



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS  
FACULDADE DE MATEMÁTICA

ALEXANDRE DA SILVEIRA DOS SANTOS

APLICAÇÕES DE CURVATURAS E GEODÉSICAS NA SUPERFÍCIE:  
SEMI-CICLOIDAL CILÍNDRICA

SALINÓPOLIS

2025

ALEXANDRE DA SILVEIRA DOS SANTOS

**APLICAÇÕES DE CURVATURAS E GEODÉSICAS NA SUPERFÍCIE:  
SEMI-CICLOIDAL CILÍNDRICA**


Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Salinópolis, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Amilcar Montalbán Sayago.

Aprovado em: 28/03/2025


Conceito: Excelente

**BANCA EXAMINADORA**

Documento assinado digitalmente  
 **AMILCAR MONTALBAN SAYAGO**  
Data: 22/04/2025 17:50:38-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

Prof. Dr. Amilcar Montalbán Sayago (Orientador)  
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Documento assinado digitalmente  
 **JOCEL FAUSTINO NORBERTO DE OLIVEIRA**  
Data: 22/04/2025 13:27:57-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Jocel Faustino Norberto de Oliveira (examinador externo)  
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Documento assinado digitalmente  
 **MARIA ALICE DE VASCONCELOS FEIO MESSIAS**  
Data: 22/04/2025 12:49:19-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Profa. Dra. Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias (examinador interno)  
Universidade Federal do Pará (UFPA)

D722a dos Santos, Alexandre da Silveira.  
Aplicações de Curvaturas e Geodésicas na Superfície: Semi-  
Cicloidial Cilíndrica / Alexandre da Silveira dos Santos. — 2025.  
60 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Amilcar Montalbán Sayago  
Trabalho de Conclusão (Graduação) - Universidade Federal do  
Pará, Campus Universitário de Salinópolis, Curso de Licenciatura  
em Matemática, Salinópolis, 2025.

1. Curvatura Gaussiana e Média. 2. Geodésicas. 3. Semi-  
Cicloidial Cilíndrica. I. Título.

CDD 516.363

---

*Dedico este trabalho aos meus pais Antonia e Alexandre por todo amor, carinho e apoio que sempre deram a mim. Ao meu companheiro Hemerson, por sempre está ao meu lado, me ajudando e incetivando a não desistir dos meus sonhos. E a todos aqueles que a vida, em algum dia, me fez encontrá-los.*

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, que me permitiu alcançar meus objetivos durante todos os anos de estudos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Amilcar Montalbán Sayago, que desempenhou essa função com dedicação e amizade. Obrigado pela oportunidade de desvendar e aprender muito sobre essa área que tanto me fascina que é a Geometria Diferencial. E aos demais professores, pelas correções e ensinamentos que aprimoraram minha formação profissional.

Aos amigos e familiares que me apoiaram e contribuíram para a realização deste trabalho. Aos meus pais Antônia e Alexandre, meus irmãos Ádria, Walleson e Alana, que muitas vezes me ajudaram financeiramente quando eu buscava realizar o meu sonho e compreenderam minha ausência enquanto eu me dedicava a ele.

Ao meu companheiro Hemerson, por todo amor, carinho e paciência. Por entender os momentos que precisei me afastar por conta dos estudos. Suas palavras de incentivo foram importantes para que eu não desistisse.

À minha amiga Jheniffer, pelas suas contribuições nas contas de matemática básica que faziam eu duvidar de mim mesmo.

À Professora Dra. Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias, que pela sua história de vida me incentivou a almejar um futuro acadêmico promissor e me ajudou a conquistar tantos outros objetivos durante a graduação.

Aos professores da banca examinadora: A Profa. Dra. Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias e o Prof. Dr. Jocel Faustino Norberto de Oliveira pelas valiosas colaborações e sugestões.

A todos professores e colegas do Campus Universitário de Salinópolis que, de alguma forma, contribuíram para a minha formação acadêmica, expresse minha gratidão.

Por fim, a todos que contribuíram para este TCC, meus sinceros agradecimentos. Cada palavra de incentivo, conselhos e suporte foi fundamental para o meu crescimento acadêmico e pessoal.

## RESUMO

Mostra-se que, a aplicação dos Teoremas sobre Curvatura Gaussiana e Curvatura Média de superfícies implícitas, tais como a Semi-Cicloidal Cilíndrica, é um processo mais simples e eficiente do que aqueles usados em um curso de Geometria Diferencial (GD). Este trabalho teve como objetivo apresentar esses teoremas e aplicá-los na resolução do cálculo das curvaturas de superfícies implícitas, como: o Cone, o Elipsóide e a Semi-Cicloidal Cilíndrica. Além disso, mostra-se ainda o cálculo dos sistemas de equações diferenciais das geodésicas das superfícies com essa característica. Durante este estudo, foram explorados alguns conceitos preliminares de Cálculo Diferencial e Álgebra Linear, como também, os tópicos fundamentais no estudo das superfícies e das geodésicas no contexto da GD.

**Palavras-chave:** Curvatura Gaussiana e Média, Geodésicas, Semi-Cicloidal Cilíndrica.

## ABSTRACT

It is shown that the application of Theorems on Gaussian Curvature and Mean Curvature of implicit surfaces, such as the Cylindrical Semi-Cycloidal surface, is a simpler and more efficient process than those used in a Differential Geometry (DG) course.. The work aimed to present these theorems and apply them to solving the calculation of the curvatures of implicit surfaces, such as: the Cone, the Ellipsoid and the Cylindrical Semi-Cycloid. In addition, it is also shown the calculation of the systems of differential equations of the geodesics of surfaces with this characteristics. During this study, some preliminary concepts of Differential Calculus and Linear Algebra were explored, as well as the fundamental topics in the study of Surfaces and Geodesics in the context of GD.

**Keywords:** Gaussian and Mean Curvature, Geodesics, Cylindrical Semi-Cycloid.

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	7
<b>I REFERENCIAIS TEÓRICOS</b>	<b>10</b>
1 Vetores Linearmente Dependentes	10
2 Produto Escalar, Produto Vetorial	10
3 Derivadas Parciais, Vetor Gradiente	11
4 Matriz Jacobiana, Matriz Hessiana	12
5 Teoria Local de Superfícies	14
5.1 Superfície Parametrizada Regular	14
5.2 Plano Tangente; Vetor Normal	19
5.3 Primeira Forma Fundamental	20
5.4 Segunda Forma Fundamental	21
5.5 Fórmulas de Gauss, Símbolos de Christoffel	22
<b>II CURVATURAS</b>	<b>24</b>
6 Teorema da Curvatura Gaussiana	25
7 Teorema da Curvatura Média	29
<b>III CURVAS GEODÉSICAS</b>	<b>32</b>
8 Geodésica de uma Superfície	32
9 Equações Diferenciais das Geodésicas	32
10 Cilindro Reto	34
<b>IV SUPERFÍCIE SEMI-CICLOIDAL CILÍNDRICA</b>	<b>36</b>
11 Semi-Ciclóide invertida.	36
12 Semi-Cicloidal Cilíndrica	36
<b>V APLICAÇÕES</b>	<b>43</b>
13 Cone	43
14 Elipsóide.	44
15 Semi-cicloidal Cilíndrica.	47
16 Telhados Curvos	51
<b>CONCLUSÃO</b>	<b>54</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>55</b>

## INTRODUÇÃO

Ao analisar as fórmulas de curvatura para curvas e superfícies paramétricas, deparamos-nos com várias definições para curvas planas, como por exemplo: *a curvatura é o valor do desvio da curva em relação à reta tangente*. Para superfícies, a curvatura deve capturar *o desvio da superfície em relação ao plano tangente*. Mas, ao contrário das curvas planas, existe mais de uma forma de medir esse desvio e essas informações são obtidas mais precisamente pelas Curvaturas Gaussiana e Média.

A Curvatura Gaussiana e a Curvatura Média são conceitos fundamentais na Geometria Diferencial. A primeira foi introduzida em 1827 por Carl Friedrich Gauss como parte de seus trabalhos sobre a chamada Aplicação Normal de Gauss  $N : S \rightarrow S^2$ , cuja diferencial sob certas circunstâncias é um operador auto-adjunto ([2], 2024). Gauss definiu a Curvatura Gaussiana como sendo o produto  $K = k_1 k_2$  das curvaturas principais que, numa certa base ortonormal, é simplesmente o determinante da matriz de  $dN$  no ponto  $p$  que é um invariante desta aplicação. Simbolicamente, a Curvatura Gaussiana é definida como:

$$K_G = \frac{\det(H)}{\det(g)}$$

em que  $H$  é a Matriz Hessiana das segundas derivadas da função que descreve a superfície, e  $g$  é o tensor métrico.

Um outro invariante, o traço de  $dN_p$  dado por  $\text{Trace}(dN_p) = -(k_1 + k_2)$  surge naturalmente no estudo desta aplicação e o negativo da metade do traço de  $dN_p$  é chamada a Curvatura Média de  $S$  em  $p$ . Esse conceito foi usado por Sophie Germain, em 1831, ao estudar um problema relacionado com vibrações de uma membrana e, também, por Jean Baptiste Marie Meusnier, em 1776, quando estudava superfícies mínimas ([3], 2024). A Curvatura Média é definida como a média das curvaturas principais de uma superfície. Seja  $K$  a curvatura média em um ponto  $p$  na superfície, e  $k_1$  e  $k_2$  as curvaturas principais (máxima e mínima, respectivamente), temos:

$$K_M = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Uma superfície é considerada mínima se sua Curvatura Média for zero. Além disso, a Curvatura Média está relacionada à Segunda Forma Fundamental e pode ser expressa em termos do operador de forma e do tensor métrico.

A Primeira Forma Fundamental e a Segunda Forma Fundamental são conceitos importantes relacionados a superfícies paramétricas. A Primeira Forma é uma métrica intrínseca associada a uma superfície paramétrica. Ela descreve como as curvas se comportam na superfície, e  $E$ ,  $F$ ,  $G$  os quais são os coeficientes da métrica local. A Segunda Forma também é uma métrica intrínseca associada à superfície e seus coeficientes  $e$ ,  $f$ ,

$g$  são relacionados aos vetores normais. Ela está relacionada à Curvatura Gaussiana e às curvaturas principais. As Curvatura Gaussiana e a Curvatura Média, na Geometria Diferencial clássica também podem ser expressas utilizando os coeficientes das Formas Fundamentais mencionadas anteriormente.

$$K_G = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad K_M = \frac{Ge - Ff + Eg}{2(EG - F^2)}$$

As Curvaturas Gaussiana e Média influenciam as Curvas Geodésicas, que variam a sua forma com a geometria intrínseca da superfície. As Curvas Geodésicas são caminhos especiais em superfícies que representam a menor distância (ou, em alguns casos, a maior distância) entre dois pontos. A história dessas curvas está entrelaçada com o desenvolvimento da Geometria Diferencial e os esforços de matemáticos visionários.

Gaspard Monge (1746-1818), considerado o pai da Geometria Diferencial, estimulou o estudo de superfícies não-planas, expandindo o campo além da geometria analítica. J. B. Meusnier (1754-1793), aluno de Monge, contribuiu para a Geodésia Geométrica. Seu trabalho influenciou o desenvolvimento de teoremas aplicados à Geodésica, inclusive o conceito de Linha Geodésica. Carl Friedrich Gauss (1777-1855), grande matemático do início do século XIX, inventou o heliótopo usado para sinalização de pontos geodésicos.

A curvatura Gaussiana e a Curvatura Média estão relacionadas às Curvas Geodésicas. Se a Curvatura Gaussiana for positiva, a superfície é como uma esfera, e as geodésicas são círculos máximos. Se a curvatura Gaussiana for negativa, a superfície é como uma sela, e as geodésicas são hiperbólicas. Se a Curvatura Gaussiana for zero, a superfície é plana, e as geodésicas são segmentos de reta. As Curvas Geodésicas também podem ser encontradas como soluções de equações diferenciais que minimizam o comprimento entre dois pontos na superfície.

Um exemplo de superfície com curvatura gaussiana nula que descobrimos foi o da superfície Semi-Cicloidial Cilíndrica. A Semi-Cicloidial Cilíndrica é uma superfície gerada por uma reta que se move ao longo de uma curva Semi-Ciclóide, denominada diretriz, paralelamente a uma reta fixa, denominada geratriz. Sua Curvatura Gaussiana é nula devido a interseção do plano tangente com uma superfície do tipo cilíndrica serem retas e retas não possuem curvatura. E, ainda, calculamos as curvas geodésicas dessa superfície que são determinadas por hélices, ciclóides e retas.

A Geometria Diferencial é uma área da matemática que estuda as propriedades de curvas e superfícies, utilizando conceitos básicos de cálculo diferencial e integral, bem como álgebra linear. Embora não seja oferecida em todos os cursos (como o de Licenciatura em Matemática, no Campus UFPA/Salinópolis), ela possui relevância em várias áreas, como: Física, Química, Biofísica, Topografia, Economia e Computação Gráfica.

Portanto, mesmo que não seja parte do currículo, o estudo da Geometria Diferencial

pode enriquecer sua compreensão matemática e ter aplicações em diversas áreas. Nesse sentido, este trabalho se justifica por ser um assunto de grande interesse teórico e prático para os pesquisadores da área, e devido à quantidade de aplicações desses conceitos em outras áreas das ciências.

A fim de alcançar os objetivos do trabalho, relembremos alguns conceitos principais estudados nos cursos de cálculo Diferencial e Integral, álgebra linear e equações diferenciais. A metodologia baseou-se em pesquisa bibliográfica, partindo do artigo intitulado “*Curvature formulas for implicit curves and surfaces*” ([8], 2005), por trabalhos de conclusão de curso na área e seguindo pelos livros da bibliografia listada.

Este trabalho está estruturado em 4 partes. Na parte 1, estudaremos os tópicos de Cálculo Diferencial e de Álgebra Linear, preliminares ao estudo contido neste trabalho como também os conceitos relacionados a Teoria Local de Superfícies que são necessários para a abordagem e entendimento dos capítulos posteriores.

A parte 2 é dedicada às demonstrações dos Teoremas da Curvatura Gaussiana e da Curvatura Média retirados de [8]. Em 2005, Goldman em seu trabalho, desenvolveu fórmulas de curvatura para superfícies implícitas. Fórmulas que dependem apenas do gradiente  $\nabla F$ , da matriz hessiana  $Hess(F)$  e da adjunta da matriz hessiana  $Hess^*(F)$ . A parte 3, ao estudo das Curvas Geodésicas e do cálculo do sistema de equações diferenciais que ajudam a determinar essas curvas. As fórmulas de curvatura e o sistema que determina as curvas geodésicas serão utilizados nas aplicações que faremos com superfícies já conhecidas e em outra que será definida na parte subsequente.

Na parte 4, apresentaremos as definições e teoremas necessários para o entendimento da construção da superfície que denominamos “Semi-Cicloidial Cilíndrica”. E na parte 5 é onde se encontra o resultado principal deste trabalho, as aplicações dos Teoremas no Cone, no elipsóide e na superfície encontrada. Como também os cálculos dos sistemas de equações que descrevem as Curvas Geodésicas dessas superfícies.

Os teoremas que serão vistos neste trabalho são: O Teorema da Curvatura Gaussiana (6.1), O Teorema da Curvatura Média (7.1), O Teorema da Semi-Cicloidial Cilíndrica (12.1) e o Teorema das geodésicas da Semi-Cicloidial Cilíndrica (12.2).

# Parte I

## REFERENCIAIS TEÓRICOS

Neste capítulo serão apresentadas definições de Álgebra Linear e Cálculo Diferencial, como também alguns resultados importantes ao estudo das Curvaturas Gaussiana e Média no contexto da Geometria Diferencial. O texto ao longo do capítulo é baseado nas obras: Introdução a Geometria Diferencial de Ketí Tenenblat ([11], 2008), notas de aula do Professor Sadao Massago ([10], 2010) e Um Curso de Cálculo, Volume 2, de Hamilton Luiz Guidorizzi ([9], 2001).

### 1 Vetores Linearmente Dependentes

**Definição 1.1.** *Seja  $V$  um espaço vetorial, os vetores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  são ditos linearmente independentes se toda equação vetorial da forma  $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = 0$  tem solução única  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .*

*Consideremos nessa definição que os coeficientes pertencem ao conjunto dos reais. Quando essa definição não se efetiva para quaisquer vetores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  de um espaço vetorial  $V$ , eles são chamados linearmente dependentes. Ou seja, se existirem números reais  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , nem todos nulos, tais que  $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = 0$ .*

### 2 Produto Escalar, Produto Vetorial

**Definição 2.1.** *Sejam  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$  e seja  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , o ângulo formado pelos segmentos  $Ou$  e  $Ov$ . O produto interno (ou produto escalar)  $\vec{u} \bullet \vec{v}$  é definido por*

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta) \quad (2.1)$$

*Temos, também, que, seja  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ ; definimos a sua norma por*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

*Geometricamente,  $\|\vec{u}\|$  é a distância do ponto  $(u_1, u_2, u_3)$  à origem  $\vec{0} = (0, 0, 0)$ .*

*E valem as seguintes propriedades:*

- i) Seja  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores não nulos. Então  $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$  se, e somente se,  $\vec{u}$  é ortogonal a  $\vec{v}$ ;*
- ii)  $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$ ;*
- iii)  $\lambda(\vec{u} \bullet \vec{v}) = \lambda \vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet \lambda \vec{v}$ ;*
- iv)  $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$ .*

**Definição 2.2.** *Dados dois vetores  $\vec{w}_1$  e  $\vec{w}_2 \in \mathbb{R}^3$  de componentes  $(x_1, y_1, z_1)$  e  $(x_2, y_2, z_2)$*

respectivamente, o produto vetorial de  $\vec{w}_1$  e  $\vec{w}_2$ , denotado por  $\vec{w}_1 \times \vec{w}_2$ , é definido como sendo o vetor de componentes

$$\vec{w}_1 \times \vec{w}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1, -x_1 z_2 + x_2 z_1, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

O Produto Vetorial satisfaz as seguintes propriedades:

- i)  $\|\vec{w}_1 \times \vec{w}_2\| = \|\vec{w}_1\| \|\vec{w}_2\| \sin(\theta)$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{w}_1$  e  $\vec{w}_2$ ;
- ii)  $(\vec{w}_1 \times \vec{w}_2) \bullet \vec{w}_1 = (\vec{w}_1 \times \vec{w}_2) \bullet \vec{w}_2 = 0$ ;
- iii)  $\vec{w}_1 \times \vec{w}_2 = 0$  se, e somente se,  $\vec{w}_1$  e  $\vec{w}_2$  são linearmente dependentes;
- iv)  $\vec{w}_1 \times \vec{w}_2 = -(\vec{w}_2 \times \vec{w}_1)$ ;
- v)  $\vec{w}_1 \times (\vec{w}_2 + \vec{w}_3) = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2 + \vec{w}_1 \times \vec{w}_3$ ;
- vi)  $(\lambda \vec{w}_1) \times \vec{w}_2 = \lambda(\vec{w}_1 \times \vec{w}_2)$ ;
- vii)  $\vec{w}_1 \times (\vec{w}_2 \times \vec{w}_3) = (\vec{w}_1 \bullet \vec{w}_3)\vec{w}_2 - (\vec{w}_1 \bullet \vec{w}_2)\vec{w}_3$ .

### 3 Derivadas Parciais, Vetor Gradiente

**Definição 3.1.** Seja  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função definida em um aberto  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Fixemos  $p_0 \in A$  e  $w$  um vetor não-nulo de  $\mathbb{R}^n$ . A derivada direcional de  $F$  em  $P_0$  na direção de  $w$  é o vetor

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(p_0 + tw) - F(p_0)}{t}$$

quando esse limite existe.

Considerando a base canônica  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  as derivadas direcionais de  $F$  em  $p_0$  nas direções dos vetores da base são denominadas *derivadas parciais* de  $F$  em  $p_0$ .

Se  $F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n))$ , então a derivada parcial de  $F$  em  $p_0$  na direção de  $e_i$  é denotada por  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p_0)$  ou  $F_{x_i}(p_0)$  e é igual a

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p_0) = \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(p_0), \dots, \frac{\partial F_m}{\partial x_i}(p_0) \right)$$

Se  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p_0)$  existe,  $\forall p \in A$ , então temos definida uma função  $\frac{\partial F}{\partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  que, para cada  $p \in A$ , associa  $\frac{\partial F_m}{\partial x_i}(p)$ . As derivadas parciais da função  $\frac{\partial F}{\partial x_i}$  são denominadas *derivadas parciais de segunda ordem* de  $F$ . A notação usada para estas é

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = F_{x_i x_j}, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = F_{x_i x_i}. \end{aligned}$$

Para as derivadas parciais de terceira ordem, usamos.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \right) = \frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = F_{x_i x_j x_k}, \text{ etc.}$$

**Definição 3.2.** Seja  $z = f(x, y)$  uma função que admite derivadas parciais em  $(x_0, y_0)$ . O vetor

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

é denominado gradiente de  $f$  em  $(x_0, y_0)$ . Geometricamente, interpretaremos  $\nabla f(x_0, y_0)$  como um vetor aplicado no ponto  $(x_0, y_0)$ .

**Exemplo 1.** Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Calculemos  $\nabla f(x, y)$ .

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2x, 2y).$$

#### 4 Matriz Jacobiana, Matriz Hessiana

**Definição 4.1.** Dada uma função vetorial de várias variáveis  $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $F(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))$ , a representacção matricial da derivada, quando existe, é denominada de Matriz Jacobiana e é definida como sendo.

$$JF(x_1, \dots, x_m) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}.$$

Quando  $m = n$ , a Matriz Jacobiana é uma matriz quadrada e o seu determinante

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

é denominado função jacobiana ou somente jacobiana.

**Exemplo 2.** Obter a Matriz Jacobiana de  $F(x, y) = (x^2y, \frac{x}{y}, x - y)$ .

*Solução :*

$$JF(x, y) = \begin{bmatrix} x^2y \\ \frac{x}{y} \\ x - y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Definição 4.2.** Dada uma função real de várias variáveis,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , a matriz jacobiana do gradiente é denominada de Matriz Hessiana de  $f$ .

Assim,

$$\text{Hess}(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}.$$

A Matriz Hessiana é sempre uma matriz quadrada. O determinante da Matriz Hessiana é denominado de função hessiana a qual não pode ser confundido a com Matriz Hessiana.

**Exemplo 3.** Obter a matriz e a função hessiana da função  $f(x, y) = x^2 y^3$ .

Primeiramente, calculemos o gradiente

$$\nabla f(x, y) = (2xy^3, 3x^2y^2) = \begin{bmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{bmatrix},$$

e a matriz hessiana é

$$\text{Hess}f(x, y) = \begin{bmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{bmatrix}.$$

Então, a função hessiana é

$$\begin{aligned} \det \text{Hess}(f)(x, y) &= \det \begin{bmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{bmatrix} \\ &= 12x^2y^4 - 36x^2y^4 \\ &= -24x^2y^4. \end{aligned}$$

**Observação 4.1.** Como consequência do Teorema de Schwartz, quando a Matriz Hessiana for contínua, ela será uma matriz simétrica.

## 5 Teoria Local de Superfícies

Sobre a Teoria local de superfícies, em Tenenblat ([11], 2008) são exploradas superfícies no espaço euclidiano, focando em suas propriedades geométricas e analíticas. Alguns dos principais pontos abordados incluem: Superfícies Parametrizadas e Primeira e Segunda Formas Fundamentais. A representação de superfícies através de parametrizações permite a análise detalhada de suas propriedades locais. Já as formas fundamentais, são ferramentas essenciais para estudar a geometria intrínseca e extrínseca das superfícies.

### 5.1 Superfície Parametrizada Regular

**Definição 5.1.** *Uma Superfície Parametrizada Regular é uma aplicação  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , na qual  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$ , tal que*

*a)  $X$  é diferenciável de classe  $C^\infty$  quando as funções  $x, y, z$  têm derivadas parciais de todas as ordens contínuas;*

*b) Para todo  $q = (u, v) \in U$ , a diferencial de  $X$  em  $q$ ,  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , é injetora.*

*As variáveis  $(u, v)$  são os parâmetros da superfície. O subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^3$ , obtido pela imagem da aplicação  $X$  é denominado traço de  $X$ .*

De acordo com Tenenblat, ([11], p. 110) e Bruxel, ([1], p. 23), a condição *b)* dessa definição garante a existência de um plano tangente em cada ponto da superfície, isto é, que  $dX_q$  leva vetores linearmente independentes em vetores linearmente independentes. Podemos expressar essa condição da seguinte forma: sejam  $e_1, e_2$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$  e  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  a base canônica do  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas  $(x, y, z)$ , calculemos a matriz associada a aplicação  $dX_q$ . Temos que, para cada  $q = (u_0, v_0) \in U$ , sabemos que a matriz associada a  $dX_q$  nas bases canônicas é a matriz jacobiana

$$J(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

pois os vetores tangentes à essa curva são os vetores

$$X_u(u_0, v_0) = dX_q(e_1) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

e

$$X_v(u_0, v_0) = dX_q(e_2) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

Dessa forma, a condição *b)* da definição (5.1) pode ser expressa exigindo que os vetores coluna da matriz (7.1) sejam linearmente independentes, isto é, que  $X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0)$  seja não nulo.

**Exemplo 4.** Considere uma hélice circular  $\alpha(u) = (\cos u, \sin u, u)$ , para cada  $u$  temos uma única reta que passa pela hélice e é ortogonal ao eixo  $z$ . Unindo essas retas obtemos uma superfície chamada helicóide, parametrizada por

$$X(u, v) = (0, 0, u) + v(\cos u, \sin u, 0)$$

com  $u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$ .

Tendo que as coordenadas são infinitamente deriváveis, a condição a) da definição de superfície é satisfeita. Verificaremos agora se o produto vetorial  $X_u \times X_v$  é não nulo. Temos:

$$\begin{aligned} X_u &= (-v \sin u, v \cos u, 1) \\ X_v &= (\cos u, \sin u, 0) \\ X_u \times X_v &= (-\sin u, \cos u, -v) \neq (0, 0, 0) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Portanto, a superfície em questão é de fato parametrizada regular.

Vejamos agora a parametrização de algumas superfícies que são mais comumente estudadas em um curso de Geometria Diferencial.

### 1. Esfera:

Na Figura 1, é apresentada uma representação gráfica de uma esfera, um sólido geométrico tridimensional que é simétrico em relação ao seu centro.

Figura 1: Esfera.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A equação que representa a esfera é:  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$  e sua parametrização é dada por  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$  e  $X$  é definida por

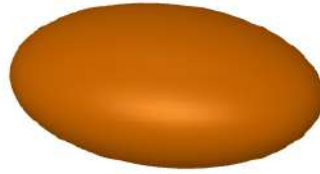
$$X(u, v) = (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, a \sin v).$$

### 2. Elipsóide:

O elipsóide é um sólido geométrico tridimensional que é uma generalização da esfera,

com três eixos de simetria diferentes (Figura 2).

Figura 2: Elipsóide.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A parametrização do Elipsóide, cuja equação é

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$$

,é dada por  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$  e  $X$  é definida por

$$X(u, v) = (a \operatorname{sen} v \cos u, b \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, c \cos v).$$

### 3. Hiperbolóide Elíptico de uma folha

O Hiperboloide Elíptico de uma folha é uma superfície quádrlica caracterizada por uma curvatura negativa e uma forma alongada (Figura 3) e é representado pela equação:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\}$$

Figura 3: Hiperbolóide Elíptico de uma folha.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

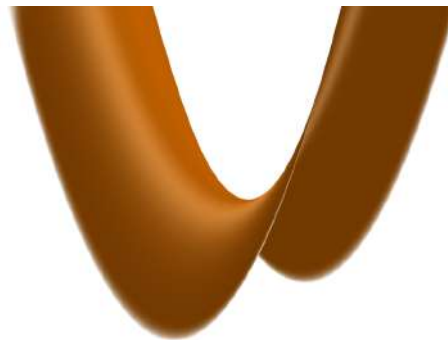
Sua parametrização é dada por  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$  e  $X$  é definida por

$$X(u, v) = (a\sqrt{u^2 + 1}\cos v, b\sqrt{u^2 + 1}\sen v, c u).$$

#### 4. Parabolóide Hiperbólico

Na Figura 4, é apresentada uma representação gráfica de um Parabolóide Hiperbólico, uma superfície quádrlica que é caracterizada por uma curvatura negativa e uma forma de sela e é representado pela equação  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz\}$ .

Figura 4: Parabolóide Hiperbólico.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Sua parametrização é dada por  $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , e  $X$  é definida por

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{v^2}{b^2} - \frac{u^2}{a^2}\right).$$

#### 5. Cilindro Elíptico

Na figura 5, é apresentada uma representação gráfica de um Cilindro Elíptico, uma superfície tridimensional que é gerada pela rotação de uma elipse em torno de um eixo e é representado pela equação  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ .

Figura 5: Cilindro Elíptico.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

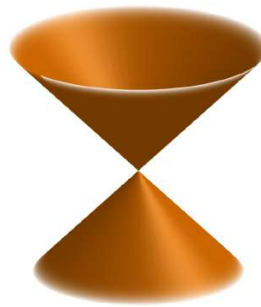
Sua parametrização é dada por  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } v \in \mathbb{R}\}$  e  $X$  é definida por

$$X(u, v) = (a \cos u, b \sin u, v).$$

## 6. Cone

O Cone (Figura 6) é um sólido tridimensional formado pela união de um círculo base com um vértice superior, caracterizado por uma superfície curva e uma altura definida. Essa superfície é representada pela equação  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2\}$ .

Figura 6: Cone.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Sua parametrização é dada por  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < 2\pi\}$  e  $X$  é definida por

$$X(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u).$$

## 7. Parabolóide Elíptico

O Parabolóide Elíptico (Figura 7) é uma superfície tridimensional formada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo, caracterizada por uma curvatura elíptica e uma simetria em relação ao eixo de rotação. Essa superfície é representada pela equação  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz\}$ .

Figura 7: Parabolóide Elíptico.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

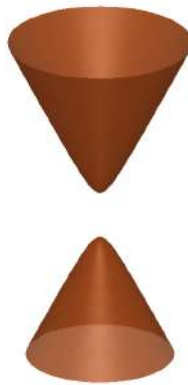
Sua parametrização é dada por  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  e  $X$  é definida por

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b}\right).$$

## 8. Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas

O Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas (Figura 8) é uma superfície tridimensional formada pela intersecção de um cone duplo com um plano, caracterizada por duas folhas simétricas e uma curvatura elíptica. A equação  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ , representa essa superfície.

Figura 8: Hiperbolóide Elíptico de Duas Folhas.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A parametrização de uma de suas folhas é dada por  $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $u \in \mathbb{R}$  e  $0 < v < \pi$  e  $X$  é definida por

$$X(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, c\sqrt{u^2 + 1}).$$

### 5.2 Plano Tangente; Vetor Normal

**Definição 5.2.** Se  $X(u, v)$  é uma curva parametrizada regular, dizemos que um vetor  $\vec{w}$  de  $\mathbb{R}^3$  é uma vetor tangente a  $X$  em  $q = (u_0, v_0)$  se  $\vec{w} = \alpha'(t_0)$ , onde  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma curva da superfície, tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ .

Os vetores  $X_u(u_0, v_0)$  e  $X_v(u_0, v_0)$  são vetores tangentes a  $X$  em  $(u_0, v_0)$ , já que são tangentes às curvas coordenadas de  $X$ .

**Definição 5.3.** O plano tangente a  $X$  em  $(u_0, v_0)$  é o conjunto de todos os vetores tangentes a  $X$  em  $(u_0, v_0)$ , que denotamos por  $T_q X$ , onde  $q = (u_0, v_0)$ .

**Definição 5.4.** Se  $X(u, v)$  é uma superfície e  $q = (u_0, v_0)$ , dizemos que um vetor de  $\mathbb{R}^3$  é normal a  $X$  em  $q$  se é ortogonal a  $T_q X$ , isto é, é ortogonal a todos os vetores tangentes a  $X$  em  $q$ .

Dado um plano tangente  $T_q X$ , existe uma única direção normal a este plano e, portanto, há exatamente dois vetores unitários normais a  $X$  em  $q$ . Fixaremos o vetor unitário normal a  $x$  em  $q$  como sendo o vetor

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(q).$$

### 5.3 Primeira Forma Fundamental

**Definição 5.5.** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular,  $\forall q \in U$ , a aplicação*

$$\begin{aligned} I_q : T_q X &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{w} &\rightarrow I_q(\vec{w}) = \vec{w} \bullet \vec{w} = \|\vec{w}\|^2 \end{aligned}$$

É denominada a Primeira Forma Quadrática de  $X$  em  $q$ .

Consideremos uma superfície dada por  $X(u, v)$  e um ponto  $q = (u_0, v_0)$ . Então, um vetor  $\vec{w} \in T_q X$  é da forma

$$\vec{w} = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$$

em que  $a, b \in \mathbb{R}$ . Portanto,

$$I_q(\vec{w}) = a^2(X_u \bullet X_u)(u_0, v_0) + 2ab(X_u \bullet X_v)(u_0, v_0) + b^2(X_v \bullet X_v)(u_0, v_0).$$

Usando a notação

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= (X_u \bullet X_u)(u_0, v_0), \\ F(u_0, v_0) &= (X_u \bullet X_v)(u_0, v_0), \\ G(u_0, v_0) &= (X_v \bullet X_v)(u_0, v_0), \end{aligned}$$

e, denotando

$$(E(u_0, v_0), F(u_0, v_0), G(u_0, v_0))$$

por, respectivamente,  $E(q)$ ,  $F(q)$  e  $G(q)$  (ou, abreviadamente,  $E$ ,  $F$  e  $G$ ). Segundo Stoker (1969), podemos escrever na forma matricial

$$I_q = \begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_u \bullet X_u & X_u \bullet X_v \\ X_u \bullet X_v & X_v \bullet X_v \end{pmatrix}(u_0, v_0)$$

temos que

$$I_q(\vec{w}) = a^2 E(u_0, v_0) + 2abF(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0).$$

Variando  $(u, v)$ , temos funções  $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$  diferenciáveis, que são denominadas *coeficientes da primeira forma quadrática*.

As funções  $E, F$  e  $G$  satisfazem as seguintes propriedades:

- i)  $E(u, v) > 0$  e  $G(u, v) > 0$  para todo  $(u, v)$ , pois os vetores  $X_u$  e  $X_v$  são nulos;
- ii)  $E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) > 0$ . De fato, como

$$\|X_u \times X_v\|^2 + (X_u \bullet X_v)^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2,$$

Temos que

$$EG - F^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - (X_u \bullet X_v)^2 = \|X_u \times X_v\|^2 > 0.$$

#### 5.4 Segunda Forma Fundamental

**Definição 5.6.** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Fixado  $q = (u_0, v_0) \in U$ , a Segunda Forma Quadrática de  $X$  em  $q$  é uma aplicação  $II_q : T_q X \leftrightarrow \mathbb{R}$ , que para cada vetor  $\vec{w} \in T_q X$  associa  $II_q(\vec{w})$  da seguinte forma: se  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma curva diferenciável da superfície, tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = q$  e  $\alpha'(t_0) = \vec{w}$ , então definimos*

$$II_q(\vec{w}) = \alpha''(t_0) \bullet N(u_0, v_0),$$

onde  $N$  é o vetor normal a  $X$ .

Vamos verificar que  $II_q(\vec{w})$  não depende da curva escolhida.

Seja

$$\vec{w} = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

e consideremos uma curva  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = q$  e  $\alpha'(t_0) = \vec{w}$ , isto é,

$$(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0), \quad (u'(t_0), v'(t_0)) = (a, b).$$

Como

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t))$$

e

$$\begin{aligned}\alpha''(t) &= u''(t)X_u(u(t), v(t)) + (u'(t))^2X_{uu}(u(t), v(t)) + \\ &\quad + 2u'(t)v'(t)X_{uv}(u(t), v(t)) + (v'(t))^2X_{vv}(u(t), v(t)) + \\ &\quad + v''(t)X_v(u(t), v(t)),\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}II_q(\vec{w}) &= \alpha''(t_0) \bullet N(u_0, v_0) = \\ &= a^2(X_{uu} \bullet N)(u_0, v_0) + 2ab(X_{uv} \bullet N)(u_0, v_0) + \\ &\quad + b^2(X_{vv} \bullet N)(u_0, v_0),\end{aligned}$$

onde a última expressão não depende da curva  $\alpha$ .

Utilizando a notação

$$\begin{aligned}e(u_0, v_0) &= (X_{uu} \bullet N)(u_0, v_0), \\ f(u_0, v_0) &= (X_{uv} \bullet N)(u_0, v_0), \\ g(u_0, v_0) &= (X_{vv} \bullet N)(u_0, v_0),\end{aligned}$$

na forma matricial

$$II_q = \begin{pmatrix} X_{uu} \bullet N & X_{uv} \bullet N \\ X_{vu} \bullet N & X_{vv} \bullet N \end{pmatrix} (u_0, v_0)$$

temos que

$$II_q(\vec{w}) = a^2e(u_0, v_0) + 2abf(u_0, v_0) + b^2g(u_0, v_0).$$

Variando  $(u, v)$ , temos funções diferenciáveis  $e(u, v)$ ,  $f(u, v)$ ,  $g(u, v)$ , que são denominadas *coeficientes da segunda forma quadrática* da superfície parametrizada  $X$ .

## 5.5 Fórmulas de Gauss, Símbolos de Christoffel

As definições a seguir podem ser desenvolvidas a partir de [11] com auxílio de [5].

**Definição 5.7.** (*Fórmulas de Gauss*). *Seja  $\alpha(s) = X(u^1(s), u^2(s))$  uma curva em  $M$ , e assumamos que  $s$  é o comprimento de arco. Então, o vetor unitário tangente à  $\alpha$  é dado por*

$$T = \alpha' = u^i X_i.$$

Podemos decompor o vetor de curvatura em duas componentes, tangente e normal à superfície

$$\alpha'' = \alpha''_{tan} + \alpha''_{nor}.$$

Sabemos que

$$X_i = \frac{\partial X}{\partial u^i}.$$

De forma similar, podemos definir

$$X_{ij} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Em seguida, quebramos  $X_{ij}$  em componentes tangente e normal. A componente tangente será uma combinação linear de  $X_1$  e  $X_2$ , e a componente normal, um múltiplo do vetor normal unitário  $N$ . Definimos as funções  $\Gamma_{ij}^r$  e  $N_{ij}$  por

$$X_{ij} = \Gamma_{ij}^r X_r + L_{ij} N,$$

para  $i, j, r = 1, 2$ .

Estas são conhecidas como *fórmulas de Gauss*. Inicialmente, definimos as funções  $\Gamma_{ijk}$  como

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ij}^r X_r \bullet X_k; \quad i, j, k = 1, 2.$$

Tais funções são conhecidas como *Símbolos de Christoffel* de primeira ordem, e, como  $\Gamma_{ij}^r = \Gamma_{ji}^r$ , temos  $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$ . Note também que  $\Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ijk} g^{km}$ . A partir daí, obtemos

$$X_{ij} \cdot X_k = \Gamma_{ij}^r X_r \bullet X_k = \Gamma_{ijk}.$$

Fazendo as derivadas indicadas e rearranjando as equações, obtemos

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(X_i \bullet X_k)}{\partial u^j} + \frac{\partial(X_j \bullet X_k)}{\partial u^i} - \frac{\partial(X_i \bullet X_j)}{\partial u^k} \right).$$

Multiplicando a equação acima por  $g^{kr}$  e somando sobre  $k$ , segue

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} g^{kr} \left( \frac{\partial(X_i \bullet X_k)}{\partial u^j} + \frac{\partial(X_j \bullet X_k)}{\partial u^i} - \frac{\partial(X_i \bullet X_j)}{\partial u^k} \right). \quad (5.2)$$

Logo, os Símbolos de Christoffel dependem apenas da primeira forma fundamental.

## Parte II

### CURVATURAS

Na maioria dos livros padrões sobre Geometria Diferencial, como ([11], 2008) e ([4], 2005), são encontradas fórmulas clássicas de curvatura. As curvaturas Média e Gaussiana para uma superfície parametrizada são geralmente definidas em termos da Primeira ( $I$ ) e da Segunda ( $II$ ) Formas Fundamentais da superfície, isto é,

$$K_G = \frac{Det(II)}{Det(I)}, \quad K_M = \frac{Trace(I * II^*)}{2Det(I)}.$$

Porém, essas fórmulas não demonstram eficiência quando trabalhamos com superfícies implícitas. Em geometria, as superfícies implícitas são aquelas definidas por uma equação da forma  $F(x, y, z) = 0$ . Essa equação não expressa explicitamente uma variável em termos das outras, mas representa a superfície de maneira geral. Goldman (2005), manipula levemente as fórmulas clássicas garantindo seu uso eficaz nesse tipo de superfície. O autor, em seu trabalho, desenvolveu fórmulas de curvatura para curvas implícitas diretamente de fórmulas de curvatura conhecidas para curvas paramétricas. E, do mesmo modo, o autor também desenvolveu fórmulas de curvatura para superfícies implícitas. Fórmulas que dependem apenas do gradiente  $\nabla F$ , da matriz hessiana  $Hess(F)$  e da adjunta da matriz hessiana  $Hess^*(F)$ .

O operador  $\nabla$ , aplicado a um vetor de linha, significa tomar o gradiente de cada componente e escrever esses gradientes componentes na matriz com vetores coluna consecutivos (Goldman, 2005). Segundo o autor, tal como acontece com as curvas, o gradiente  $\nabla F$  é paralelo à normal da superfície implícita. Dessa forma, foram desenvolvidas as fórmulas para superfícies implícitas a seguir.

*Curvatura Gaussiana:*

$$K_G = \frac{\nabla F * Hess^*(F) * \nabla F}{\|\nabla F\|^4}. \quad (5.3)$$

*Curvatura Média:*

$$K_M = \frac{\nabla F * Hess(F) * \nabla F^T - \|\nabla F\|^2 Trace(Hess(F))}{2\|\nabla F\|^3}. \quad (5.4)$$

## 6 Teorema da Curvatura Gaussiana

A demonstração do teorema da Curvatura Gaussiana será apresentada posteriormente. Para isso, consideremos os lemas a seguir.

**Lema 6.1.** *Se  $P(s, t)$  for a mesma superfície parametrizada com  $F(x, y, z) = 0$ , então*

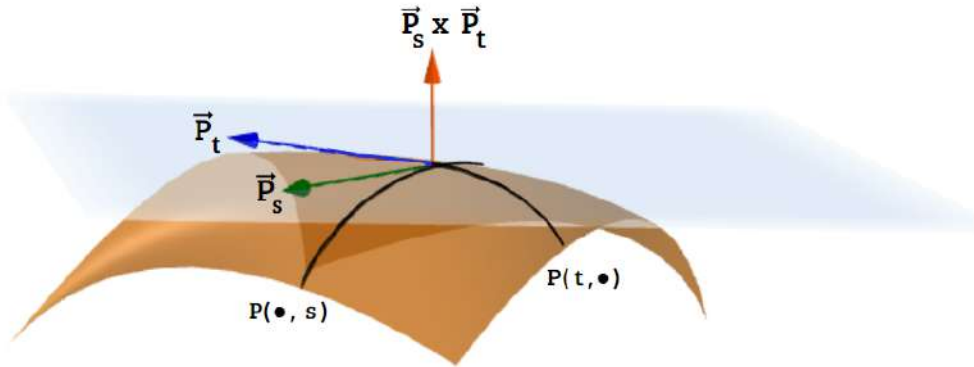
$$i) \vec{P}_s \times \vec{P}_t = \lambda \nabla F;$$

$$ii) \vec{P}_{ss} \times \vec{P}_t + \vec{P}_s \times \vec{P}_{ts} = \lambda \frac{d}{ds}(\nabla F) \text{ ou } \vec{P}_{st} \times \vec{P}_t + \vec{P}_s \times \vec{P}_{tt} = \lambda \frac{d}{dt}(\nabla F);$$

$$iii) \frac{d}{ds}(\nabla F) = \vec{P}_s * Hess(F) \text{ ou } \frac{d}{dt}(\nabla F) = \vec{P}_t * Hess(F).$$

Na figura a seguir (Figura 9) mostra-se a representação gráfica do produto vetorial  $\vec{P}_s \times \vec{P}_t$ .

Figura 9: Representação gráfica de  $\vec{P}_s \times \vec{P}_t$ .



Fonte: Elaborado pelo Autor.

*Demonstração.* i) Tendo que o vetor  $\vec{P}_s \times \vec{P}_t$  é paralelo ao vetor  $\nabla F$ , então:

$$\vec{P}_s \times \vec{P}_t = \lambda \nabla F; \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

*Demonstração.* ii) De (i) e derivando em relação a  $s$  ou  $t$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\vec{P}_s \times \vec{P}_t) &= \frac{d}{ds}(\lambda \nabla F) \\ \vec{P}_{ss} \times \vec{P}_t + \vec{P}_s \times \vec{P}_{ts} &= \lambda \frac{d}{ds}(\nabla F) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{P}_s \times \vec{P}_t) &= \frac{d}{dt}(\lambda \nabla F) \\ \vec{P}_{st} \times \vec{P}_t + \vec{P}_s \times \vec{P}_{tt} &= \lambda \frac{d}{dt}(\nabla F). \end{aligned}$$

□

*Demonstração.* iii) Seja  $P(s, t) = (P_1(s, t), P_2(s, t), P_3(s, t))$ .

Logo,

$$\begin{cases} x = P_1(s, t) \\ y = P_2(s, t) \\ z = P_3(s, t) \end{cases}$$

O gradiente de F é:

$$\nabla F = (F_x, F_y, F_z) = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\nabla F) &= \frac{d}{dx}(\nabla F) \frac{dx}{dP_1} \frac{dP_1}{ds} + \frac{\nabla F}{dy} \frac{dy}{dP_2} \frac{dP_2}{ds} + \frac{\nabla F}{dz} \frac{dz}{dP_3} \frac{dP_3}{ds} \\ &= \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{yx} & F_{zx} \end{pmatrix} P_{1s} + \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{yx} & F_{zx} \end{pmatrix} P_{2s} + \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{yx} & F_{zx} \end{pmatrix} P_{3s} \\ &= \begin{pmatrix} F_{xx}P_{1s} + F_{xy}P_{2s} + F_{xz}P_{3s} & F_{yx}P_{1s} + F_{yy}P_{2s} + F_{yz}P_{3s} & F_{zx}P_{1s} + F_{zy}P_{2s} + F_{zz}P_{3s} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{1s} & P_{2s} & P_{3s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} \\ &= \vec{P}_s * Hess(F). \end{aligned}$$

□

**Observação 6.1.**

$$(\vec{a} * M) \times (\vec{b} * M) = (\vec{a} \times \vec{b}) * M^* \quad (6.1)$$

Sendo  $\vec{a}, \vec{b}$  vetores em  $\mathbb{R}^3$ ,  $M$  matriz quadrada de ordem  $3 \times 3$ , e  $M^*$  é a matriz dos cofatores, temos que:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \quad (6.2)$$

**Observação 6.2.**  $\frac{(\vec{P}_s * Hess(F)) \times (\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \lambda_2}{\|\nabla F\|}$  e  $\frac{(\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \times (\vec{P}_t * Hess(F)) \lambda_1}{\|\nabla F\|}$  são ortogonais a  $\nabla F$ .

**Lema 6.2.**

$$\begin{aligned} \vec{N}_s \times \vec{N}_t &= \frac{(\vec{P}_s \times \vec{P}_t) * Hess^*(F)}{\|\nabla F\|^2} + \frac{(\vec{P}_s * Hess(F))}{\|\nabla F\|} \times (\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \lambda_2 \\ &\quad + (\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \times \frac{(\vec{P}_t * Hess(F))}{\|\nabla F\|} \lambda_1. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Por definição, temos que  $\vec{N} = \frac{\vec{P}_s \times \vec{P}_t}{\|\vec{P}_s \times \vec{P}_t\|}$ , agora derivando em relação a “s”

$$\vec{N}_s = \frac{\frac{d}{ds}(\vec{P}_s \times \vec{P}_t) \|\vec{P}_s \times \vec{P}_t\| - (\vec{P}_s \times \vec{P}_t) \frac{d}{ds} \|\vec{P}_s \times \vec{P}_t\|}{\|\vec{P}_s \times \vec{P}_t\|^2} \quad (6.3)$$

$$= \frac{(\vec{P}_{ss} \times \vec{P}_t + \vec{P}_s \times \vec{P}_{ts})}{\|\vec{P}_s \times \vec{P}_t\|} - (\vec{P}_s \times \vec{P}_t) \lambda_1 \quad (6.4)$$

$$\therefore \vec{N}_s = \frac{(\vec{P}_{ss} \times \vec{P}_t + \vec{P}_s \times \vec{P}_{ts})}{\|\vec{P}_s \times \vec{P}_t\|} + (\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \lambda_1. \quad (6.5)$$

Da mesma forma, temos a derivada parcial de  $N$  em relação a “t”

$$\vec{N}_t = \frac{(\vec{P}_{st} \times \vec{P}_t + \vec{P}_s \times \vec{P}_{tt})}{\|\vec{P}_s \times \vec{P}_t\|} + (\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \lambda_2. \quad (6.6)$$

Do lema 01 (i), (ii), (iii) e equações (6.5), (6.6) temos:

$$\vec{N}_s = \frac{\vec{P}_s * Hess(F)}{\|\nabla F\|} + (\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \lambda_1 \quad (6.7)$$

e

$$\vec{N}_t = \frac{\vec{P}_t * Hess(F)}{\|\nabla F\|} + (\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \lambda_2. \quad (6.8)$$

Das equações (6.7) e (6.8), temos o produto vetorial

$$\begin{aligned} \vec{N}_s \times \vec{N}_t &= \left( \frac{\vec{P}_s * Hess(F)}{\|\nabla F\|} + (\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \lambda_1 \right) \times \left( \frac{\vec{P}_t * Hess(F)}{\|\nabla F\|} + (\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \lambda_2 \right) \\ &= \frac{(\vec{P}_s * Hess(F)) \times (\vec{P}_t * Hess(F))}{\|\nabla F\|^2} + \cancel{(\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \times (\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \lambda_1 \lambda_2}^0 \\ &\quad + \frac{(\vec{P}_s * Hess(F))}{\|\nabla F\|} \times (\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \lambda_2 + (\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \times \frac{(\vec{P}_t * Hess(F))}{\|\nabla F\|} \lambda_1. \end{aligned}$$

Das equações (6.1) e (6.2) temos:

$$\begin{aligned} \vec{N}_s \times \vec{N}_t &= \frac{(\vec{P}_s \times \vec{P}_t) * Hess(F)}{\|\nabla F\|^2} + \frac{(\vec{P}_s * Hess(F))}{\|\nabla F\|} \times (\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \lambda_2 \\ &\quad + (\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \times \frac{(\vec{P}_t * Hess(F))}{\|\nabla F\|} \lambda_1. \end{aligned}$$

□

**Observação 6.3.** Dados os vetores  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$

$$(\vec{a} \bullet \vec{c})(\vec{b} \bullet \vec{d}) - (\vec{a} \bullet \vec{d})(\vec{b} \bullet \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet (\vec{c} \times \vec{d})$$

$$\vec{a} \bullet (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

**Teorema 6.1.**

$$K_G = \frac{\nabla F * Hess^*(F) * \nabla F}{\|\nabla F\|^4}.$$

*Demonstração.* Por definição,

$$I = \begin{pmatrix} \vec{P}_s \bullet \vec{P}_s & \vec{P}_s \bullet \vec{P}_t \\ \vec{P}_t \bullet \vec{P}_s & \vec{P}_t \bullet \vec{P}_t \end{pmatrix} \text{ Primeira Forma Fundamental;}$$

$$II = \begin{pmatrix} \vec{P}_s \bullet \vec{N}_s & \vec{P}_s \bullet \vec{N}_t \\ \vec{P}_t \bullet \vec{N}_s & \vec{P}_t \bullet \vec{N}_t \end{pmatrix} \text{ Segunda Forma Fundamental.}$$

A curvatura gaussiana é:

$$K_G = \frac{\det(II)}{\det(I)} = \frac{(\vec{P}_s \times \vec{P}_t) \bullet (\vec{N}_s \times \vec{N}_t)}{\|\vec{P}_s \times \vec{P}_t\|^2}. \quad (6.9)$$

De Lema 6.2 e  $\vec{P}_s \times \vec{P}_t$  tem-se:

$$\begin{aligned} (\vec{P}_s \times \vec{P}_t) \bullet (\vec{N}_s \times \vec{N}_t) &= \frac{(\vec{P}_s \times \vec{P}_t) * Hess^*(F) * (\vec{P}_s \times \vec{P}_t)^T}{\|\nabla F\|^2} \\ &+ \frac{(\vec{P}_s * Hess(F)) \times (\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \lambda_2 \bullet (\vec{P}_s \times \vec{P}_t)}{\|\nabla F\|} \\ &+ \frac{(\vec{P}_t \times \vec{P}_s) \times (\vec{P}_t * Hess(F)) \lambda_1 \bullet (\vec{P}_s \times \vec{P}_t)}{\|\nabla F\|}. \end{aligned}$$

Pela Observação 6.2 e  $\vec{P}_s \times \vec{P}_t = \lambda \nabla F$ , lema 6.1 (i)

$$(\vec{P}_s \times \vec{P}_t) \bullet (\vec{N}_s \times \vec{N}_t) = \frac{\lambda \nabla F * Hess^*(F) * (\lambda \nabla F)^T}{\|\nabla F\|^2} \quad (6.10)$$

$$= \frac{\lambda^2 (\nabla F) * Hess^*(F) * (\nabla F)^T}{\|\nabla F\|^2}. \quad (6.11)$$

De (6.9), (6.11) temos:

$$\begin{aligned} K_G &= \frac{\frac{\lambda^2(\nabla F) * Hess^*(F) * (\nabla F)^T}{\|\nabla F\|^2}}{\|\lambda \nabla F\|^2} \\ &= \frac{\lambda^2(\nabla F) * Hess^*(F) * (\nabla F)^T}{\lambda^2 \|\nabla F\|^4} \\ \therefore K_G &= \frac{(\nabla F) * Hess^*(F) * (\nabla F)^T}{\|\nabla F\|^4}. \end{aligned}$$

□

## 7 Teorema da Curvatura Média

A demonstração do teorema da Curvatura Gaussiana será feita posteriormente. Para isso, consideremos os lemas anteriores e a observação a seguir.

**Observação 7.1.** *Dados os vetores  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  e todas as matrizes simétricas  $M$  de ordem  $3 \times 3$ , temos*

$$\vec{b} \times (\vec{a} * M) - \vec{a} \times (\vec{b} * M) = (\vec{a} \times \vec{b}) * M - Trace(M)(\vec{a} \times \vec{b}).$$

**Teorema 7.1.**

$$K_M = \frac{\nabla F * Hess(F) * \nabla F^T - \|\nabla F\|^2 Trace(Hess(F))}{2\|\nabla F\|^3}.$$

*Demonstração.* Seja

$$N = N(s, t) = \frac{\vec{P}_s \times \vec{P}_t}{\|\vec{P}_s \times \vec{P}_t\|};$$

Então  $N$  é a unidade normal à superfície.

A curvatura média é

$$K_M = \frac{(\vec{P}_s \times \vec{P}_t) \bullet ((\vec{P}_t \times \vec{N}_s) - (\vec{P}_s \times \vec{N}_t))}{2\|\vec{P}_s \times \vec{P}_t\|^2}. \quad (7.1)$$

do Lema (6.2), e equações (6.7) e (6.8), temos

$$\begin{aligned} (\vec{P}_t \times \vec{N}_s) - (\vec{P}_s \times \vec{N}_t) &= \frac{\vec{P}_t \times (\vec{P}_s * Hess(F))}{|\nabla F|} - \frac{\vec{P}_s \times (\vec{P}_t * Hess(F))}{|\nabla F|} \\ &= \frac{\vec{P}_t \times (\vec{P}_s * Hess(F)) - \vec{P}_s \times (\vec{P}_t * Hess(F))}{|\nabla F|}. \end{aligned}$$

Portanto, usando a Observação [7.1](#), temos

$$(\vec{P}_t \times \vec{N}_s) - (\vec{P}_s \times \vec{N}_t) = \frac{(\vec{P}_s \times \vec{P}_t) * Hess(F) - Trace(Hess)(\vec{P}_s \times \vec{P}_t)}{\|\nabla F\|}.$$

Do Lema [\(6.1\)](#) (i),  $\vec{P}_s \times \vec{P}_t = \lambda \nabla F$ , assim

$$\begin{aligned} (\vec{P}_s \times \vec{P}_t) \cdot \left( \frac{(\vec{P}_s \times \vec{P}_t) * Hess(F) - Trace(Hess)(\vec{P}_s \times \vec{P}_t)}{\|\nabla F\|} \right) &= \lambda \nabla F \cdot \left( \frac{\lambda \nabla F * Hess(F) - Trace(Hess(F)) \lambda \nabla F}{\|\nabla F\|} \right) \\ &= \frac{\lambda^2 \nabla F * Hess(F) * \nabla F^T - \lambda^2 Trace(Hess(F)) \|\nabla F\|^2}{\|\nabla F\|} \end{aligned}$$

Substituindo em [\(7.1\)](#)

$$\begin{aligned} K_M &= \frac{\frac{\lambda^2 \nabla F * Hess(F) * \nabla F^T - \lambda^2 Trace(Hess(F)) \|\nabla F\|^2}{\|\nabla F\|}}{2 \|\lambda \nabla F\|^2} \\ &= \frac{\lambda^2 \nabla F * Hess(F) * \nabla F^T - \lambda^2 Trace(Hess(F)) \|\nabla F\|^2}{2 \lambda^2 \|\nabla F\|^3} \\ &= \frac{\nabla F * Hess(F) * \nabla F^T - \|\nabla F\|^2 Trace(Hess(F))}{2 \|\nabla F\|^3} \\ \therefore K_M &= \frac{\nabla F * Hess(F) * \nabla F^T - \|\nabla F\|^2 Trace(Hess(F))}{2 \|\nabla F\|^3} \end{aligned}$$

□

**Exemplo 5.** Calcular a curvatura gaussiana e a curvatura média da esfera

$$F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

*Solução* : Temos que

$$F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

assim,

- $\nabla F = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix},$
- $H(F) = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$
- $H^*(F) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$
- $Trace(H(F)) = 6.$

Calculando a curvatura gaussiana

$$\begin{aligned}
 K_G &= \frac{(\nabla F) * Hess^*(F) * (\nabla F)^T}{\|\nabla F\|^4} \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}{(4(x^2 + y^2 + z^2))^2} \\
 &= \frac{16(x^2 + y^2 + z^2)}{16(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\
 &= \frac{16r^2}{16r^4} \\
 \therefore K_G &= \frac{1}{r^2}.
 \end{aligned}$$

Calculando a curvatura média

$$\begin{aligned}
 K_M &= \frac{\nabla F * Hess(F) * \nabla F^T - \|\nabla F\|^2 Trace(Hess(F))}{2\|\nabla F\|^3} \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} - 6(4(x^2 + y^2 + z^2))}{2(4(x^2 + y^2 + z^2)^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{8(x^2 + y^2 + z^2) - 24(x^2 + y^2 + z^2)}{2(4(x^2 + y^2 + z^2)^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{8r^2 - 24r^2}{2(8r^3)} \\
 \therefore K_M &= -\frac{1}{r}.
 \end{aligned}$$

## Parte III

### CURVAS GEODÉSICAS

Definiremos, a seguir, as curvas chamadas geodésicas. As curvas geodésicas são trajetórias especiais em espaços tridimensionais que representam o caminho mais curto (ou mais longo) entre dois pontos. Em geometria plana, o caminho mais curto entre dois pontos é uma reta. Já em geometrias curvas, como uma superfície esférica, essa distância pode ser descrita como um semicírculo. O capítulo a seguir é um recorte da dissertação de mestrado da Rosilene Aparecida Felício [7].

#### 8 Geodésica de uma Superfície

**Definição 8.1.** *Uma curva regular  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{M}$  parametrizada pelo comprimento de arco é uma geodésica, se o vetor  $\gamma''(s)$  é perpendicular a superfície no ponto  $\gamma(s), \forall s$ , ou seja,  $\gamma''(s)$  é paralelo ao vetor normal  $N = N \circ \gamma(s)$ .*

**Proposição 8.1.** *Em uma geodésica  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{M}$ , o vetor velocidade  $\|\gamma'(t)\|$  é constante, para qualquer parâmetro  $t$ .*

*Demonstração.* Se  $\gamma(t)$  é uma geodésica então  $\gamma''(t)$  é paralelo a  $N$ , logo  $\gamma'' \perp \gamma'$ . Portanto,  $\gamma'' \bullet \gamma' = 0$ .

Assim,

$$\frac{d}{dt} \|\gamma'(t)\|^2 = \frac{d}{dt} (\gamma' \bullet \gamma') = 2(\gamma'' \bullet \gamma') = 0$$

onde  $\|\gamma'(t)\| = \text{constante}$ . □

#### 9 Equações Diferenciais das Geodésicas

**Definição 9.1.** *Seja  $\gamma(t) = X(u(t); v(t))$  uma curva diferenciável. Então*

$$\gamma'(t) = u' \tilde{x}_u + v' \tilde{x}_v. \tag{9.1}$$

*Diferenciando esta equação, temos*

$$\gamma''(t) = \tilde{x}_{uu} u'^2 + \tilde{x}_u u'' + 2\tilde{x}_{uv} u'v' + \tilde{x}_{vv} v'^2 + \tilde{x}_v v'', \tag{9.2}$$

em que os vetores  $\vec{x}_{uu}$ ,  $\vec{x}_{uv}$  e  $\vec{x}_{vv}$  podem ser expressos na base  $\{\vec{x}_u; \vec{x}_v; N\}$  como segue

$$\begin{cases} \vec{x}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{x}_v + eN, \\ \vec{x}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{x}_v + fN, \\ \vec{x}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{x}_v + gN. \end{cases} \quad (9.3)$$

Os coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $i, j, k=1, 2$  são chamados Símbolos de Christoffel e podem ser determinados em função dos coeficientes da primeira forma fundamental (ver seção 5.5), enquanto que os escalares  $e, f$  e  $g$  são os coeficientes da segunda forma fundamental.

Para determinarmos os símbolos de Christoffel, tomamos o produto interno das três relações com  $\vec{x}_u$  e  $\vec{x}_v$ , e obtemos os três sistemas de equações

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v, \end{cases} \quad (9.4)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u, \end{cases} \quad (9.5)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v, \end{cases} \quad (9.6)$$

em que ao usarmos a Regra de Cramer, encontramos as soluções dos sistemas (9.4), (9.5) e (9.6), isto é, obtemos os símbolos de Christoffel,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2(EG - F^2)} (GE_u - 2FF_u + FE_v), \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2(EG - F^2)} (2EF_u - EE_v - FE_u), \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2(EG - F^2)} (GE_v - FG_u), \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2(EG - F^2)} (EG_u - E_v), \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2(EG - F^2)} (2GF_v - GG_u - FG_v), \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2(EG - F^2)} (EG_v - 2FF_v + FG_u). \end{aligned}$$

Substituindo as equações (9.3) em (9.2), obtemos a expressão para o vetor aceleração  $\gamma''$

na base  $\{\tilde{x}_u; \tilde{x}_v; N\}$

$$\begin{aligned} \gamma'' &= (u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2)\tilde{x}_u + \\ &+ (v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2)\tilde{x}_v + \\ &+ (e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2)N. \end{aligned}$$

Para termos as equações diferenciais que permitem obter as funções  $u(t)$  e  $v(t)$  das geodésicas  $\gamma(t) = x(u(t), v(t))$  de uma superfície regular  $x(u, v)$  basta anularmos as componentes dos vetores  $\tilde{x}_u$  e  $\tilde{x}_v$  do vetor aceleração na equação acima.

Segundo Felício ([7], 2020), dessa forma obteremos o sistema de duas equações diferenciais de segunda ordem que representa as equações de uma geodésica de uma vizinhança coordenada. E isso pode ser visto por meio da seguinte proposição.

**Proposição 9.1** (*Equações Diferenciais das Geodésicas*). *Sejam  $\mathbb{M}$  uma superfície com parametrização local,  $\tilde{x} = x(u, v)$  e  $\gamma(t) = \tilde{x}(u(t), v(t))$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , uma curva diferenciável. Então,  $\gamma$  é uma geodésica de  $\mathbb{M}$  se, e somente se, as funções  $u = u(t)$  e  $v = v(t)$  satisfazem o sistema de equações abaixo:*

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 = 0, \end{cases} \quad (9.7)$$

em que os símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  são calculados em  $(u(t), v(t))$ .

O sistema (9.7) é denominado o *sistema de equações diferenciais das geodésicas de  $\mathbb{M}$* .

*Demonstração.* (Verifique no item A do Apêndice). □

**Proposição 9.2** (*Existência e Unicidade das Geodésicas*). *Dados um ponto  $p$  de uma superfície regular  $\mathbb{M}$  e  $\tilde{w} \in T_p\mathbb{M}$ , existem um intervalo aberto  $I$  contendo a origem e uma única geodésica:  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$ , tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = \tilde{w}$ .*

*Demonstração.* (Verifique no item B do Apêndice). □

## 10 Cilindro Reto

Dado o cilindro reto

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}.$$

Cuja parametrização  $\tilde{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{M}$  é dada por

$$\tilde{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v),$$

em que  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi e - \infty < v < +\infty\}$ . Note que

$$\vec{x}_u = (-\text{sen } u, \cos u, 0) \quad e \quad \vec{x}_v = (0, 0, 1).$$

Portanto,

$$E = \vec{x}_u \bullet \vec{x}_u = 1,$$

$$F = \vec{x}_u \bullet \vec{x}_v = 0,$$

$$G = \vec{x}_v \bullet \vec{x}_v = 1,$$

e os símbolos de Christoffel são

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Assim, o sistema (9.7) para esse cilindro será da forma

$$\begin{cases} u'' = 0 \iff u(t) = a_0 + b_0 t, \\ v'' = 0 \iff v(t) = c_0 + d_0 t. \end{cases} \quad (10.1)$$

Note que,

Se  $b_0 = 0$  e  $d_0 \neq 0$ , então as geodésicas do cilindro são seus meridianos.

Se  $d_0 = 0$  e  $b_0 \neq 0$ , então as geodésicas do cilindro são seus paralelos.

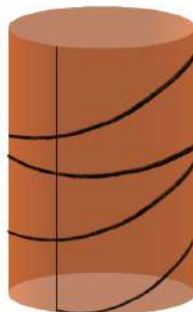
Se  $b_0 \neq 0$  e  $d_0 \neq 0$ , então consideremos o ponto  $p = (1, 0, 0)$  do cilindro.

Então supondo que  $a_0 = c_0 = 0$  fornece o ponto inicial da curva, então em particular tem-se a curva

$$(\cos b_0 t, \text{sen } b_0 t, d_0 t).$$

Daí conclui-se que a curva geodésica consiste em uma hélice. Felício (2020) conclui ainda que as geodésicas do cilindro são os meridianos, os paralelos e as hélices, conforme mostrado na figura abaixo.

Figura 10: Geodésicas do Cilindro.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

## Parte IV

### SUPERFÍCIE SEMI-CICLOIDAL CILÍNDRICA

#### 11 Semi-Ciclóide invertida.

A Figura 11 apresenta uma visualização da superfície semi-cicloidal invertida, gerada utilizando o software GeoGebra. Essa representação gráfica permite uma melhor compreensão da forma e da estrutura da superfície, destacando suas características geométricas e propriedades.

Figura 11: Semi-Ciclóide invertida.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

**Definição 11.1** (Semi-Ciclóide invertida). *É a curva simétrica ao eixo que gera a cicloide, com domínio de  $[0, \pi]$ .*

*Isto é, a curva  $\bar{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$  é a Cicloide e a curva  $\alpha(t) = (x(t), -y(t))$  é a Semi-Cicloide, onde,  $x(t) = r(t - \text{sen}(t))$ ,  $y(t) = r(1 - \text{cos}(t))$ ,  $t \in [0, \pi]$ .*

#### 12 Semi-Cicloidal Cilíndrica

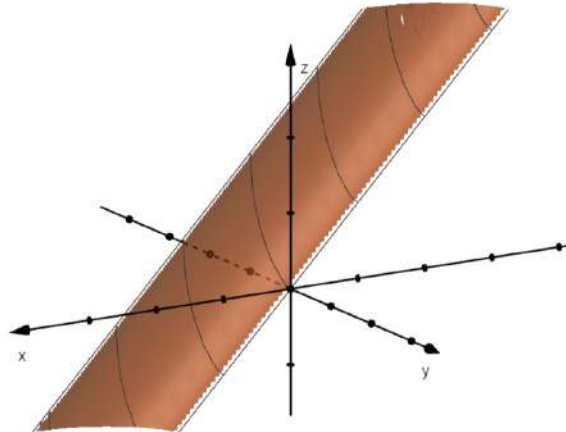
**Definição 12.1** (Superfície Semi-Cicloidal Cilíndrica). *É a superfície gerada por uma reta que se move ao longo de uma curva Semi-Cicloidal invertida, denominada diretriz, paralelamente a uma reta fixa, denominada geratriz.*

**Definição 12.2** (Equação da Superfície Semi-Cicloidal Cilíndrica). *A equação da superfície é a seguinte:*

- A reta geratriz paralela ao eixo  $X$  (Figura 12):

$$F(x, y, z) \equiv r \left( -\sqrt{1 - \left(\frac{z}{r} + 1\right)^2} + \arccos\left(\frac{z}{r} + 1\right) \right) - y = 0. \quad (12.1)$$

Figura 12: Reta geratriz paralela ao eixo  $x$ .

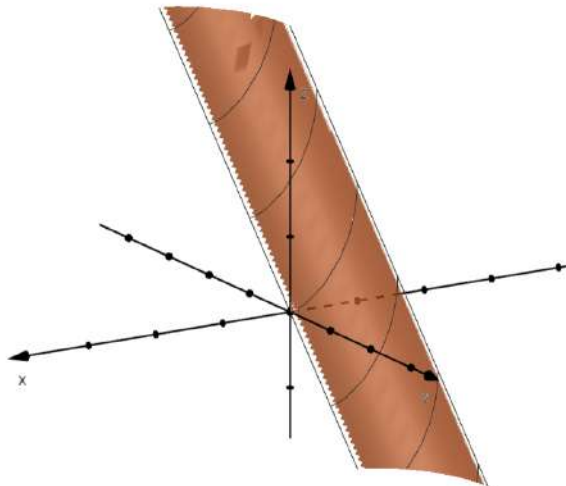


Fonte: Elaborado pelo Autor.

- A reta geratriz paralela ao eixo  $Y$  (Figura 13):

$$F(x, y, z) \equiv r \left( -\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r} + 1\right)^2} + \arccos\left(\frac{x}{r} + 1\right) \right) - z = 0. \quad (12.2)$$

Figura 13: Reta geratriz paralela ao eixo  $y$ .

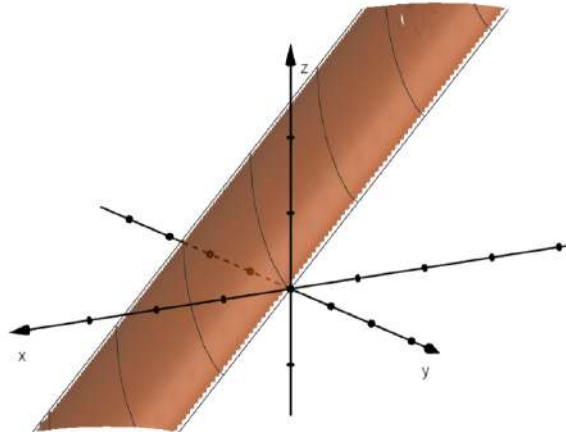


Fonte: Elaborado pelo Autor.

- A reta geratriz paralela ao eixo  $Z$  (Figura 14):

$$F(x, y, z) \equiv r \left( -\sqrt{1 - \left(\frac{y}{r} + 1\right)^2} + \arccos\left(\frac{y}{r} + 1\right) \right) - x = 0. \quad (12.3)$$

Figura 14: Reta geratriz paralela ao eixo  $z$ .



Fonte: Elaborado pelo Autor.

**Teorema 12.1.** *Se  $\alpha$  é uma curva Semi-Ciclóide, então gera a superfície Semi-Cicloidal Cilíndrica.*

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  uma curva Semi-Ciclóide, então  $\alpha(t) = (r(t - \text{sen}(t)), r(\cos(t) - 1))$ ,  $\forall t \in [0, \pi]$ .

Primeiro consideremos a reta geratriz paralela ao eixo  $X$ , então  $y(t) = r(t - \text{sen}(t))$ ,  $y \in [0, \pi]$  e  $z(t) = r(\cos(t) - 1)$ ,  $z \in [-2r, 0]$ . Daí temos que  $t = \arccos(\frac{z}{r} + 1)$ , logo a superfície Semi-Cicloidal Cilíndrica é

$$F(x, y, z) \equiv r \left( -\sqrt{1 - \left(\frac{z}{r} + 1\right)^2} + \arccos\left(\frac{z}{r} + 1\right) \right) - y = 0.$$

Segundo consideremos a reta geratriz paralela ao eixo  $Y$ , então  $x(t) = r(t - \text{sen}(t))$ ,  $x \in [0, \pi]$  e  $z(t) = r(\cos(t) - 1)$ ,  $z \in [-2r, 0]$ . Daí temos que  $t = \arccos(\frac{x}{r} + 1)$ , logo a superfície Semi-Cicloidal Cilíndrica é

$$F(x, y, z) \equiv r \left( -\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r} + 1\right)^2} + \arccos\left(\frac{x}{r} + 1\right) \right) - z = 0.$$

Terceiro consideremos a reta geratriz paralela ao eixo  $Z$ , então  $x(t) = r(t - \text{sen}(t))$ ,  $x \in [0, \pi]$  e  $y(t) = r(\cos(t) - 1)$ ,  $y \in [-2r, 0]$ . Daí temos que  $t = \arccos(\frac{y}{r} + 1)$ , logo a superfície Semi-Cicloidal Cilíndrica é

$$F(x, y, z) \equiv r \left( -\sqrt{1 - \left(\frac{y}{r} + 1\right)^2} + \arccos\left(\frac{y}{r} + 1\right) \right) - x = 0.$$

□

**Teorema 12.2.** *Se  $F(x, y, z) = 0$  é a superfície Semi-Cicloidal Cilíndrica, então a família de geodésicas é  $g(t) = (r(u(t) - \text{sen}(u(t))), r(\cos(u(t)) - 1), v(t))$ , tais que*

$$\begin{cases} u(t) = -2\arccos(c_2(c_1 + t)), \\ v(t) = c_3t + c_4. \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} u(t) = 2\arccos(c_2(c_1 + t)), \\ v(t) = c_3t + c_4, \end{cases}$$

sendo  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$  são constantes.

*Demonstração.* Seja a superfície Semi-Cicloidal Cilíndrica cuja parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é definida por

$$X(u, v) = (r(u - \operatorname{sen}(u)), r(\cos(u) - 1), v)$$

onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < \pi, v \in \mathbb{R}\}$ .

Então, temos que

$$\begin{aligned} \vec{X}_u &= (r(1 - \cos(u)), -r \operatorname{sen}(u), 0) \\ \vec{X}_v &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Portanto, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned} E &= r^2(1 - \cos(u))^2 + r^2 \operatorname{sen}^2(u), \\ F &= 0, \\ G &= 1, \end{aligned}$$

e os símbolos de Christoffel são

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\operatorname{sen}(u)}{2(1 - \cos(u))} \\ \Gamma_{11}^2 &= \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, o sistema das equações diferenciais das geodésicas da superfície em questão será:

$$\begin{cases} u'' + \left( \frac{\operatorname{sen}(u)}{2(1 - \cos(u))} \right) (u')^2 = 0, \\ v'' = 0. \end{cases}$$

Agora, para resolver a E.D.O

$$u'' + \left( \frac{\text{sen}(u)}{2(1 - \cos(u))} \right) (u')^2 = 0,$$

usaremos as identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \text{sen}(u) &= 2\text{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right); \\ 1 - \cos(u) &= 2\text{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$u'' + \left( \frac{2\text{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right)}{2(2\text{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right))} \right) (u')^2 = 0 \quad (12.4)$$

$$u'' + \left( \frac{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{u}{2}\right)} \right) u' \cdot u' = 0. \quad (12.5)$$

Multiplicando (12.5) em ambos lados por  $\left( -\frac{\text{sen}\left(\frac{u}{2}\right)}{2} \right)$ , temos

$$\begin{aligned} -\cos\left(\frac{u}{2}\right) \frac{u'}{2} \cdot \frac{u'}{2} - \text{sen}\left(\frac{u}{2}\right) \frac{u''}{2} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( -\text{sen}\left(\frac{u}{2}\right) \frac{u'}{2} \right) &= 0 \\ \int d \left( -\text{sen}\left(\frac{u}{2}\right) \frac{u'}{2} \right) &= 0 \\ -\text{sen}\left(\frac{u}{2}\right) \frac{u'}{2} &= c_1 \\ \frac{d}{dt} \left( \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right) &= c_1 \end{aligned}$$

integrando em ambos lados, tem-se

$$\begin{aligned} \int d \left( \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right) &= \int c_1 dt \\ \cos\left(\frac{u}{2}\right) &= c_1 t + c_1 c_2 \\ \frac{u}{2} &= \arccos(c_1 + c_2 t) \\ \therefore u(t) &= 2\arccos(c_1 + c_2 t). \end{aligned}$$

Por outro lado, das seguinte identidade, temos

$$\cos\left(\frac{u}{2}\right) = \cos\left(-\frac{u}{2}\right) = c_1 t + c_1 c_2.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{u}{2}\right) &= c_1 t + c_1 c_2 \\ -\frac{u}{2} &= \arccos(c_1 + c_2 t) \\ \therefore u(t) &= -2\arccos(c_1 + c_2 t).\end{aligned}$$

Agora, resolvendo a E.D.O

$$\begin{aligned}v''(t) &= 0 \\ \int d(v'(t)) &= 0 \\ v'(t) &= c_3,\end{aligned}$$

integrando em ambos lados

$$\int dv = c_3 dt \tag{12.6}$$

$$v(t) = c_3 t + c_4. \tag{12.7}$$

Portanto,

$$\begin{cases} u(t) = -2\arccos(c_2(c_1 + t)), \\ v(t) = c_3 t + c_4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u(t) = 2\arccos(c_2(c_1 + t)), \\ v(t) = c_3 t + c_4, \end{cases}$$

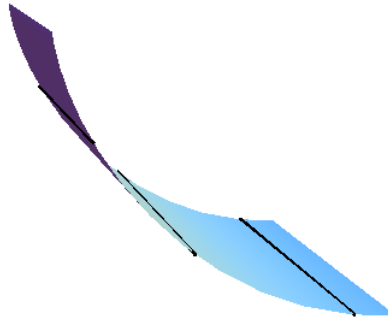
sendo  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  constantes.

Daí, temos as famílias de geodésicas i), ii) e iii), abaixo descritas e representadas geometricamente com auxílio do software Wolfram Mathematica.

i) Famílias de retas são geodésicas (Veja a Figura 15), com  $c_1 = 0$ ,  $-1 \leq c_2 \leq 1$ ,  $c_3 \neq 0$  e  $c_4 \in \mathbb{R}$ .

$$g(t) = \left(2\arccos(c_1 t + c_2) - \sin(2\arccos(c_1 t + c_2)), r(\cos(2\arccos(c_1 t + c_2)) - 1), c_3 t + c_4\right)$$

Figura 15: Geodésicas tipo retas.

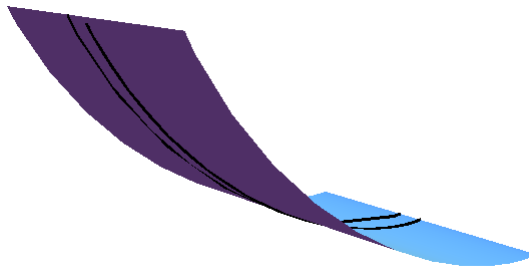


Fonte: Elaborado pelo Autor.

- ii) A família de curvas semi-ciclóides invertidas é geodésica (Veja a Figura 16), com  $c_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $c_3 = 0$  e  $c_4 \in \mathbb{R}$ .

$$g(t) = (2\arccos(c_1t + c_2) - \sin(2\arccos(c_1t + c_2)), r(\cos(2\arccos(c_1t + c_2)) - 1), c_3t + c_4)$$

Figura 16: Geodésicas tipo semi-ciclóides.

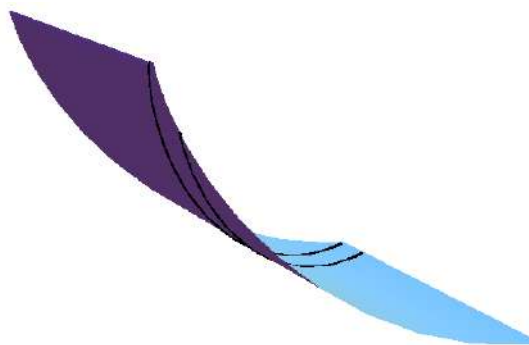


Fonte: Elaborado pelo Autor.

- iii) A família de hélices é geodésica (Veja a Figura 17), com  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $c_3 \neq 0$  e  $c_4 \in \mathbb{R}$ .

$$g(t) = (2\arccos(c_1t + c_2) - \sin(2\arccos(c_1t + c_2)), r(\cos(2\arccos(c_1t + c_2)) - 1), c_3t + c_4)$$

Figura 17: Geodésicas tipo hélices.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

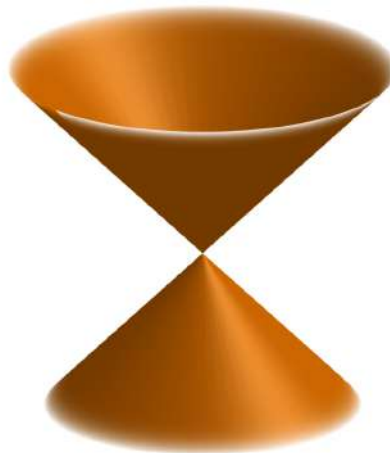
## Parte V

### APLICAÇÕES

#### 13 Cone

A seguir, aplicaremos os conceitos de curvatura gaussiana e curvatura média à superfície de um cone (Figura 18), um exemplo clássico de superfície geométrica.

Figura 18: Cone Reto.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

**Problema 13.1.** *Calcular a curvatura gaussiana e a curvatura média do cone*

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2.$$

*Solução* : Temos que

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0.$$

Assim,

- $\nabla F = (F_x \quad F_y \quad F_z) = \left( \frac{2x}{a^2} \quad \frac{2y}{b^2} \quad -2z \right),$
- $H(F) = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$
- $H^*(F) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{a^2 b^2} \end{pmatrix},$
- $Trace(H(F)) = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} - 2.$

Calculando a curvatura gaussiana

$$\begin{aligned}
 K_G &= \frac{(\nabla F) * Hess^*(F) * (\nabla F)^T}{\|\nabla F\|^4} \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & -2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{a^2 b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \\ -2z \end{pmatrix}}{(4(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + z^2))^2} \\
 &= \frac{-\frac{16x^2}{a^4 b^2} - \frac{16y^2}{a^2 b^4} + \frac{16z^2}{a^2 b^2}}{16(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + z^2)^2} \\
 &= \frac{\cancel{\frac{16}{a^2 b^2} (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2)}}{16(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + z^2)^2} \xrightarrow{0} \\
 \therefore K_G &= 0.
 \end{aligned}$$

Calculando a curvatura média

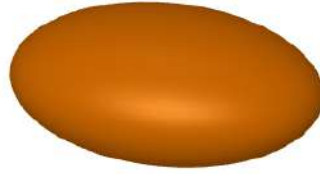
$$\begin{aligned}
 K_M &= \frac{\nabla F * Hess(F) * \nabla F^T - \|\nabla F\|^2 Trace(Hess(F))}{2\|\nabla F\|^3} \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & -2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \\ -2z \end{pmatrix} - (\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} - 2)(16(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + z^2))}{2(16(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + z^2)^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{\frac{8x^2}{a^6} + \frac{8y^2}{b^6} - 8z^2 - (\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} - 2)(16(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + z^2))}{128(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + z^2)^3} \\
 &= \frac{8(\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} - z^2) - 16(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} - 2)(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + z^2)}{128(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + z^2)^3} \\
 \therefore K_M &= \frac{(\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} - z^2) - 4(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - 1)(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + z^2)}{16(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + z^2)^3}.
 \end{aligned}$$

## 14 Elipsóide.

A seguir, aplicaremos os conceitos de curvatura gaussiana e curvatura média à superfície de um elipsóide (Figura 19), uma superfície geométrica que apresenta uma forma mais complexa e interessante. Para isso, considere o elipsóide cuja equação é dada por:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Figura 19: Elipsóide.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

**Problema 14.1.** *Calcular a curvatura gaussiana e a curvatura média do elipsóide*

*Solução* : Para calcular a curvatura gaussiana, temos que

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Assim,

- $\nabla F = (F_x \quad F_y \quad F_z) = \left( \frac{2x}{a^2} \quad \frac{2y}{b^2} \quad \frac{2z}{c^2} \right),$
- $H(F) = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{c^2} \end{pmatrix},$
- $H^*(F) = \begin{pmatrix} (-1)^2 \frac{4}{b^2 c^2} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^4 \frac{4}{a^2 c^2} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^6 \frac{4}{a^2 b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{b^2 c^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{a^2 c^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{a^2 b^2} \end{pmatrix},$
- $Trace(H(F)) = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{2}{c^2}.$

Calculando a curvatura gaussiana

$$\begin{aligned}
K_G &= \frac{(\nabla F) * Hess^*(F) * (\nabla F)^T}{\|\nabla F\|^4} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{b^2c^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{a^2c^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{a^2b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \\ \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix}}{\left(4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)\right)^2} \\
&= \frac{\left(\frac{16x^2}{a^4b^2c^2} + \frac{16y^2}{a^2b^4c^2} + \frac{16z^2}{a^2b^2c^4}\right)}{16\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^2} \\
&= \frac{\left(\frac{x^2}{a^4b^2c^2} + \frac{y^2}{a^2b^4c^2} + \frac{z^2}{a^2b^2c^4}\right)}{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{(abc)^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)}{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^2} \\
\therefore K_G &= \frac{1}{(abc)^2} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-2}.
\end{aligned}$$

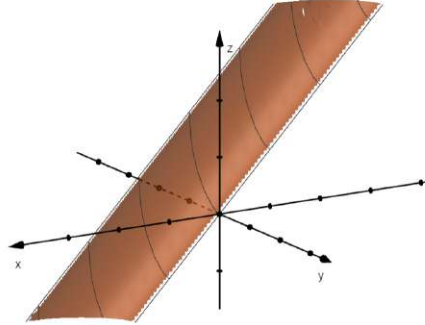
Calculando a curvatura média

$$\begin{aligned}
K_M &= \frac{\nabla F * Hess(F) * \nabla F^T - \|\nabla F\|^2 Trace(Hess(F))}{2\|\nabla F\|^3} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \\ \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix} - \left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{2}{c^2}\right) \left(\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4} + \frac{4z^2}{c^4}\right)}{2\left(\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4} + \frac{4z^2}{c^4}\right)^{3/2}} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} \frac{4x}{a^4} & \frac{4y}{b^4} & \frac{4z}{c^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \\ \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix} - 8\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)}{16\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}} \\
&= \frac{8\left(\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} + \frac{z^2}{c^6}\right) - 8\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)}{16\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}} \\
&= \frac{8\left(\left(\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} + \frac{z^2}{c^6}\right) - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)\right)}{16\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}} \\
\therefore K_M &= \frac{\left(\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} + \frac{z^2}{c^6}\right) - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)}{2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

## 15 Semi-cicloidial Cilíndrica.

A seguir, aplicaremos os conceitos de curvatura gaussiana e curvatura média à superfície semi-cicloidial cilíndrica paralela ao eixo  $z$  (Figura 20).

Figura 20: Semi-Cicloidial Cilíndrica paralela ao eixo  $z$ .



Fonte: Elaborado pelo Autor.

**Problema 15.1.** *Calcular a Curvatura Gaussiana e a Curvatura Média da superfície Semi-Cicloidial Cilíndrica paralela ao eixo  $z$ :*

*Solução* : Do Teorema [12.1](#), a superfície em questão é:

$$F(x, y, z) \equiv r \left( -\sqrt{1 - \left(\frac{z}{r} + 1\right)^2} + \arccos\left(\frac{z}{r} + 1\right) \right) - x = 0.$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned} F_x &= -1, \\ F_y &= 0, \\ F_z &= -\frac{z}{\sqrt{-z(z+2r)}}. \end{aligned}$$

Assim,

- $\nabla F = (F_x \ F_y \ F_z) = \left(-1 \ 0 \ -\frac{z}{\sqrt{-z(z+2r)}}\right),$
- $Hess(F) = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{rz}{\sqrt{(-z(z+2r))^3}} \end{pmatrix},$
- $Hess^*(F) = 0,$
- $Trace(Hess(F)) = -\frac{rz}{\sqrt{(-z(z+2r))^3}},$

Calculando a Curvatura Gaussiana

$$K_G = \frac{(\nabla F) * Hess^*(F) * (\nabla F)^T}{\|\nabla F\|^4}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{z}{\sqrt{-z(z+2r)}} \end{pmatrix} * 0 * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{z}{\sqrt{-z(z+2r)}} \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{z}{\sqrt{-z(z+2r)}} \end{pmatrix} \right\|^4}$$

$$\therefore K_G = 0.$$

Calculando a Curvatura Média

$$\begin{aligned} \nabla F * Hess(F) * \nabla F^T &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{-z}{\sqrt{-z(z+2r)}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-z}{\sqrt{(-z(z+2r))^3}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{-z}{\sqrt{-z(z+2r)}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{(z+2r)^2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{-z}{\sqrt{-z(z+2r)}} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{-z}{(z+2r)^5}} \end{aligned}$$

$$\therefore \nabla F * Hess(F) * \nabla F^T = \sqrt{\frac{-z}{(z+2r)^5}}. \quad (15.1)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla F\|^2 Trace(Hess(F)) &= \left\| \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{-z}{\sqrt{-z(z+2r)}} \end{pmatrix} \right\|^2 \left( \frac{-z}{\sqrt{(-z(z+2r))^3}} \right) \\ &= \left( \frac{2r}{z+2r} \right) \left( \frac{-z}{\sqrt{(-z(z+2r))^3}} \right) \\ &= 2r \sqrt{\frac{-z}{(z+2r)^5}} \end{aligned}$$

$$\therefore \|\nabla F\|^2 Trace(Hess(F)) = 2r \sqrt{\frac{-z}{(z+2r)^5}}. \quad (15.2)$$

Substituindo (15.1), (15.2) em (7.1), temos:

$$K_M = \frac{\sqrt{\frac{-z}{(z+2r)^5}} - 2r\sqrt{\frac{-z}{(z+2r)^5}}}{2\left(\frac{2r}{z+2r}\right)^{3/2}}$$

$$\therefore K_M = -\frac{1-2r}{2(z+2r)}\sqrt{\frac{-z}{(2r)^3}}.$$

**Problema 15.2.** Encontre o sistema das equações diferenciais das geodésicas do cilindro elíptico cuja parametrização é dada por  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$X(u, v) = (a \cos(u), b \sin(u), v)$$

onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; v \in \mathbb{R}, 0 < u < 2\pi\}$ .

*Solução* : Determinamos

$$\vec{X}_u = (-a \sin(u), b \cos(u), 0),$$

$$\vec{X}_v = (0, 0, 1).$$

Portanto, os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$E = (a \sin(u))^2 + (b \cos(u))^2,$$

$$F = 0,$$

$$G = 1,$$

e os símbolos de Christoffel são:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{a^2 \sin(2u) - b \cos(2u)}{2(a^2 \sin^2(u) + b^2 \cos^2(u))}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Portanto, o sistema das equações diferenciais das geodésicas do cilindro elíptico em questão será:

$$\begin{cases} u'' + \left( \frac{a^2 \sin(2u) - b \cos(2u)}{2(a^2 \sin^2(u) + b^2 \cos^2(u))} \right) (u')^2 = 0, \\ v'' = 0. \end{cases}$$

**Problema 15.3.** *Encontre o sistema de equações diferenciais das geodésicas da superfície semi-cicloidial cilíndrica cuja parametrização é dada por  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  e  $X$  é definida por*

$$X(u, v) = (r(u - \operatorname{sen}(u)), r(\cos(u) - 1), v)$$

onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < \pi, v \in \mathbb{R}\}$ .

*Solução* : Temos que

$$\begin{aligned}\vec{X}_u &= (r(1 - \cos(u)), -r \operatorname{sen}(u), 0) \\ \vec{X}_v &= (0, 0, 1).\end{aligned}$$

Portanto, os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$\begin{aligned}E &= r^2(1 - \cos(u))^2 + r^2 \operatorname{sen}^2(u), \\ F &= 0, \\ G &= 1,\end{aligned}$$

e os símbolos de Christoffel são:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{\operatorname{sen}(u)}{2(1 - \cos(u))} \\ \Gamma_{11}^2 &= \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0.\end{aligned}$$

Portanto, o sistema das equações diferenciais das geodésicas da superfície em questão será:

$$\begin{cases} u'' + \left( \frac{\operatorname{sen}(u)}{2(1 - \cos(u))} \right) (u')^2 = 0, \\ v'' = 0. \end{cases}$$

A solução do sistema acima, bem como a representação da família das geodésicas, podem ser vistas na resolução do Teorema [12.2](#).

## 16 Telhados Curvos

Mostraremos uma aplicação da superfície Semi-Cicloidal Cilíndrica em um projeto arquitetônico. Essa aplicação consiste em construir um molde de telhado curvo para casas convencionais no formato de semi-cicloidal cilíndrico invertido.

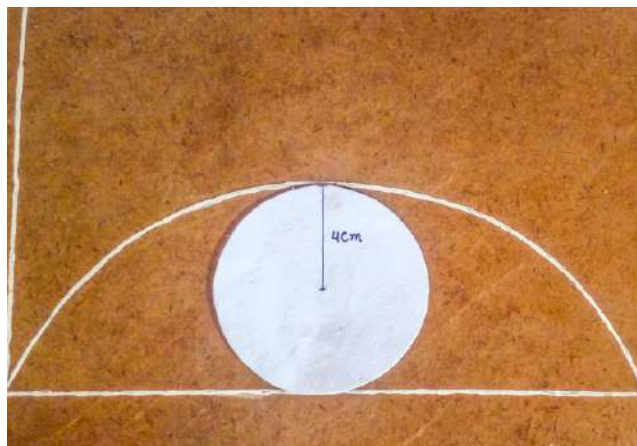
### Material Utilizado:

- Lápis e borracha;
- Régua;
- Compasso;
- Tubo PVC liso;
- Pedacos de MDF ou papelão;
- Tintas para colorir;
- Cola apropriada.

### Construção dos moldes:

Para a construção da superfície, precisaremos de uma circunferência com 4 centímetros de raio. A cicloide é a curva descrita pelo ponto  $p$  quando a circunferência rola sobre a reta horizontal sem deslizar (Figura 21).

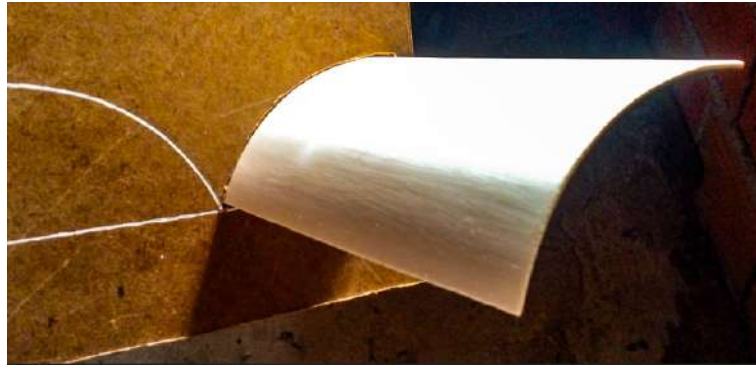
Figura 21: Construção da curva Cicloide.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Recortamos o tubo PVC liso, cuja largura é exatamente a medida da metade da curva cicloide (conforme a Figura 22). Neste experimento, utilizamos um tubo com 13 centímetros de comprimento. Colamos os moldes e os pintamos para destacar o formato de uma casa com telhado curvo (Figura 23).

Figura 22: Construção da Superfície Semi-cicloidal Cilíndrica.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 23: Aplicação da superfície semi-cicloidal cilíndrica em telhados curvos.



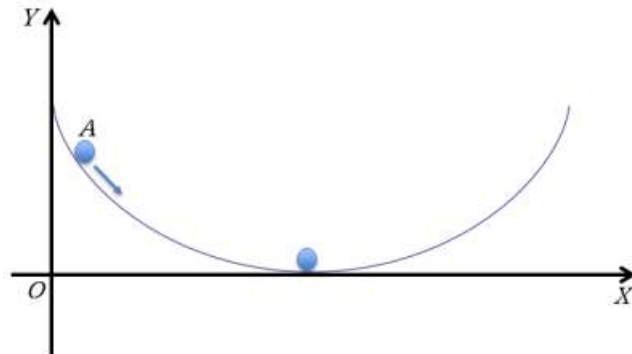
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Telhados curvos oferecem muitas vantagens. São conhecidos por sua estética moderna e inovadora. Além disso, ajudam na drenagem da água da chuva, evitando problemas de infiltração. Em climas quentes, a curvatura pode facilitar a circulação do ar, reduzindo a temperatura interna. Muitas dessas vantagens devem-se a descoberta da cicloide que, conseqüentemente, permitiu dar resposta a outros dois problemas da física, nomeadamente, o da curva braquistócrona e o da curva tautócrona ([12], 2015).

De acordo com a propriedade tautócrona, independente do ponto escolhido da

ciclóide o tempo que a partícula leva para chegar no ponto mais baixo da curva é constante e igual para todos os pontos escolhidos.

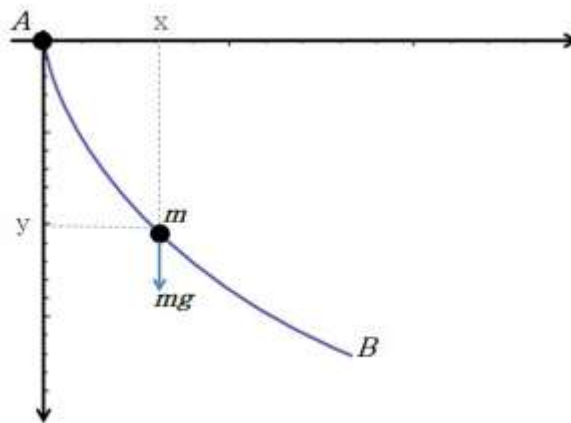
Figura 24: Curva Tautócrona.



Fonte: (Venceslau, 2015).

Tem-se também que, uma curva é braquistócrona se o caminho que une dois pontos da mesma é o mais rápido, mesmo não sendo necessariamente o mais curto. Dessa forma, ao deixarmos cair uma partícula de um ponto A numa curva braquistócrona, esta chega a um ponto B da mesma mais rapidamente do que seguindo qualquer outro caminho, mesmo que este seja retilíneo.

Figura 25: Curva Braquistócrona.



Fonte: (Venceslau, 2015).

## CONCLUSÃO

Conclui-se que o estudo das Curvaturas e das Curvas Geodésicas, permite compreender como as superfícies se curvam e se relacionam em espaços mais complexos. O cálculo das Curvaturas, com a utilização das fórmulas fornecidas por Goldman ([8], 2005), mostra-se como um método mais simples e eficaz do que com as fórmulas tradicionais no estudo das curvaturas implícitas. E os Símbolos de Christoffel, foram peças fundamentais na determinação dos sistemas que descrevem as Curvas Geodésicas de tais superfícies.

No entanto, o conhecimento prévio de certos conceitos preliminares como a parametrização das superfícies e as Formas Fundamentais são fatores determinantes para o conhecimento desses tópicos de Geometria Diferencial. Além disso, uma boa base em matemática básica, Cálculo Diferencial e Álgebra Linear foram primordiais no desenvolvimento e interpretação dos resultados contidos neste trabalho. É proveitoso relembrar e utilizar os conhecimentos obtidos na graduação em pesquisas nas áreas com tanta aplicabilidade como a Geometria. Naturalmente, o objetivo aqui colocado só foi possível ser atingido por meio do esforço, da dedicação e da fascinação pela Geometria Diferencial.

Neste trabalho ficou nítido que a matemática sempre esteve longe de ser uma ciência sem aplicabilidade. Ademais, foi possível conhecer algumas superfícies de curvatura gaussiana nula, como o Cone e a Semi-Cicloidial Cilíndrica. Além disso, pôde ser visto, por meio dos sistemas de equações, as Curvas Geodésicas dessa superfície e também uma forma interessante de perceber a aplicação desses resultados no experimento do telhado curvo.

Para finalizar, este trabalho contribuiu para uma melhor compreensão da superfície semi-cicloidial, explorando suas propriedades geométricas e analíticas. No entanto, uma questão importante ainda permanece em aberto: *A superfície Semi-Cicloidial Cilíndrica é uma Superfície Mínima?*

As Superfícies Mínimas são objetos matemáticos fascinantes que têm sido estudados por séculos. Elas são caracterizadas por terem uma curvatura média nula em todos os pontos, o que as torna extremamente estáveis e eficientes em termos de área. Algumas das principais características das Superfícies Mínimas incluem a sua capacidade de minimizar a área de superfície, a sua estabilidade frente a perturbações e a sua relação com a teoria da elasticidade e da física de fluidos.

A resposta à pergunta sobre se a superfície Semi-Cicloidial Cilíndrica é uma Superfície Mínima pode ter implicações significativas em diversas áreas, incluindo a física, a engenharia e a matemática. Portanto, este trabalho deixa em aberto a possibilidade de futuras investigações sobre essa questão, esperando que as descobertas aqui apresentadas possam inspirar novas pesquisas e avanços nessa área.

## Referências

- [1] BRUXEL, Daniel Argeu. **Um estudo sobre curvas geodésicas**. Orientadora: Rosane Rossato Binotto. 2018.
- [2] CURVATURA Gaussiana. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Curvaturagaussiana>. Acesso em: 25 set 2024.
- [3] CURVATURA Média. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Curvaturamédia>. Acesso em: 25 set 2024.
- [4] do Carmo, M. P., Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, SBM 2005.
- [5] D. F. Lawden. **Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology**. Third Edition - University of Aston in Birmingham, U.K.
- [6] DE LIMA, R.F. . **Introdução à Geometria Diferencial**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1. 139p .
- [7] FELICIO, Rosilene Aparecida. **Sobre curvas de curvatura geodésica constante em variedades bidimensionais**. Orientadora: Gilcione Nonato Costa. 2020.
- [8] GOLDMAN, Ron. **Curvature formulas for implicit curves and surfaces**, Computer Aided Geometric Design, v. 22, Issue 7, 2005.
- [9] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**, vol. 2. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- [10] MASSAGO, Sadao. **Matriz Hessiana e Aplicações**. Dezembro de 2010. Notas de aula.
- [11] TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. São Paulo: Blucher, 2008.
- [12] VENCESLAU, Allisson Wesley do Nascimento. **Curvas parametrizadas, ciclóides, experimentos e aplicações**. Orientadora: Débora Lopes da Silva.-São Cristóvão, 2015.

## APÊNDICE

### A - DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 9.1

*Demonstração.* Temos que  $\gamma' = u'X_u + v'X_v$  em que  $X_u = X_u(u(t), v(t))$  e  $X_v = X_v(u(t), v(t))$ . Dessa forma,

$$\gamma'' = u''X_u + (u')^2X_{uu} + 2u'v'X_{uv}.$$

Denotando-se, então, por  $(\gamma''(t))^T$  a componente tangencial de  $\gamma''(t)$ , isto é, sua projeção ortogonal sobre  $T_{\gamma(t)}S$ , e considerando-se as igualdades (9.3), tem-se

$$\begin{aligned} (\gamma'')^T &= (u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1)X_u \\ &\quad + (v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2)X_v. \end{aligned}$$

donde infere-se que  $v$  é uma geodésica de  $S$  se, e somente se,  $u$  e  $v$  satisfazem as equações (9.7). □

### B - DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 9.2

*Demonstração.* Consideremos uma parametrização local de  $S$  em  $p$ ,  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$ , e ponhamos

$$(u_0, v_0) = X^{-1}(p) \quad e \quad (a, b) = (dX_{(u_0, v_0)})^{-1}w$$

Observemos, então, que as equações diferenciais das geodésicas, dadas em (9.7), são do tipo

$$\begin{cases} u'' = f_1(u, v, u', v') \\ v'' = f_2(u, v, u', v') \end{cases}, \quad (16.1)$$

em que  $f_1$  e  $f_2$  são funções diferenciáveis. Assim, dadas as condições iniciais

$$(u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \quad e \quad (u'(0), v'(0)) = (a, b), \quad (16.2)$$

pelo teorema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias, existem um intervalo  $I \ni 0$  e uma única solução  $(u(t), v(t))$ ,  $t \in I$ , de (16.1), a qual cumpre as condições iniciais (16.2). Dessa forma, a curva  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in I$  é a única geodésica de  $S$ , a qual cumpre as condições

$$\gamma(0) = X(u_0, v_0) = p \quad e \quad \gamma'(0) = dX_{(u_0, v_0)}(a, b) = w,$$

concluindo, assim, a demonstração. □