1,2} \\ &= 2,8s. \end{aligned}$$

Substituindo esse tempo na equação do movimento, teremos a posição máxima.

$$\begin{aligned} s &= 10 + 2t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{5}t^3 \\ &= 10 + 2 \cdot 2,8 + \frac{1}{2} \cdot (2,8)^2 - \frac{1}{5}(2,8)^3 \\ &= 15,2m. \end{aligned}$$

Figura 3.19: Posição da partícula em $t = 5s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

e) Sabemos que derivando a função da velocidade, temos a função da aceleração.

$$\begin{aligned} v &= 2 + t - \frac{3}{5}t^2 \\ v' &= 1 - \frac{6}{5}t \\ a &= 1 - \frac{6}{5}t. \end{aligned}$$

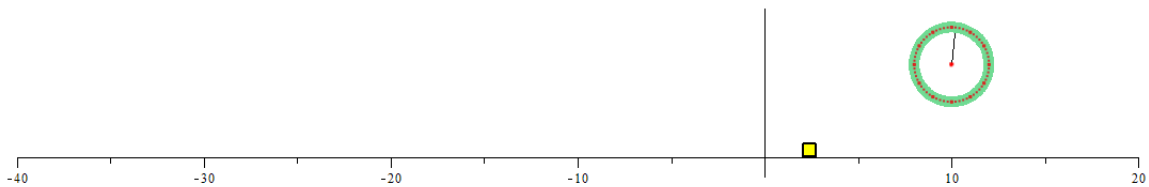
f) A velocidade máxima será quando a aceleração for igual a 0. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - \frac{6}{5}t \\ t &= \frac{6}{5} \\ &= 0,83s. \end{aligned}$$

Substituindo esse tempo na equação da velocidade, teremos a velocidade máxima.

$$\begin{aligned} v &= 2 + t - \frac{3}{5}t^2 \\ &= 2 + 0,83 \cdot 2,8 - \frac{3}{5} \cdot (0,83)^2 \\ &= 2,42m/s. \end{aligned}$$

Figura 3.20: Posição da partícula em $t = 5s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.6. Seja as partículas P e F , dadas pelas funções $f(t) = t^2$ e $g(t) = 10t$ respectivamente, sendo assim determine a posição e a velocidade em cada instante.

- a) $t = 3s$
- b) $t = 5s$
- c) $t = 10s$
- d) $t = 12s$

Solução: Perceba que temos as funções da posição, mas precisamos da função velocidade.

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 \\ f'(t) &= 2t. \\ g(t) &= 10t \\ g'(t) &= 10m/s \end{aligned}$$

a) Em $t = 3s$, temos para $f(t) = t^2$

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^2 \\ &= 9m. \end{aligned}$$

Para $v(t) = 2t$, temos

$$\begin{aligned}v(3) &= 2 \cdot 3 \\ &= 6m/s\end{aligned}$$

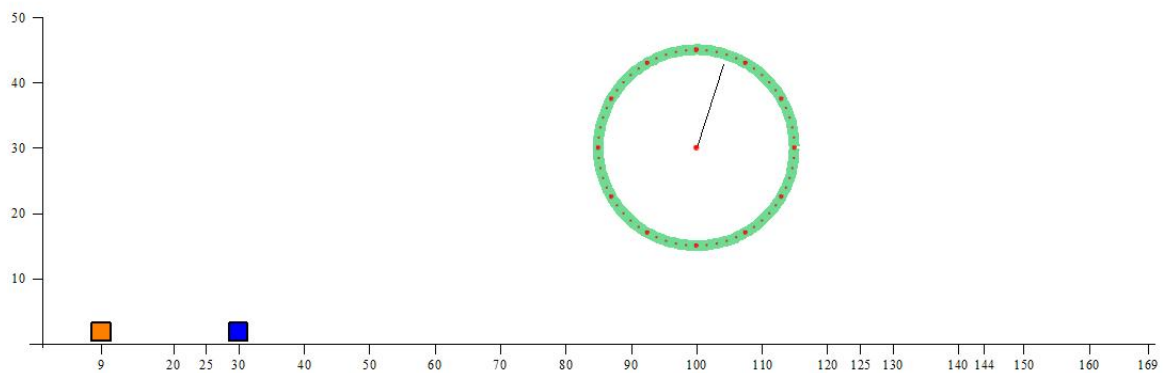
a) Em $t = 3s$, temos para $g(t) = 10t$

$$\begin{aligned}f(3) &= 10 \cdot 3 \\ &= 30m.\end{aligned}$$

Para $v(t) = 10$, temos

$$v(3) = 10m/s$$

Figura 3.21: Posição das partículas em $t = 3s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

b) Em $t = 5s$, temos para $f(t) = t^2$

$$\begin{aligned}f(5) &= 5^2 \\ &= 25m.\end{aligned}$$

Para $v(t) = 2t$, temos

$$\begin{aligned}v(5) &= 2 \cdot 5 \\ &= 10m/s\end{aligned}$$

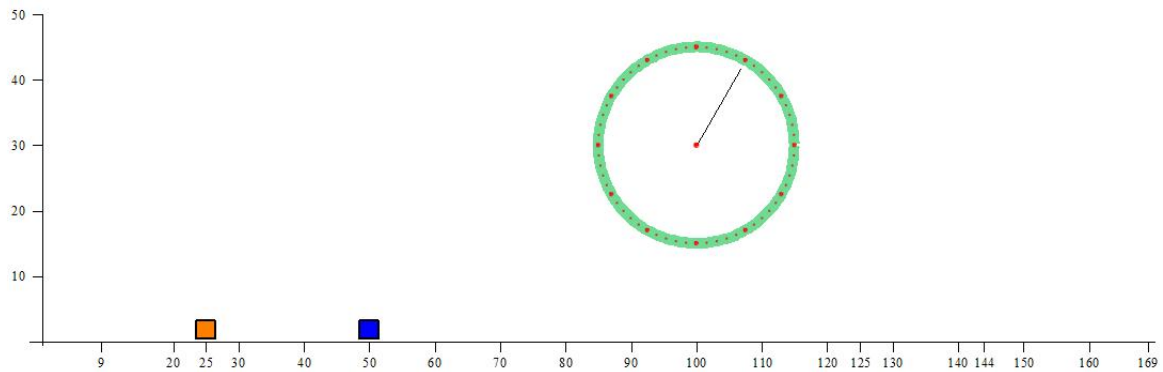
b) Em $t = 5s$, temos para $g(t) = 10t$

$$\begin{aligned}f(5) &= 10 \cdot 5 \\ &= 50m.\end{aligned}$$

Para $v(t) = 10$, temos

$$v(5) = 10m/s$$

Figura 3.22: Posição das partículas em $t = 3s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

c) Em $t = 10s$, temos para $f(t) = t^2$

$$\begin{aligned} f(10) &= 10^2 \\ &= 100m. \end{aligned}$$

Para $v(t) = 2t$, temos

$$\begin{aligned} v(10) &= 2 \cdot 10 \\ &= 20m/s \end{aligned}$$

c) Em $t = 10s$, temos para $g(t) = 10t$

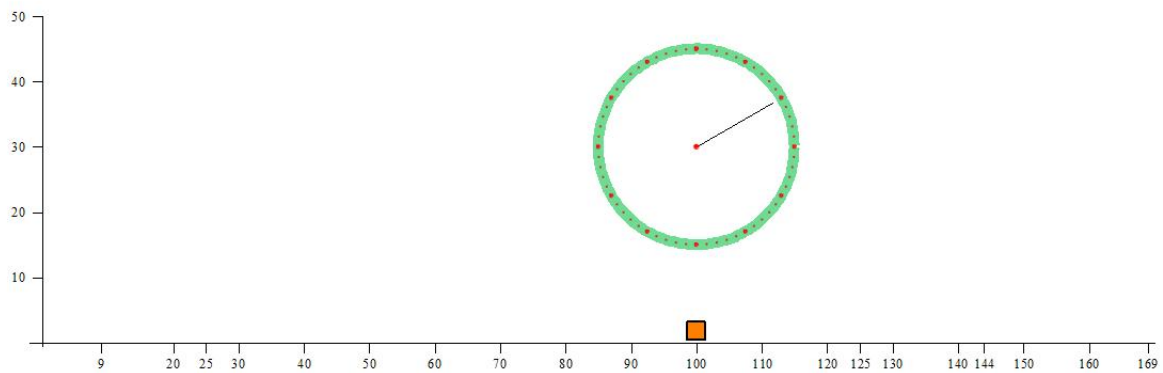
$$\begin{aligned} f(10) &= 10 \cdot 10 \\ &= 100m. \end{aligned}$$

Para $v(t) = 10$, temos

$$v(10) = 10m/s$$

d) Em $t = 12s$, temos para $f(t) = t^2$

Figura 3.23: Posição das partículas em $t = 3s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\begin{aligned} f(12) &= 12^2 \\ &= 144m. \end{aligned}$$

Para $v(t) = 2t$, temos

$$\begin{aligned} v(12) &= 2 \cdot 12 \\ &= 24m/s \end{aligned}$$

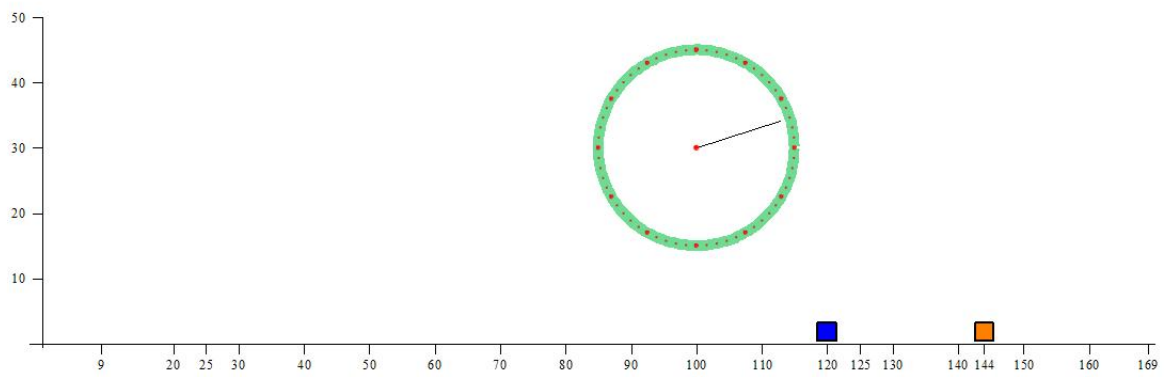
d) Em $t = 12s$, temos para $g(t) = 10t$

$$\begin{aligned} f(12) &= 10 \cdot 12 \\ &= 120m. \end{aligned}$$

Para $v(t) = 10$, temos

$$v(12) = 10m/s$$

Figura 3.24: Posição das partículas em $t = 3s$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Referências Bibliográficas

- [1] Hamilton Luiz Guidorizzi. Um curso de cálculo volume 1. *Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5^a edição*, 2001.
- [2] Hamilton L Guidorizzi. Um curso de cálculo vol. 2 e 3. *LTC*, 2001.
- [3] Angeline Melchiors. História do cálculo diferencial e integral. *Maiêutica. Ensino de Física e Matemática*, 1(1), 2013.
- [4] James Stewart. *Cálculo volume 2*. 2013, 2013.
- [5] David Halliday, Robert Resnick, and Jearl Walker. *Fundamentos de física 1: mecânica*. Livros Técnicos e Científicos Rio de Janeiro, 1996.
- [6] David HALLIDAY, Robert RESNICK, and Jearl WALKER. Fundamentos de física: mecânica, v. 1. *Rio de Janeiro: LTC*, 2002.
- [7] Neri Terezinha Both Carvalho and Rosimary Pereira. O software “maple” no estudo de funções de várias variáveis. *Educação Matemática em Revista*, 11(17):52–60, 2004.