



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

VINÍCIUS LIMA DOS SANTOS

SISTEMAS DINÂMICOS: DA POEIRA DE CANTOR AO CAOS DE DEVANEY

BELÉM

2021

VINÍCIUS LIMA DOS SANTOS

SISTEMAS DINÂMICOS: DA POEIRA DE CANTOR AO CAOS DE DEVANEY

Trabalho de conclusão de curso apresentado para obtenção do grau de Licenciado(a) em Matemática da Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento.

BELÉM

2021

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

VINÍCIUS LIMA DOS SANTOS

SISTEMAS DINÂMICOS: DA POEIRA DE CANTOR AO CAOS DE DEVANEY

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado(a) Pleno(a) em Matemática da Universidade Federal do Pará, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento

Departamento de Matemática, UFPA - Orientador

Prof. Dr. Marcel Vinhas Bertolini

Departamento de Matemática, UFPA - Membro

Prof. Dr. Jean Carlos de Aguiar Lelis

Departamento de Matemática, UFPA - Membro

DATA DA AVALIAÇÃO: ____ / ____ / ____

CONCEITO: _____

*À minha família, ao meu orientador,
aos meus amigos, aos meus pro-
fessores, e principalmente à minha
mãe.*

"Remember when you were young, you shone like the sun. Shine on you crazy diamond!"

David Gilmour, Roger Waters e Richard Wright.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter nos dado saúde e me dado a oportunidade de conhecer as pessoas que tanto contribuíram para superação das adversidades.

À minha família, e essencialmente aos meus pais, Sheyla Santos de Lima e Jamilson Alves dos Santos pelo amor, dedicação, e definitivamente por tudo e sempre.

Aos meus amigos, Fábio Luis, Giovanna Barros, Jan Roberto e Lucas Villar. Mas também, em especial, aos meus amigos da graduação, os quais me acompanharam em momentos importantíssimos na trajetória do curso: Ana Cláudia Carrilho, Barbara Maia, Denner Wueller, Ennyo Vinicios, Everton Silva, Isabelle Costa, João Ventura, José Leandro, Marcélia Carvalho, Silvano Leonardo e Thayná Nunes. Vos agradeço pela confiança, pelo carinho, pelo incentivo e pela companhia.

Aos membros da banca, ao Prof. Dr. Jean Lelis pela participação; e ao Prof. Dr. Marcel Vinhas Bertolini, cujos ensinamentos também inspiraram a minha jornada acadêmica.

A esta universidade, direção, administração e, principalmente, meus professores, que oportunizaram experiências necessárias para minha excelente formação. Com menções especiais aos professores Dr. Alex Sierra Cardenas, Dra. Cristiane Ruiz, Dra. Cristina Vaz, Dra. Irene Castro Pereira, Dr. João Claudio Brandemberg, Dra. Joelma Morbach, Dr. José Antônio Vilhena, Dr. José Miguel Martins Veloso, Dr. Juaci Picanço da Silva, Dr. Marcel Vinhas Bertolini, Dr. Marcos Monteiro Diniz, Dr. Paulo Vilhena, Dr. Rogélio Benavides Guzman e Dra. Tania Madeleine Begazo Valdivia.

Ao Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento pela oportunidade, pelo incentivo, pelo tempo dedicado, pela paciência e por todo o profundo aprendizado e conhecimento proporcionado. Mas também, pela compreensão, cuidado e amizade que demonstrou em um dos momentos mais difíceis da minha vida.

RESUMO

Este trabalho foi elaborado vislumbrando a contribuição para o conhecimento e compreensão da Teoria dos Sistemas Dinâmicos em baixa dimensão, no Ensino Superior. O mesmo é consecutivo de estudos bibliográficos e apresentações de trabalhos em eventos, como o Congresso Pan-Amazônico de Matemática (COPAM) de 2018, cujo se desenvolveu por três anos sobre o referido tema. Foi realizado um estudo em consonância à teoria de Robert Devaney acerca de algumas famílias de aplicações fundamentais, como a Baker, a Tenda e, essencialmente, a Logística da Família Quadrática, com viés de comprovar suas naturezas caóticas. As principais referências são os livros-texto de (Devaney, 2003) e (Alligood, Sauer, Yorke, 1996), cujas finalidades são apresentar consequências que culminem em comportamentos com as seguintes características globais: alta regularidade; alta aleatoriedade; alta mistura de órbitas – comportamentos que uníssonos posteriormente compreenderemos como caóticos. E por fim, tais resultados da teoria de sistemas dinâmicos que submeteremos e demonstraremos são importantes vislumbrando a contribuição às componentes curriculares da graduação. Desse modo, uma vez compreendido que embora nem sempre seja possível evidenciar explicitamente os tópicos da Dinâmica abordados na graduação, o estudo pautado neste trabalho faz-se necessário mediante carência de abordagens explícitas na graduação.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos. Caos. Família Quadrática. Conjuntos de Cantor. Expoente de Lyapunov.

ABSTRACT

This research was elaborated envisioning the contribution to the knowledge and understanding of the Theory of Dynamical Systems in low dimension, in Higher Education. This work is consecutive of bibliographic studies and presentations in events, such as the Pan-Amazonian Congress of Mathematics (COPAM) 2018 - which developed for three years on this topic. A study was conducted in line with Robert Devaney's theory about some families of fundamental applications, such as Baker, Tent and, essentially, Quadratic Family Logistics, with a bias of proving their chaotic behaviors. The main references are the textbooks of (Devaney, 2003) and (Alligood, Sauer, Yorke, 1996), whose purposes are to present consequences that culminate in behaviors with the following global characteristics: high regularity; high randomness; high mixture of orbits – behaviors that we will later understand as chaotic. Finally, such results of dynamic systems theory that we will submit and demonstrate are important envisioning the contribution to the curricular components of the undergraduate course. Thus, once it is understood that although it is not always possible to explicitly highlight the dynamics topics addressed in the undergraduate course, the study based on this work is necessary through the lack of explicit approaches in the undergraduate course.

Keywords: Dynamical Systems. Chaos. Quadratic Family. Cantor sets. Lyapunov Exponent.

LISTA DE SÍMBOLOS

- Final de demonstração.
- $:=$ É por definição igual a.
- Final de solução.
- f^n N-ésimo iterado
- Id Aplicação Identidade
- O Conjunto órbita
- W^s e W^u Conjunto Estável e Instável
- \mathbb{C} Conjunto dos Números Complexos
- Fix Conjunto dos pontos fixos
- \mathbb{N} Conjunto dos Números Naturais.
- Per_n Conjunto dos pontos periódicos de período n
- \mathbb{Q} Conjunto dos Números Racionais.
- \mathbb{R} Conjunto dos Números Reais.
- S^1 Círculo unitário no plano
- \mathbb{Z} Conjunto dos Números Inteiros.

SUMÁRIO

	Página
INTRODUÇÃO	13
1 UM POUCO DE HISTÓRIA E ALGUNS MATEMÁTICOS	16
1.1 Da concepção do zero às noções de sistemas de numeração	16
1.1.1 A descoberta do zero mais antigo	16
1.1.2 Sistemas de Numeração	20
1.2 Breve biografia de Georg Cantor	24
1.3 Breve biografia de Robert Devaney	27
2 O CANTOR TRIÁDICO	31
2.1 O Conjunto de Cantor Triádico	31
2.1.1 Obtenções de Conjuntos de Cantor Triádico	31
2.1.2 Noções topológicas do conjunto de Cantor Triádico	38
3 INTRODUÇÃO À DINÂMICA UNIDIMENSIONAL	43
3.1 Definindo a dinâmica	43
3.1.1 Um sistema dinâmico	44
3.1.2 Conjuntos: das órbitas, dos pontos periódicos e dos pontos fixos	45
3.1.3 Conjuntos limite	53
4 HIPERBOLICIDADE	57
4.1 Dinâmica no Círculo	57
4.2 Rotações sobre o círculo unitário	62
4.3 Hiperbolicidade	69
4.3.1 Hiperbolicidade em \mathbb{C}	77

5	APLICAÇÕES FUNDAMENTAIS	83
5.1	Aplicação Baker	83
5.2	Aplicação Tenda	87
5.3	Aplicação Quadrática	93
6	CONJUNTO DE CANTOR E DINÂMICA SIMBÓLICA	98
6.1	Conjunto de Cantor	98
6.2	Dinâmica Simbólica	104
7	CONJUGAÇÃO TOPOLÓGICA	110
7.1	Conjugação Topológica	110
8	CAOTICIDADE	125
8.1	Aplicação caótica	126
8.1.1	Transitividade Topológica	126
8.1.2	Dependência Sensível às Condições Iniciais	127
8.1.3	Aplicação Caótica	129
8.2	Órbita caótica	135
8.2.1	Expoente de Lyapunov	136
8.2.2	Órbita Caótica	142
9	CONSIDERAÇÕES	146
	REFERÊNCIAS	149

INTRODUÇÃO

Presentemente, o objeto de estudo desta pesquisa é *Teoria dos Sistemas Dinâmicos*, cuja é resultante de projetos de estudos bibliográficos e apresentações de trabalhos em eventos. Estudos os quais se desenvolveram no decorrer de fevereiro de 2018 até janeiro de 2020, sobre o referido objeto, sob orientação do Professor Dr. Márcio Lima Nascimento.

Reforçamos que a metodologia utilizada no desenvolvimento desta monografia concerne, principalmente, em pesquisas bibliográficas vislumbrando demonstrações de resultados importantes da estrutura da teoria dos sistemas dinâmicos. Mas também, consistiu de reuniões periódicas sob orientação do Professor Dr. Márcio Lima do Nascimento, através de seminários, teleconferências e promoção de eventos científicos para a confluência de ideias e consolidação dos trabalhos. As atividades realizadas ocorriam duas vezes na semana através de exposições de seminários sobre os assuntos da dinâmica unidimensional, em particular, sobre caos em aplicações do intervalo com participação ativa do orientador. Apontávamos capítulos das referências e debatíamos, com exposição de demonstrações de teoremas, proposições, corolários, e indagações sobre a ocorrência dos fenômenos dos sistemas dinâmicos, essencialmente os caóticos. Em determinados momentos utilizávamos softwares matemáticos, como o GeoGebra, o Maple, ou ainda o MATLAB, para visualizar o que estamos demonstrando ou simplesmente tentar entender.

Nesse trabalho, apresentaremos essencialmente sistemas dinâmicos na perspectiva de se estudar a caoticidade destes sistemas, bem como conceber algumas demonstrações acerca da natureza de determinadas aplicações fundamentais. Os assuntos dissertados estão divididos em

oito capítulos.

No capítulo primeiro, abordaremos uma discussão levando-se em consideração o aparato histórico matemático que envolve a mais antiga concepção do zero a algumas noções de sistemas de numeração. Posteriormente, recortamos duas seções para introduzir memórias de dois matemáticos singulares, cujas teorias são fundamentais à produção desta monografia, a saber: *Georg Cantor* e *Robert Devaney*.

Nos capítulos segundo e terceiro desenvolveremos as ferramentas básicas para compreensão dos capítulos seguintes. Introduzir-vos-emos ao *conjunto de Cantor Triádico* e à *dinâmica em baixa dimensão*, respectivamente. No segundo capítulo, apresentaremos obtenções e algumas propriedades topológicas para o conjunto de Cantor específico. No capítulo terceiro, discutiremos sobre as noções iniciais de dinâmica, para tão logo definirmos um *Sistema Dinâmico*, e assim também os conjuntos órbitas, conjunto dos pontos periódicos, conjunto dos fixos e conjuntos limite.

No capítulo quarto, argumentaremos a construção da *atração e repulsão* de pontos à luz da derivada do sistema dinâmico e a esta grandeza chamaremos de *hiperbolicidade*. Por outro lado, para introduzir a noção de hiperbolicidade, discutiremos a priori algumas aplicações de suma importância para o desenvolvimento e boa compreensão desta grandeza. Discutiremos inicialmente a dinâmica sobre o *círculo unitário* S^1 e as *rotações* sobre S^1 .

No capítulo quinto, discutiremos três famílias de sistemas dinâmicos fundamentais, a saber, *Baker*, *Tenda* e *Quadrática*. Este capítulo poderia estar incluído no terceiro, contudo por viés de importância cujas três famílias compreendem, interpretamos que se faz necessário a discussão separada para que possam ser estudadas com primazia.

No capítulo sexto, discutiremos a *dinâmica simbólica*. Neste capítulo teremos como principal objetivo construir um modelo para a estrutura dinâmica da *aplicação quadrática* F_μ sobre o *conjunto de Cantor* Λ . Para isso deveremos configurar um modelo de mapeamento sob um espaço, cujo mapeamento seja equivalente à $F_\mu(\Lambda)$. A este estudo chamamos de *Dinâmica Simbólica*.

No capítulo sétimo, nosso tópico se refere à *conjugação topológica*. É interessante pensarmos em como determinadas propriedades são *herdadas topologicamente*, tal como a continuidade e a densidade. Descreve-se no decorrer deste capítulo, o qual nosso estudo caminha próximo

das conclusões mais imprescindíveis do desenvolvimento deste trabalho, a herança determinada pela conjugação topológica. Será que poderemos concluir heranças de naturezas como repulsões ou atrações? Evocaremos conjugações de sistemas dinâmicos na tentativa de vislumbrar outras características topologicamente herdadas e assim ponderar resultados que serão demonstrados.

No capítulo oitavo, abordaremos a tese áurea deste trabalho, cuja se trata da *caoticidade*. Mas o que seria o *Caos*? É possível encontrar esta palavra em diversos contextos distintos. Na perspectiva matemática, o caos pode descrever as iterações de uma aplicação definida em um conjunto e suas consequências no comportamento futuro de cada ponto do conjunto fixado, segundo (Devaney, 2003), com as seguintes características globais: *Alta Regularidade*: o sistema dinâmico contém infinitos pontos periódicos; *Alta Aleatoriedade*: dependência sensível às condições iniciais ou efeito borboleta; e *Alta Mistura de órbitas*: transitividade topológica (existência de órbitas densas no conjunto domínio). Por outro lado, a posteriori, ao se provar que é possível sintetizar a definição de caos de Devaney a rerepresentaremos convenientemente. Mas também, dentre outras formas de se definir a caoticidade, (Alligood, Sauer, Yorke, 1996) conceituam para a dinâmica o caos sobre órbitas. À maneira que definem *órbita caótica* tendo as seguintes hipóteses: o conjunto dito não deve ser *assintoticamente periódico* e o respectivo *expoente de Lyapunov* da órbita for maior que zero.

A monografia encerra-se com algumas considerações tratando sobre as dificuldades apresentadas ao elaborar este trabalho bem como o que vislumbramos para o mesmo na comunidade acadêmica e, enfim, as referências utilizadas.

CAPÍTULO 1

UM POUCO DE HISTÓRIA E ALGUNS MATEMÁTICOS

Neste capítulo, estudaremos a concepção do zero, objetivando inserção de algumas bases numéricas. Este capítulo finda com a apresentação de dois matemáticos importantes, os quais são os mais referenciados neste trabalho.

1.1 Da concepção do zero às noções de sistemas de numeração

1.1.1 A descoberta do zero mais antigo

Historicamente, nosso estudo iniciará com a revolução da Matemática promovida na Índia que culminaria na importantíssima criação do sistema de numeração decimal. No terceiro documentário da série Vida Matemática: Índia, A Divindade dos Números (2012), somos convidados ao país, como é referenciado, onde houve a maior revolução da Matemática. Procuremos inicialmente entender a motivação da criação do 0. De fato, as respostas tem origem indiana. A Índia é um país cuja religiosidade é de fato expressiva – inclusive, a viagem do

documentário em recorte ocorre durante festividades aos deuses indianos, um deles a exemplo é *Krishna*¹. Tratava-se do festival Holi o qual sucede no decorrer da última Lua Cheia do calendário lunar, no mesmo dia que chega a primavera.

Ademais por ora, vos identifiquemos a cidade de Ujjain, a qual está localizada na região central da Índia. No século VII a.C., Ujjain já era o centro de astronomia indiana, o que nos implica dizer também que era um centro da matemática indiana. *Brahmagupta*² (590-670 d.C.) fora um dos estudiosos mais respeitados da sua época nascido na Índia - o qual foi nomeado chefe do observatório de Ujjain.



Figura 1.1: Brahmagupta. Fonte: Andreas Strick, c2014.

Além disso, segundo Kim Hyung-Joon (2012) compreende-se que a astronomia indiana já era por sua vez mais avançada que a ocidental - uma vez que, os indianos já sabiam por volta do século VII a.C. que a Terra era redonda, mas também sabiam calcular a circunferência da Terra com um erro de 100 *km* de aproximação. Contudo, à época, é importante evidenciar que para os indianos a matemática era apenas um apoio à astronomia, uma ferramenta. Posto isso, ao passo de se haver o desenvolvimento da astronomia indiana implicaria o desenvolvimento da matemática.

Aos indianos, comprometia mais interesse cálculos úteis ao cotidiano, os quais inclusive podem ser encontrados em escrituras sagradas – vale o reforço de reconhecimento que havia mais atenção às questões cotidianas que à geometria. Em contrapartida, foram os indianos que descobriram o que chamamos hoje de trigonometria. Embora, se compreenda que conceitos básicos trigonométricos já eram de conhecimento do matemático grego Ptolomeu, o qual concebeu

¹Krishna na tradição hindu é uma deusa personificada representante das manifestações de Deus Supremo no mundo, bem como também significa verdade absoluta para os hindus.

²Brahmagupta: matemático e astrônomo indiano responsável pela criação da noção do "0".

a origem da trigonometria. Mas deve-se frisar que os gregos conheciam apenas alguns valores de senos (KIM HYUNG-JOON, 2012). À medida que, os indianos já haviam desenvolvido mais e chegariam a fazer tabelas de senos e cossenos para arcos de zero a noventa graus. Além disso, a astronomia indiana sabia comensurar a distância da Terra (T) ao Sol (S) - que podemos representar por $d(T, S)$ - baseando-se na distância da Terra à Lua (L) - denotada por $d(T, L)$. Compreendiam que $d(T, S)$ era aproximadamente $400 \cdot d(T, L)$, ao inferir que quando a Lua estava em quarto crescente o segmento \overline{TL} e o segmento \overline{TS} faziam um ângulo de aproximadamente 89 graus.

Nos encaminhamos para Varanasi, mais especificamente ao Templo de Durga para nos referenciar há uma intrigante teoria sobre o fim do mundo - a qual consiste basicamente na ideia do jogo “Torre de Hanói”. Segundo a teoria o fim chegaria quando todas as 64 placas de um poste mudassem para outro, seguindo as regras daquele jogo - mas note que, isto também significa que o fim chegaria quando o número de placas do primeiro poste zerasse.



Figura 1.2: Esquematisação da teoria do fim do mundo no Templo de Durga. Fonte: Vida Matemática #3, 2012.

É interessante analisarmos a evolução dos sistemas numéricos, tínhamos no Egito antigo representações de números por hieróglifos, mas igualmente, encontrávamos outros sistemas numéricos com suas particularidades, tais quais as numerações romana, mesopotâmica, maia e chinesa - inclusive, é interessante apresentar que nessa última já continha números inteiros negativos. Infere-se que os sistemas numéricos se desenvolveriam refletindo a necessidade das sociedades de cada época e território - e assim a partir de novas exigências se criaria novos sistemas numeração mais adequados a tais. E isso posto, mais ainda, se torna interessante a questão do enfim surgimento do 0. Mas afinal, quando e onde o primeiro zero teria sido registrado?

Retornemos para Índia, mais precisamente para o Forte Gwalior, Madhya Radesh, no Templo de Chaturbhuj, Orchha – templo dedicado a Krishna. Dentre os escritos sagrados do século IX encontra-se o primeiro zero registrado na história da humanidade. Depreende-se na verdade que

os números atuais têm sua origem na Índia. Afinal, o sistema de numeração decimal é um sistema que se baseia em decomposições utilizando a base dez, cujos seus numerais serão representado por algarismos pertencentes ao conjunto dos algarismos *indo-arábicos* $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Mais precisamente, a numeração árabe foi criada pelos indianos, ou seja, a base decimal, o sistema numérico que usamos, foi criada pelos indianos. No entanto, segundo Kim Hyung-Joon (2012), como tal sistema numérico chegou a Europa pelos árabes, implicou no não reconhecimento do maior patrimônio intelectual da Índia.

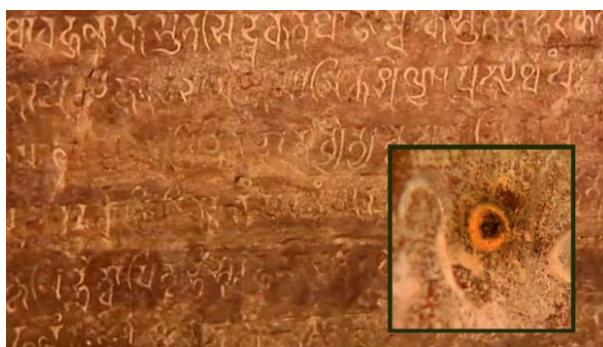


Figura 1.3: O zero mais antigo, em Gwalior. Fonte: BBC, 2019.

Ademais, diferente do que se observava à época Brahmagupta compreendia o estudo em Matemática como campo independente, de fato enxergando a Matemática não somente como uma ferramenta da Astronomia. Além disso, por volta de seus 38 anos, em 628 d.C., Brahmagupta lançaria sua grande contribuição, o livro de astronomia *Brāhmasphutasiddhānta*³ - onde era possível encontrar a utilização de um conceito que demoraria oito séculos até ser assimilado pelos europeus. Tratava-se da noção do 0. Nos escritos é possível encontrar questionamentos sobre relações entre “bens” e “dívidas”, e no instante que se questionava o que restaria se tivéssemos a mesma quantidade de bens e dívidas, Brahmagupta respondera que nada sobraria. E portanto, motivado por justificar tais equações, a esse “nada sobra” corresponderia à introdução de Brahmagupta do 0 à matemática da época.

³Cuja tradução livre é "Doutrina de Brahma Corretamente Estabelecida". Disponível em: https://www.wilbourhall.org/pdfs/628CE-Brahmasphutasiddhanta_Brahmagupta_Parts_1-4_by_Sudhakara-Dvivedin_with_Sanskrit_Commentary_1902_India_Compiled_by_Jonathan_Crabtree_2014-Australia.pdf. Último acesso em: 31 de ago. de 2021.

1.1.2 Sistemas de Numeração

Relembremos brevemente a configuração da base decimal. Do fato, das posições dos algarismos que compõem o sistema decimal definirem um numeral, e, por conseguinte uma intensidade, um número. Compreendemos então que um número natural, por ora digamos 73508, por exemplo, cujo é formado por 5 algarismos indo-arábicos os quais representam as seguintes ordens sete dezenas de milhar, três unidades de milhar, cinco centenas, zero dezenas e oito unidades. Mas veja que para este número, são válidas as seguintes estruturas:

$$\begin{aligned}
 73508 &= 7 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 1 \\
 &= 7 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
 &= 0 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
 &= 0 \cdot 10^n + \dots + 0 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \quad \text{para } n > 4.
 \end{aligned}$$

Ou seja, no sistema decimal o algarismo 0 à esquerda do algarismo de maior ordem, no caso o 7, não altera sua intensidade, o seu real valor. Assim 073508; 0073508; 00073508 ou 000073508 representam o mesmo número, 73508. Desse modo, compreendemos que todo número natural N de m algarismos é concebido nas seguintes estruturas:

$$N = a_m \cdot 10^{m-1} + a_{m-1} \cdot 10^{m-2} + \dots + a_2 \cdot 10^1 + a_1 \cdot 10^0, \quad a_m \in \mathcal{I}. \quad (1.1)$$

$$N = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot 10^{m-1} = \sum_{n=1}^m a_n \cdot 10^{n-1} + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \cdot 10^{n-1}, \quad a_m \in \mathcal{I} \text{ e } a_n = 0, n > m. \quad (1.2)$$

Mas veja também que a representação pode ser utilizada de maneira conveniente para qualquer conjunto que seus elementos sejam identificados por uma leitura posicional, como é o caso de \mathbb{Q} . Vejamos alguns exemplos,

$$\frac{57}{100} = 0,57 = 0 \cdot 10 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{100} + 0 \cdot \frac{1}{1000} = 5 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}. \quad (1.3)$$

$$1,\bar{3} = 1,333\dots = 1 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + \dots = 1 \cdot 10^0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-n}. \quad (1.4)$$

$$0,\overline{42} = 4 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot 10^{-2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 10^{-2n}. \quad (1.5)$$

Por fim, gostaríamos de lembrar a operação de adição no sistema decimal, para frisar como a interessante propriedade da manutenção da estrutura das decomposições que os sistemas de numeração possuem e salientar um confronto de necessidades quanto à programação das operações. Consideremos o seguinte exemplo:

$$57 + 43 = (5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0) + (4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0) = (5 + 4) \cdot 10^1 + (7 + 3) \cdot 10^0 \quad (1.6)$$

$$= 9 \cdot 10^1 + \mathbf{10} \cdot 10^0 = (9 + 1) \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 \quad (1.7)$$

$$= \mathbf{10} \cdot 10^1 = \mathbf{1} \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 \quad (1.8)$$

$$= 100 \quad (1.9)$$

Percebe-se que a adição considerando a operação minuciosa da estrutura da base decimal pode se tornar um processo muito longo - e aliás, atualmente pouco útil, principalmente considerando linguagens de programação. Afinal, compreende-se também que a praticidade de se programar uma rotina, um algoritmo, para operar números como no exemplo anterior seria muito pequena. Pois precisaríamos definir os 10 elementos de \mathcal{S} , programar de maneira conveniente a soma em (1.2), generalizar o reconhecimento em (1.7) e (1.8), isto é, reconhecer em geral a mudança de ordens, por exemplo da ordem das dezenas para a das centenas. Logo, infere-se que por questões de necessidade seria mais interessante desenvolver outro sistema de numeração que preferencialmente considerasse menos elementos que os de \mathcal{S} .

Isso posto, é diretamente compreensível a necessidade da criação do sistema de numeração binário. Afinal é um sistema que utiliza apenas dois algarismos, o 0 e o 1. Uma vez que os computadores funcionam intrinsecamente como um ensaio de Bernoulli, com dois resultados que compõem sua essência. Haja visto que o sistema binário possui base 2 e que tal como o sistema decimal também é um sistema de numeração posicional, a simplicidade e a praticidade exigidas anteriormente, por ora, estão satisfeitas.

Vejamos agora como funciona a base binária. Uma vez sabido que só utilizaremos os algarismos 0 e 1, uma preocupação inicial seria como representar os número da base decimal.

Denotaremos, por ora um número decimal D na base binária como $(B)_2$. Observe que:

$$0 = (0)_2 \quad (1.10)$$

$$1 = (1)_2 \quad (1.11)$$

$$2 = 1 + 1 = (1)_2 + (1)_2 = (?)_2. \quad (1.12)$$

Uma vez compreendido que a base é 2, nos aproveitando da estrutura da base 10, temos na verdade que

$$0 = \mathbf{0} \cdot 1 = \mathbf{0} \cdot 2^0 = (\mathbf{0})_2 \quad (1.13)$$

$$1 = \mathbf{1} \cdot 2^0 = (\mathbf{1})_2 \quad (1.14)$$

$$2 = \mathbf{2} \cdot 2^0 = \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{2} \cdot 2^0 = \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0 = (\mathbf{10})_2. \quad (1.15)$$

Como na base decimal, decompúnhamos em potências de 10, na base binária, iremos decompor em estruturas que obedecem as potências de 2. E isso posto, já nos permite generalizar toda a soma, afinal o reconhecimento da mudança de ordem na base binária consistirá sobretudo em $(1)_2 + (1)_2 = (10)_2$. Afinal, observe que

$$3 = \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 = (\mathbf{11})_2$$

$$4 = \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0 = (\mathbf{100})_2$$

$$5 = \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 = (\mathbf{101})_2$$

$$6 = 4 + 2 = (100)_2 + (10)_2 = (110)_2$$

$$7 = 4 + 3 = (100)_2 + (11)_2 = (111)_2$$

$$8 = 4 + 4 = (100)_2 + (100)_2 = (1000)_2$$

$$9 = 8 + 1 = (1000)_2 + (1)_2 = (1001)_2$$

$$10 = 8 + 2 = (1000)_2 + (10)_2 = (1010)_2$$

$$15 = 10 + 5 = (1010)_2 + (101)_2 = (1111)_2.$$

Vejam os outros exemplos,

$$37 = 32 + 4 + 1 = (100000)_2 + (100)_2 + (1)_2 = (100101)_2$$

$$78 = 64 + 8 + 4 + 2 = (1000000)_2 + (1000)_2 + (100)_2 + (10)_2 = (1001110)_2$$

$$80 = 64 + 16 = (1000000)_2 + (10000)_2 = (1010000)_2$$

$$158 = 78 + 80 = (1001110)_2 + (1010000)_2 = (10011110)_2$$

No início deste projeto, estudávamos mecanismos para compreensão e entendimento de sistemas numéricos, mais especificamente a base binária, vislumbrando a introdução de tópicos de sistemas dinâmicos em discussões consecutivas. Um desses mecanismos para auxiliar o entendimento do sistema binário de maneira mais simples foi a inserção de objetos matemáticos do acervo da *Biblioteca de Objetos Matemáticos*⁴ (BOM) dirigida pelo professor Dr. Márcio Nascimento - e um desses objetos foi a *Máquina de Somar em Base 2*.



Figura 1.4: Máquina de Somar em Base 2. Fonte: BOM, c2014.

Ademais, a Máquina de Somar em Base 2 essencialmente realiza a soma no sistema binário. Inicialmente, tentamos reconhecer um número neste objeto. Digamos que queiramos reconhecer o 37. O número 37, como vimos anteriormente pode ser decomposto como $37 = 32 + 4 + 1$. Observe que a maior potência de 2 que decompõe o 37 é 32 e desse modo, colocaremos uma bolinha na entrada do $32 = 2^5$. Para 37 faltam 5. Agora, a maior potência de 2 que pode ser adicionada é $2^2 = 4$, e assim também colocaremos uma bolinha na entrada do $2^2 = 4$. Ainda

⁴Disponível em: <https://www.aedi.ufpa.br/bom/index.php/9-objetos>. Último acesso em: 01 de set. de 2021.

falta 1 para 37, então só falta adicionar o $2^0 = 1$. Por fim, colocaremos uma bolinha na respectiva entrada do $2^0 = 1$. E finalmente, para lermos como ocorre a mudança do 37 na base decimal para a binária, identificaremos as posições das bolinhas em suas respectivas posições nas potências de 2. Deveremos ter **1 bolinha** no $32 = 2^5$, **0 bolinhas** no $16 = 2^4$, **0 bolinhas** no $8 = 2^3$, **1 bolinha** no $4 = 2^2$, **0 bolinhas** no $2 = 2^1$ e **1 bolinha** no $1 = 2^0$. Ou seja, concluímos que o 37 é 100101 na base binária, tal como concluímos anteriormente.

Ressaltamos que introduzimos os sistemas de numerações decimal e binário prontamente, pois os retomaremos já no capítulo seguinte. Além disso, no capítulo que segue ainda adicionaremos mais um sistema - cujo se trata da base ternária, a qual nos servirá de grande utilidade, no que tange obtenções do Conjunto de Cantor. Isso posto, apresentaremos nas seções seguinte breves memórias e relatos acerca de matemáticos os quais são imprescindíveis ao nosso trabalho.

1.2 Breve biografia de Georg Cantor

Nesta seção, apresentaremos uma sucinta biografia de um dos matemáticos do século XIX mais intrínsecos às teorizações da Matemática Moderna: Georg Cantor, autor do conjunto que leva seu nome; e alvo vislumbrado na fundamentação promovida por este trabalho.

Georg Ferdinand Ludwig Phillipp Cantor nascido em 3 de março de 1845, em São Petersburgo, Rússia. Fora o primeiro dos seis filhos do casal Georg Woldemar Cantor e Maria Bohm. Em 1856, a família Cantor mudou-se para Frankfurt, na Alemanha, em decorrência da doença pulmonar que o pai contraía. Neste ínterim, o jovem Georg Cantor frequentou escolas particulares e, com quinze anos, fora admitido no Darmstadt Gymnasium.

Theodor Schaeffer era professor de Cantor no liceu, e aparentemente o pai viu nele um modelo para o sucesso do filho no futuro (ALVES, 2008). Em 1862, começou a estudar matemática no Instituto Politécnico em Zurique, no entanto, logo se transferiu para a Universidade de Berlim. A mudança para Berlim lhe ofereceu a oportunidade de estudar em um ambiente de mais prestígio e não somente, como a oportunidade de aprender matemática com excepcionais referências, entre seus professores estavam *Karl Weierstrass*⁵, *Ernst Eduard Kummer*⁶ e *Leopold Kronecker*⁷.

⁵K. Weierstrass (1815-1897): matemático alemão da área da Análise Moderna.

⁶Ernst E. Kummer (1810-1893): matemático alemão da área de Teoria dos Números

⁷L. Kronecker (1823-1891): matemático alemão da área de Teoria dos Números.

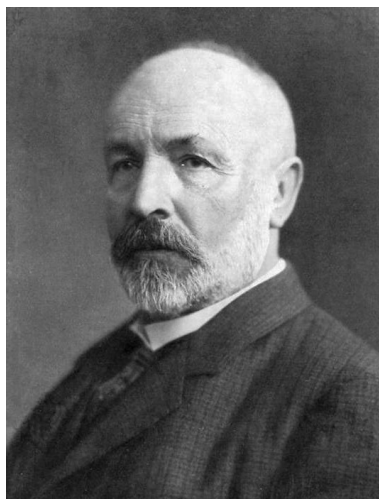


Figura 1.5: Georg Cantor.

Em 1867, dissertou sua tese de doutorado em Teoria dos Conjuntos sobre uma tese gaussiana. Ademais, Cantor continuara pesquisando na área de teoria dos números gaussianos e contribuiu fortemente, ao passo da importância as quais suas publicações em periódicos matemáticos no decorrer dos anos conduziu. A posteriori seu doutoramento, Cantor aceitou a primeira posição que lhe fora oferecida na Universidade de Halle. Como era um instrutor iniciante na universidade alemã, Cantor dava aulas particulares cujo pagamento consistia em quanto seus estudantes pudessem despendar. Isso posto, no resto do tempo, conduzia suas pesquisas em análise matemática, influenciado pelas ideias de Weierstrass (ALVES, 2008).

Todavia, esse tipo de trabalho o levou à dissidência com Kronecker e que resultou em conflito que perdurou por toda a sua vida. Em Halle, Cantor se envolveu profundamente com o estudo das funções à luz dos métodos de Weierstrass em definir números irracionais como limites de sequências racionais - que o levou ao conceito de convergência. E, por conseguinte, à conceituação real de infinito considerando diretamente os conjuntos e não a infinidade potencial de limites, considerando diretamente os números, utilizada por séculos pelos matemáticos. Isso posto, Cantor foi o primeiro a teorizar o infinito verdadeiro.

Mas também nesse intervalo, casou-se com Vally Guttmann, uma amiga de sua irmã, oriunda de uma família judaica de Berlim.

Os dois se conheceram nessa cidade e se casaram poucos anos depois de se mudarem juntos para Halle, em 1875. Começaram a formar uma família vivendo do salário de Cantor, que consistia em modestos rendimentos pagos pelo governo nas províncias, significativamente mais generosos que a remuneração oferecida na Universidade

de Berlim. Mas foi ali, em uma pequena cidade na zona rural da Alemanha, que ele desenvolveu sozinho uma teoria matemática completa. (ALVES, p. 6, 2008).

Ainda em Berlim, Cantor conheceu *Gösta Mittag-Leffler*⁸, amigo cujo nos momentos mais difíceis de Cantor, quando sequer queriam ouvir suas teorias sobre o infinito, publicava regularmente os trabalhos de Cantor em seu periódico *Acta Mathematica*⁹.

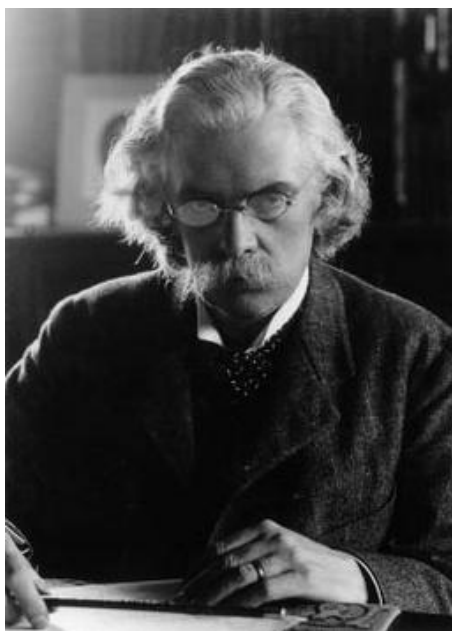


Figura 1.6: Gösta Mittag-Leffler.

No decorrer dos primeiros anos em Halle, Cantor também conheceu *Richard Dedekind*¹⁰ - o qual compartilhou grande admiração com Georg Cantor, bem como Cantor admirava os métodos de Dedekind em análise matemática. Além disso, em 1877, Cantor escrevera um ensaio o qual quase fora rejeitado para a publicação em um periódico editado por Kronecker. Felizmente, Dedekind interviu a favor possibilitando a publicação de Cantor.

Não obstante, contribuição à Matemática feita por Georg Cantor na Teoria dos Conjuntos, alguns matemáticos importantes se contrapuseram, como

o matemático francês *Henri Poincaré*¹¹ o qual afirmou que a teoria dos conjuntos era uma moléstia, uma doença perversa da qual, algum dia, os matemáticos estariam curados.

⁸G. Mittag-Leffler (1846-1927): matemático da área de Análise Matemática

⁹Revista científica de acesso aberto que abrange pesquisas em todos os campos da matemática, inclusive considerada por muitos como a mais prestigiada de todas as revistas de pesquisa matemática. Disponível em: https://intlpress.com/site/pub/pages/journals/items/acta/_home/_main/index.php. Último acesso em: 30 de ago. de 2021.

¹⁰R. Dedekind (1831-1916): matemático da área da Álgebra Abstrata.

¹¹H. Poincaré (1854-1912): matemático considerado por muitos como o último universalista

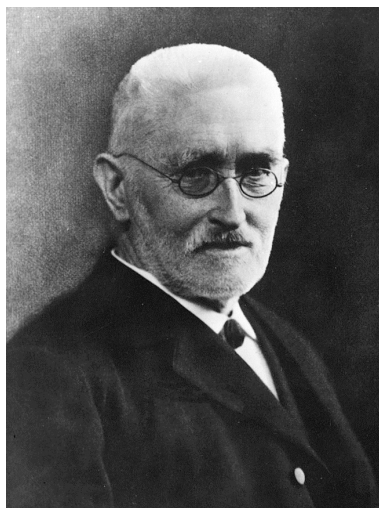


Figura 1.7: Richard Dedekind.

[Por outro lado,] em resposta, o matemático alemão *David Hilbert*¹² disse que ninguém nos expulsaria do paraíso que Georg Cantor abriu para nós. A entrada de Cantor ao infinito Jardim do Éden, sem dúvida, constitui a abertura de uma nova era na matemática. (ALVES, p. 7, 2008).

Independentemente das adversidades de ideias contrárias, foi Cantor que ainda nos concebeu a *hipótese do continuum*¹³. Mas infelizmente, durante seus esforços para resolver tal hipótese, sofrera um colapso nervoso. A partir disto, relata-se que Cantor apresentava sintomas que se assemelham àqueles associados com o distúrbio bipolar ou psicose maníaco-depressiva. Morreu em 6 de janeiro de 1918 na Halle Nervenlinik, clínica mental universitária.

1.3 Breve biografia de Robert Devaney

Nesta seção, apresentaremos igualmente uma biografia objetiva de Robert Devaney, matemático fundamental à Teoria dos Sistemas Dinâmicos, e não somente quanto pesquisa, mas também quanto divulgação da ciência com projetos pedagógicos de extensão. Sua fundamentação em Dinâmica - mais especificamente, Caótica, é também objeto essencial vislumbrado na pesquisa deste trabalho.

Robert Luke Devaney nasceu em 9 de abril de 1948 em Methuen, Massachusetts é um

¹²D. Hilbert (1862-1943): contribuiu fundamentalmente em diversas áreas da matemática

¹³Conjectura que essencialmente consiste na não existência de nenhum conjunto com cardinalidade maior que a do conjunto dos números inteiros e menor que a do conjunto dos números reais.

matemático americano e atualmente Professor Emérito de matemática na Universidade de Boston - segundo seu *Brief Vita*¹⁴ disponibilizado pelo próprio.



Figura 1.8: Robert Devaney.

Graduou-se como Bacharel em 1969 no College of the Holy Cross e obteve seu PhD na University of California em Berkeley em 1973 sob a orientação de *Stephen Smale*¹⁵ - com a dissertação *Reversible Diffeomorphisms and Flows*¹⁶. Devaney lecionou na Northwestern University, na Tufts University e na University of Maryland, College Park antes de ingressar no corpo docente da Boston University em 1980. Em junho de 2018, aposentou-se e tornou-se Professor Emérito da Boston University.

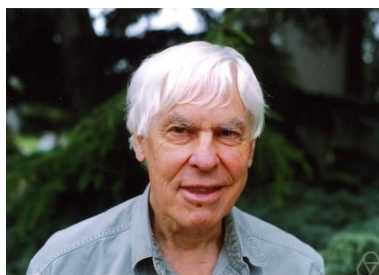


Figura 1.9: Stephen Smale.

Ademais, Robert Devaney é essencialmente conhecido por sua ampla teoria desenvolvida

¹⁴Disponível em: <http://math.bu.edu/people/bob/brief-vita.html>. Último acesso em: 31 de ago. de 2021.

¹⁵S. Smale (1930): matemático ganhador da Medalha Fields em 1966 por seu trabalho em Geometria Diferencial

¹⁶Disponível em: <https://www.ams.org/journals/tran/1976-218-00/S0002-9947-1976-0402815-3/S0002-9947-1976-0402815-3.pdf>. Último acesso em: 31 de ago. de 2021.

na área dos Sistemas Dinâmicos, principalmente por sua pesquisa em Dinâmica Analítica Complexa e por estruturar definições simples e amplas acerca de Sistemas Caóticos – teoria alvo deste trabalho. Além disso, segundo Devaney (2003) é possível reconhecer sistemas dinâmicos caóticos sem precisar de conceitos complicados da teoria da medida – afinal, bastaria reconhecer três características fundamentais. Estaríamos diante de um sistema caótico se este apresentar dependência sensível das condições iniciais (o efeito borboleta), transitividade topológica (para quaisquer dois conjuntos abertos, alguns pontos de um conjunto serão projetados sobre o outro), e alta densidade do conjunto das órbitas periódicas. No entanto, a posteriori Devaney observaria que sua definição de Sistema Caótico poderia ser ainda mais concisa, afinal a dependência sensível era obtida pelas outras duas exigências da definição – isto é, se há transitividade topológica e densidade das órbitas periódicas, então deve instantaneamente haver dependência sensível.

Presentemente, Devaney continua pesquisando sobre aspectos topológicos da dinâmica, incluindo tópicos de continuum indecomponíveis, curvas de Sierpinski, Cantor bouquets, conjuntos de Mandelbrot e de Julia – inclusive tem seu nome em uma estrutura fractal em certos conjuntos de Julia por ser o primeiro a investigá-la, trata-se da Devaney hairs.

O prestígio da contribuição de Robert Devaney o fez inclusive receber uma conferência em 2008 em Tossa de Mar, Espanha, em homenagem ao seu 60º aniversário. Em 2010, todos os artigos da conferência foram publicados em uma edição especial do *Journal of Difference Equations and Applications*¹⁷, cujo também homenageava Devaney.

Além de seu distinguido e homenageado trabalho em pesquisas, Devaney foi o organizador do Math Field Days da Boston University para alunos por mais de duas décadas. Outrossim, inclusive, fora diversas vezes premiado pela Boston University, pela National Science Foundation (NSF) - o qual dirige desde 1989 o Projeto de Tecnologia e Sistemas Dinâmicos, e pela Mathematical Association of America (MAA) por seu trabalho educacional. Seu trabalho em ensino e divulgação de Matemática, especialmente de Sistemas Dinâmicos, é extenso, o professor Devaney

ministrou mais de 1.600 palestras convidadas sobre sistemas dinâmicos e tópicos relacionados em todos os 50 estados dos EUA e em mais de 35 países em seis continentes em todo o mundo. Por mais de vinte anos, o Professor Devaney foi o principal organizador e palestrante dos Dias de Campo de Matemática da Universidade de Boston. Esses eventos trouxeram mais de 1.000 alunos do ensino médio e seus professores de toda

¹⁷Disponível em: <https://www.tandfonline.com/toc/gdea20/16/5-6>. Último acesso em: 31 de ago. de 2021.

a Nova Inglaterra ao campus da Universidade de Boston para um dia de atividades com o objetivo de familiarizá-los com o que há de novo e empolgante em matemática. (DEVANEY, p. 1, 2019).

Durante os anos de 2013 a 2015, atuou como presidente da MAA e também foi membro do Congresso da MAA no intervalo de 2014 a 2019. Infelizmente, por dispendiosos compromissos da presidência da MAA em 2013 os eventos citados os quais eram organizados por Devaney precisaram ser suspensos.

Nos capítulos seguintes, daremos nossos primeiros passos na conceituação da teoria dos sistemas dinâmicos. Gostaríamos de ressaltar que empregaremos algumas propriedades como já conhecidas, salvo exceções de necessidade que reapresentaremos e trataremos de analisá-las convenientemente a nossa argumentação. São resultados que comumente retomam proposições e teoremas de Cálculo I, Análise Real e Topologia dos Espaços Métricos. Desse modo, recortamos algumas referências as quais auxiliaram na produção deste estudo e esperamos que possam auxiliar o leitor na boa continuidade deste trabalho: [11], [12], [16], [17], [18], [20] e [24]. Reforçamos que comumente, faremos referências a esses livros citando explicitamente qual resultado se trata.

CAPÍTULO 2

O CANTOR TRIÁDICO

Neste capítulo apresentaremos um exemplo típico de conjuntos de Cantor, o caso do Cantor Ternário ou Cantor Triádico. Além disso, conceberemos as noções construtivas e topológicas do Conjunto de Cantor Triádico. Iniciaremos apresentando a construção do exemplo específico de Cantor, para posteriormente definir conjuntos de Cantor em geral e por fim demonstrar algumas características algébricas e topológicas gerais aos conjuntos de Cantor Ternários.

2.1 O Conjunto de Cantor Triádico

2.1.1 Obtenções de Conjuntos de Cantor Triádico

A priori, fixaremos um espaço para conter o nosso conjunto alvo. Consideremos o intervalo $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Desse modo, nosso objetivo por ora será construir o conjunto de Cantor sobre I . O método que utilizaremos para esta construção será o da trisseccção.

À vista disso, inicialmente, trissectemos I em três subintervalos de mesma medida, ou seja, recortaremos I nos pontos $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Após o recorte de I , retiraremos o seu *terço médio* aberto, isto

é, o intervalo aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Ao que sobra de I , denotaremos por C_1 . Logo,

$$C_1 := \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^c \cap [0, 1]. \quad (2.1)$$

De imediato, notem de (2.1) que C_1 é um *conjunto fechado*, uma vez que é resultado da união de 2 *intervalos fechados*. Vale observar também que os intervalos de C_1 medem ambos $1/3$. A posteriori, trissectaremos cada um dos intervalos que definem C_1 . Ou seja, os recortaremos nos pontos $\frac{1}{9}$ e $\frac{2}{9}$, e $\frac{7}{9}$ e $\frac{8}{9}$. Após o recorte, removeremos os terços médios abertos de $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, isto é, respectivamente os intervalos abertos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Ao que sobra de C_1 , denotaremos por C_2 . Isso posto,

$$C_2 := \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] = \left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right)^c \cap [0, 1]. \quad (2.2)$$

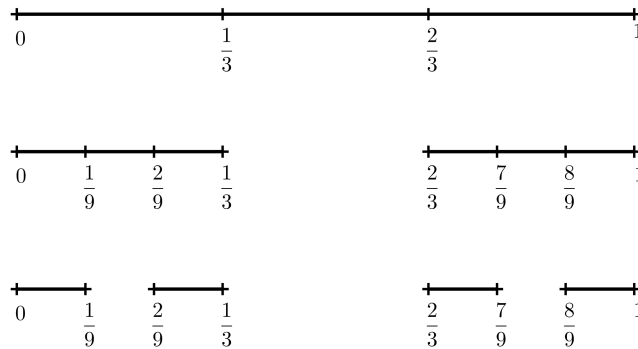


Figura 2.1: Esboço da construção do segundo passo do conjunto de Cantor.

Desta vez observem de (2.2) que C_2 também é um *conjunto fechado*, haja visto que é resultado da união de 4 *intervalos fechados*. Atente também ao fato dos intervalos os quais definem C_2 medirem $1/9$. Ademais, seguindo o raciocínio de se trissectar os intervalos que definem C_2 e se retirar os terços médios abertos destes, obtemos dos pontos restantes o que chamaremos de C_3 . Portanto,

$$C_3 := \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right].$$

Inferese que com a progressão dos passos tomados, obtemos uma sequência de conjuntos

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-1}, C_n, \dots$$

tal que o conjunto C_n é o conjunto dos pontos de C_{n-1} retirando-se os terços médios abertos. Depreende-se também que na n -ésima etapa da construção obtemos 2^n intervalos fechados cuja união destes define C_n . Não somente, mas também vale ressaltar que os intervalos de C_n medem $1/3^n$. E por fim, observe que os conjuntos C_n são todos conjuntos fechados encaixantes. Isto é,

$$I \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots \supset C_{n-1} \supset C_n \supset \dots$$

Ao repetir o procedimento *ad infinitum*, indefinidamente, obteremos uma "poeira" do que outrora foi I . Por outro lado, essa metáfora também nos antecipa que se trata de um conjunto não vazio. Inclusive, isto pode ser compreendido de forma anterior, uma vez que as extremidades dos terços médios sempre estarão contidas nesta poeira resultante, isto é, no conjunto final C_∞ . A esse conjunto C_∞ , enfim construído, chamaremos *Conjunto de Cantor*. A seguir o definiremos formalmente.

Definição 2.1.1 *O conjunto de Cantor C_∞ é a interseção dos conjuntos C_n , construídos através da remoção recursiva dos terços médios abertos de I . Portanto,*

$$C_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n. \quad (2.3)$$

Como adiantamos anteriormente no capítulo primeiro apresentaremos agora outra expansão numérica que resulta no conjunto Cantor. Trata-se da expansão ternária.

Definição 2.1.2 *A base ternária é um sistema de numeração posicional que utiliza três algarismos 0, 1 e 2. Sistema de numeração que se estrutura concebendo os números a partir de combinações com os algarismos 0, 1 e 2 em potências de base 3. Nesta base, denotaremos os números das bases decimal D , binária $(B)_2$ como $(T)_3$.*

Exemplo 2.1.1 *Vejam algumas transformações da base ternária.*

$$10 = 9 + 1 = \mathbf{1} \cdot 3^2 + \mathbf{0} \cdot 3^1 + \mathbf{1} \cdot 3^0 = (\mathbf{101})_3 \quad (2.4)$$

$$11 = 9 + 2 = \mathbf{1} \cdot 3^2 + \mathbf{0} \cdot 3^1 + \mathbf{2} \cdot 3^0 = (\mathbf{102})_3 \quad (2.5)$$

$$12 = 9 + 3 = \mathbf{1} \cdot 3^2 + \mathbf{1} \cdot 3^1 + \mathbf{0} \cdot 3^0 = (\mathbf{110})_3 \quad (2.6)$$

$$(100011)_2 = 35 = 27 + 6 + 2 = \mathbf{1} \cdot 3^3 + \mathbf{0} \cdot 3^2 + \mathbf{2} \cdot 3^1 + \mathbf{2} \cdot 3^0 = (\mathbf{1022})_3. \quad (2.7)$$

Em síntese, infere-se que na base 3, $(0)_3 + (0)_3 = (0)_3$, $(2)_3 + (0)_3 = (1)_3 + (1)_3 = (2)_3$ e $(1)_3 + (2)_3 = (10)_3$. Ao se compreender que na base ternária a ordem só aumentará quando operarmos $(1)_3 + (2)_3$ obtendo assim $(10)_3$, já podemos trabalhá-la amplamente.

Adiantamos que argumentaremos a seguir vislumbrando apresentar uma das caracterizações mais interessantes e úteis do conjunto de Cantor - particularmente, o construído anteriormente por trisseções sobre $I = [0, 1]$. Trata-se da caracterização obtida pela expansão ternária. Mas para isso precisamos restringir nosso raciocínio da transformação para a base 3 ao intervalo $I = [0, 1]$.

Desse modo, se $t \in I$, representar t na base 3 é sobretudo obter a decomposição estrutural de $t = (0, t_1 t_2 t_3 \cdots t_n \cdots)_3$, tal que cada $t_n \in \{0, 1, 2\}$. De modo que

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \cdot 3^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n}. \quad (2.8)$$

Exemplo 2.1.2 *Vejam algumas transformações da base ternária sobre I .*

$$\frac{1}{3} = \mathbf{0} \cdot 3^0 + \mathbf{1} \cdot 3^{-1} + \mathbf{0} \cdot 3^{-2} + \mathbf{0} \cdot 3^{-3} = (\mathbf{0,100})_3 = (\mathbf{0,1})_3 \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{27} = \mathbf{0} \cdot 3^{-1} + \mathbf{0} \cdot 3^{-2} + \mathbf{1} \cdot 3^{-3} = (\mathbf{0,001})_3 \quad (2.10)$$

$$\frac{7}{27} = \mathbf{0} \cdot 3^{-1} + \mathbf{2} \cdot 3^{-2} + \mathbf{1} \cdot 3^{-3} = (\mathbf{0,021})_3 \quad (2.11)$$

$$\frac{7}{81} = \mathbf{0} \cdot 3^{-1} + \mathbf{0} \cdot 3^{-2} + \mathbf{2} \cdot 3^{-3} + \mathbf{1} \cdot 3^{-4} = (\mathbf{0,0021})_3. \quad (2.12)$$

Para melhor compreensão do que vislumbramos, gostaríamos também de apresentar a seguinte convenção $(0, \cdots t_n 1)_3 = (0, \cdots t_n 0222 \cdots)_3$. Tal convenção é inspirada em combinações reais de outras bases, tal como a igualdade na base decimal $0,999 \cdots = 1$ por exemplo. Desse modo, podemos entender que $(1)_3 = (0,222 \cdots)_3$. Em verdade, isto é consequência de (2.8) O

que nos permite sobretudo compreender que se o algarismo final da estrutura da base três for 1, então podemos substituí-lo pela sequência $0,222\dots$. Assim, $\frac{1}{27} = (0,001)_3 = (0,00222\dots)$, $\frac{7}{27} = (0,021)_3 = (0,02222\dots)$ e $\frac{7}{81} = (0,0021)_3 = (0,002222\dots)$.

Sinteticamente, vamos compreender um esboço do processo que estamos fazendo com a Figura 2.2. Observe que o esboço já nos indica que os números que seriam identificados com o algarismo 1 em algum dígito da expansão ternária serão omitidos pela exclusão dos terços médios.

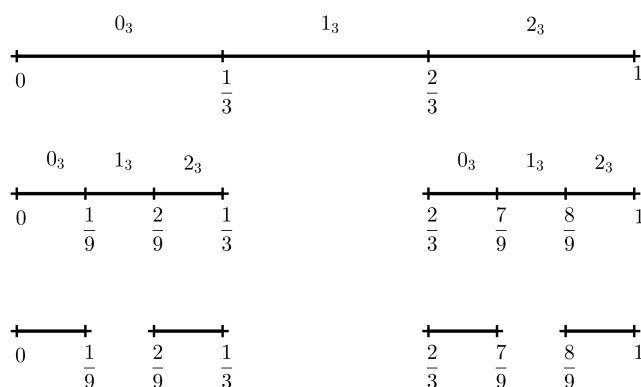


Figura 2.2: Esboço da identificação dos elementos a partir da expansão ternária.

Exemplo 2.1.3 *Vejam os outros exemplos de transformação para a base ternária, tomemos agora o número $\frac{1}{4}$. Diretamente, observe que esta fração irredutível possui denominador 4 caracterizando certa dificuldade em representar a expansão em potências de 3. Façamos nossa transformação por aproximações. Desse modo, é facilmente notado que*

$$\frac{2}{3^2} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3}.$$

Assim podemos começar nossa aproximação considerando a seguinte relação:

$$\frac{1}{4} = \frac{0}{3^1} + \frac{2}{3^2} + c_1.$$

Logo, $c_1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$. Seguindo um raciocínio análogo, observemos que

$$\frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} < \frac{1}{36} < \frac{2}{81} = \frac{2}{3^4}.$$

Desse modo, podemos reescrever a aproximação da seguinte maneira:

$$\frac{1}{4} = \frac{0}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{2}{3^4} + c_2.$$

De certa forma, parece que nossa aproximação está dominada pela série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2n}}$. Tomando isso como uma afirmação, vamos testar a sua validade. Veja que esta progressão geométrica possui razão igual a

$$q = \frac{\frac{2}{3^{2(n+1)}}}{\frac{2}{3^{2n}}} = \frac{1}{3^2}.$$

Posto isto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2n}} = \frac{\frac{2}{3^2}}{1 - \frac{1}{3^2}} \quad (2.13)$$

$$= \frac{\frac{2}{9}}{\frac{8}{9}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}. \quad (2.14)$$

Portanto,

$$\frac{1}{4} = \frac{0}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{0}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \dots$$

Equivalentemente,

$$\frac{1}{4} = (0,020202\dots)_3$$

Proposição 2.1.1 *Os elementos do conjunto de Cantor Triádico possuem expansão ternária utilizando somente os algarismos 0 e 2. Ou seja,*

$$C_{\infty} = \left\{ t \in I; t = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \cdot 3^{-n}, \text{ com } t_n = 0 \text{ ou } t_n = 2 \right\}.$$

Demonstração. Retomemos por ora os passos iniciais da construção do conjunto de Cantor. Observe que se $t \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, então devemos ter que na base ternária $t = (0, t_1 t_2 t_3 \dots t_n \dots)_3$, com $t_1 = 1$. Desse modo, os pontos t retirados no primeiro passo da construção de C_{∞} tem a forma

$t = (0, 1t_2t_3t_4 \dots)_3$, com exceção de $\frac{1}{3} = (0, 1)_3$. Explicitemos os extremos que permanecem:

$$\begin{array}{ll} 0 = (0)_3 & \frac{1}{3} = (0, 1)_3 \\ \frac{2}{3} = (0, 2)_3 & 1 = (1)_3. \end{array}$$

Observe que $\frac{1}{3} = (0, 1)_3$ e $1 = (1)_3$ podem ser reescritos utilizando a nossa convenção. De imediato, temos que

$$\frac{1}{3} = (0, 1)_3 = (0, 0222 \dots)_3 \quad 1 = (1)_3 = (0, 222 \dots)_3.$$

No segundo passo, omitimos na construção os intervalos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Observe que os pontos t retirados no segundo passo da construção de C_∞ tem a forma $t = (0, 01t_3t_4 \dots)_3$ ou $t = (0, 21t_3t_4 \dots)_3$, exceto os pontos de $\frac{1}{9} = (0, 01)_3$ e $\frac{7}{9} = (0, 21)_3$. Explicitemos os extremos que permanecem agora com a convenção:

$$\begin{array}{lll} 0 = (0)_3 & \frac{1}{9} = (0, 00222 \dots)_3 & \frac{2}{9} = (0, 02)_3 \\ \frac{1}{3} = (0, 0222 \dots)_3 & \frac{2}{3} = (0, 2)_3 & \frac{7}{9} = (0, 20222 \dots)_3 \\ \frac{8}{9} = (0, 22)_3 & 1 = (0, 222 \dots)_3. & \end{array}$$

Ao se produzir C_3 , excluiremos os intervalos $\left(\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3}\right)$ e $\left(\frac{7}{3^3}, \frac{8}{3^3}\right)$ $\left(\frac{19}{3^3}, \frac{20}{3^3}\right)$ e $\left(\frac{25}{3^3}, \frac{26}{3^3}\right)$. Tais intervalos contêm números na forma $(0, 001t_4t_5 \dots)_3$, $(0, 021t_4t_5 \dots)_3$, $(0, 201t_4t_5 \dots)_3$ ou $(0, 221t_4t_5 \dots)_3$. Todos os números naquelas formas serão excluídos em C_3 , em exceção dos pontos de $\frac{1}{3^3} = (0, 001)_3$, $\frac{7}{3^3} = (0, 021)_3$, $\frac{19}{3^3} = (0, 201)_3$ e $\frac{25}{3^3} = (0, 221)_3$.

Recursivamente, podemos concluir que os elementos que permanecem após as retiradas dos terços médios podem ser escritos utilizando somente os algarismos 0 e 2 na expansão ternária. Mas também, é possível apontar outros elementos do Cantor Ternário que não extremidade de intervalo, como por exemplo o $\frac{1}{4}$ que possui expansão ternária utilizando somente os algarismos 0 e 2. De modo geral, é verificado que se $t \in C_\infty$ então sua expansão ternária $t = (0, t_1t_2t_3 \dots)$ configura-se utilizando apenas os algarismos 0 e 2, afinal até aqueles que possuem o algarismo 1 na

sua configuração podem ser reescritos utilizando a relação $(0, \dots t_n 1 \dots)_3 = (0, \dots t_n 0222 \dots)_3$.

■

2.1.2 Noções topológicas do conjunto de Cantor Triádico

Após introduzirmos o conjunto de Cantor Triádico, vejamos algumas propriedades naturais deste curioso conjunto. Veremos por exemplo que uma das características deste conjunto é ser *Perfeito*, ou seja, um conjunto no qual todo ponto é ponto de acumulação de pontos do conjunto. Além disso é um conjunto compacto (fechado em \mathbb{R}) e totalmente desconexo (que em \mathbb{R} significa ter interior vazio). Veremos mais adiante que conjuntos deste tipo são mais gerais do que apenas subconjuntos da reta, podem existir em outros espaços.

Proposição 2.1.2 *O conjunto C_∞ é um conjunto fechado.*

Demonstração. Seja $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a família dos intervalos abertos retirados durante a construção de C_n . Desse modo, de imediato é verdade que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ trata-se de um conjunto aberto. Por outro lado, seu complementar deve ser um conjunto fechado, isto é, $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n\right)^c = [0, 1] - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ é um conjunto fechado. Uma vez compreendido que C_∞ são os pontos de $[0, 1]$ que restam ao se retirar os pontos de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Temos que

$$C_\infty = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n\right)^c \cap [0, 1].$$

Mas isso significa que C_∞ é a interseção de dois conjuntos fechados. Logo, C_∞ também é um conjunto fechado.

■

De imediato, podemos conceber como consequência da Proposição 2.1.2 a seguinte proposição.

Proposição 2.1.3 *O conjunto C_∞ é um conjunto compacto.*

Demonstração. Uma vez compreendido que C_∞ está contido em $I = [0, 1]$ que é limitado, segue-se que C_∞ também o é. Portanto, pela Proposição 2.1.2 temos que C_∞ é fechado e limitado. Logo, C_∞ é um conjunto compacto. ■

Proposição 2.1.4 *O conjunto de Cantor Ternário é um conjunto não enumerável.*

Demonstração. Suponhamos que C_∞ seja enumerável. Desse modo, seus elementos podem ser organizados em lista, consideremos da seguinte maneira:

$$C_\infty = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}.$$

Uma vez retirado o terço médio inicial, temos que c_1 deve pertencer a $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ ou a $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Escolheremos o intervalo dos dois que não contenha c_1 , ao escolhido chamaremos de $[d_1, e_1]$. Ao passo que a construção de C_2 continua, façamos a mesma análise. Omitiremos da construção o terço médio de $[d_1, e_1]$ e ficamos com $[x_1, x_2] \cup [x_3, x_4]$. Escolheremos agora $[x_1, x_2]$ ou $[x_3, x_4]$ que não contenha c_2 , ao escolhido chamaremos de $[d_2, e_2]$.

Aplicado o método anterior ao passo indutivo, façamos a seguinte interpretação. Todos os intervalos $[d_n, e_n]$ são não vazios, fechados e decrescentemente encaixados. Desse modo, pelo Teorema dos Intervalos Encaixados, deve existir $c \in [0, 1]$ tal que $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [d_n, e_n]$. Inclusive, observe que não existe outro $c' \in [0, 1]$ tal que $c' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [d_n, e_n]$. Pois, caso contrário, tomando $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande resultaria que

$$|c - c'| \leq |e_n - d_n| = \frac{1}{3^n} \rightarrow 0.$$

Ademais, obtemos que $c \in C_\infty$. Uma vez que da análise anterior $\forall n \in \mathbb{N} c \in [d_n, e_n] \subset C_n$ e por (2.3), temos $C_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Por outro lado, à maneira que construímos, $c \neq a_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, afinal se existisse $i \in \mathbb{N}$ tal que $c = a_i$, então $c \notin [d_i, e_i]$.

Portanto, estamos diante de uma contradição! Afinal, encontramos $c \in C_\infty$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $c \neq a_n$. Isso posto, nos permite concluir que o conjunto de Cantor Ternário não é enumerável.

■

À luz da nossa construção de C_∞ , obtemos que este conjunto era “apenas” uma poeira de $I = [0, 1]$. De certa maneira, ao se referir como poeira o conjunto resultante do processo de construção do conjunto de Cantor, é possível vislumbrar a seguinte propriedade que apresentaremos. Afinal, trata-se justamente da topologia desta poeira de Cantor, isto é, da não existência de intervalos em C_∞ - mais precisamente, do conjunto de Cantor Ternário possuir interior vazio.

Proposição 2.1.5 *O conjunto de Cantor Ternário possui interior vazio, isto é, $C_\infty^o = \emptyset$.*

Demonstração. Para provar que $C_\infty^o = \emptyset$ suponhamos o contrário vislumbrando um absurdo. Desse modo, suponhamos que $C_\infty^o \neq \emptyset$ e seja $x \in C_\infty^o$. Isso posto, nos permite avaliar que existe uma vizinhança aberta de x de raio $\delta > 0$ contida em C_∞ , isto é, $(x - \delta, x + \delta) \subset C_\infty$.

Assim, por (2.3), $(x - \delta, x + \delta) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Logo, $(x - \delta, x + \delta) \subset C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma vez compreendido que C_n é definido pela união de 2^n intervalos fechados e disjuntos os quais medem $\frac{1}{3^n}$, devemos ter que $(x - \delta, x + \delta)$ está contido em um dos subintervalos de C_n . Como para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande $\frac{1}{3^n} \rightarrow 0$, então deve existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^{n_0}} < \delta$. Mas observe que, $(x - \delta, x + \delta)$ mede 2δ . Como $2\delta > \delta > \frac{1}{3^{n_0}}$, temos que $(x - \delta, x + \delta)$ é maior que C_{n_0} . Logo, $(x - \delta, x + \delta) \not\subset C_{n_0}$. Mas isso contradiz $(x - \delta, x + \delta) \subset C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ consequência imediata da suposição. Por fim, $C_\infty^o = \emptyset$.

■

Ou resultado interessante, é que se C_∞ é uma poeira do que outrora foi I , o complementar de C_∞ em I preenche completamente I . Isto é, configura-se a alta mistura, a densidade de C_∞^c em I .

Proposição 2.1.6 *O conjunto complementar de C_∞ é denso em $I = [0, 1]$.*

Demonstração. Para garantir a densidade de C_∞ em $I = [0, 1]$ mostraremos que $\overline{C_\infty^c} = [0, 1]$. O conjunto complementar de C_∞ é a união dos terços médios sem suas extremidades, no momento que tomamos o fecho desta união estamos adicionando as bordas. Em síntese, $\overline{C_\infty^c} = I - C_\infty^o$. Mas

pela Proposição 2.1.5, $C_\infty^o = \emptyset$. Assim,

$$\overline{C_\infty^C} = [0, 1].$$

Ou seja, $\overline{C_\infty^C} = [0, 1]$. E portanto, C_∞^C é denso em $I = [0, 1]$. ■

Proposição 2.1.7 *O conjunto de Cantor Ternário possui medida nula.*

Demonstração. Retomemos a construção do n -ésimo passo do conjunto de Cantor. Vimos que neste passo, C_n seria definido pela união de 2^n intervalos fechados e disjuntos. Não somente, mas também vale ressaltar que os intervalos de C_n medem $1/3^n$ cada um. Além disso, é direto da construção também que $C_\infty \subset C_n$. Isso posto, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$. Desse modo, existirá uma cobertura enumerável de C_∞ por intervalos abertos $J_k \supset C_k$ os quais medem $\left(\frac{2}{3}\right)^k$. Ou seja, $C_\infty \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |J_n| < \varepsilon$. Afinal, quando $n \rightarrow \infty$.

$$\sum_{n \rightarrow \infty} |J_n| = \sum_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0.$$

O conjunto de Cantor Ternário possui medida nula¹. ■

Desse modo, a partir das Proposições anteriores e, essencialmente de 2.1.2 e 2.1.5, podemos remodelar topologicamente a descrição do conjunto de Cantor Triádico apresentada na Definição 2.1.1. Afinal, relembremos que: um conjunto é totalmente desconexo se não contiver nenhum intervalo; e um conjunto é perfeito se cada ponto dele for ponto de acumulação ou ponto limite de outros pontos no conjunto. Em vista disso, o conjunto de Cantor Triádico também é totalmente desconexo e subconjunto perfeito de I .

Além disso, nosso conjunto possui mais uma característica interessantíssima a qual deixamos ao final. Observe que se olharmos por ora somente para o intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ da construção de C_∞ . A partir de um zoom aumentado 3 vezes, poderíamos enxergar I novamente. Mais precisamente, a partir da ampliação $f(x) = 3x$ aplicada em $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ podemos obter $I = [0, 1]$ novamente.

¹Ver p. 48-49 de [15].

Mas imagine que esse "zoom" continue até a construção de C_n . Assim, a partir da ampliação $f^n(x) = 3^n x$ em qualquer um dos 2^n intervalos obteríamos novamente $I = [0, 1]$.

CAPÍTULO 3

INTRODUÇÃO À DINÂMICA UNIDIMENSIONAL

3.1 Definindo a dinâmica

Afinal, o que é a Dinâmica? É um sistema dinâmico? Usam-se estas concepções em vários contextos, e provavelmente o contexto dos estudos da Física seja o mais recorrente. No entanto, do ponto de vista matemático, a dinâmica pode descrever as iterações de uma aplicação definida em um conjunto e suas consequências no comportamento futuro de cada ponto do conjunto fixado. Ulteriormente breve estabeleceremos as definições de Dinâmica, que descreve formalmente os itens expressados acima. Evocaremos, alguns exemplos típicos, como a dinâmica da família quadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, aplicada no intervalo $[0, 1]$, exemplo este que se torna de importância significativa para o nosso estudo principalmente quando discutirmos F_μ também aplicada no conjunto de Cantor. Mas, o que é um sistema dinâmico?

3.1.1 Um sistema dinâmico

Argumentaremos o desenvolvimento de nossa conceituação a partir da teoria dos sistemas dinâmicos de tempo discreto. Ademais, um sistema dinâmico é sobretudo uma aplicação essencialmente caracterizada por uma recursiva transformação em seu domínio.

Considere uma função $f : A \rightarrow A$, onde $A \subset \mathbb{R}$ e f é contínua em A ou até mesmo contínua em A menos uma quantidade enumerável de pontos.

A partir da aplicação procuramos estudar a evolução de f pelo viés das iterações.

Definição 3.1.1 *O iterado é a composição recursiva de f , i.e o n -ésimo iterado de um ponto $x_0 \in A$ é obtido por*

$$f^{n+1}(x_0) := f \circ f^n(x_0) = f^n \circ f(x_0), n \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

É importante observar que $f^0 := Id$, sendo Id a aplicação identidade.

Podemos reanalisar a relação das composições em (3.1) analogamente do seguinte modo:

$$x_{n+1} := f(x_n),$$

no qual f é a transformação cujo domínio e contradomínio são o mesmo conjunto A e a sequência $x_n \in A$ bem define-se $\forall n \in \mathbb{N}$ uma vez escolhido $x_0 \in A$ qualquer.

Exemplo 3.1.1 *Considere a aplicação recursiva da transformação $\ln(x)$, dado o ponto inicial x , calculamos a sequência dos iterados*

$$x_0 = x, x_1 = \ln(x), x_2 = \ln(\ln(x)), x_3 = \ln(\ln(\ln(x))), \dots$$

Ao se repetir tal processo tão recursivamente quanto se queira o estudo da dinâmica finalmente torna-se mais interessante.

Continuando as definições básicas, tem-se que

$$x_{m+n} = f^{m+n} = f^m \circ f^n, \text{ para quaisquer } m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3.2)$$

Além disso, quando f é invertível, podemos definir $f^{-n} := (f^{-1})^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, generaliza-se a identidade em (3.2), a qual é satisfeita para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$.

Definição 3.1.2 *Um sistema dinâmico unidimensional é a terna (f, A, \circ) e suas propriedades.*

Podemos também considerar um sistema dinâmico unidimensional em \mathbb{C} , com $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, uma função de uma variável complexa ou mais geralmente considerar f definida no que chamamos de variedade de dimensão topológica um. Em última instância, estudar a dinâmica de uma aplicação em uma variedade é analisar o que acontece com o futuro e o passado (caso a função seja inversível) de todos os pontos ou da maioria dos pontos (do ponto de vista topológico e/ou métrico).

A partir daqui interpretaremos "tão recursivamente quanto se queira" do mesmo modo que compreendemos iterar *ad infinitum*, isto é, consideramos o estudo do comportamento futuro das iterações. Sobretudo tal ponto compreende

o estudo do comportamento final ou assintótico de um processo de iterações. [...] Se o processo é discreto tal como as iterações de uma função, então a teoria espera compreender o comportamento final dos pontos $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)$ quando n cresce. Isto é, sistemas dinâmicos questionam: para onde os pontos vão e o que fazem quando chegam lá? (Devaney, p. 17, 2003)

Introduzidos aos comportamentos dos pontos dos sistemas e a evolução dos iterados, podemos definir por ora os conjuntos órbita e por conseguinte os conjuntos dos pontos periódicos e dos pontos fixos.

3.1.2 Conjuntos: das órbitas, dos pontos periódicos e dos pontos fixos

Definição 3.1.3 *Conhecendo os pontos iterados $f^n(x)$, com $n \in \mathbb{Z}_+$, define-se a órbita futura ou também chamada de semi-órbita positiva a qual denotaremos por $O^+[x]$:*

$$O^+[x] := \{f^n(x); n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Se $f(x)$ também é invertível, podemos definir a órbita passada ou semi-órbita negativa, $O^-[x]$ que é o conjunto dos pontos $f^{-n}(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$O^-[x] := \{f^{-n}(x); n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

bem compreende-se assim que a órbita completa $O[x]$, como o conjunto dos pontos $f^n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$O[x] := O^+[x] \cup O^-[x] = \{f^n(x); n \in \mathbb{Z}\}.$$

Observação 3.1.1 Depreende-se que nem sempre será possível discutir a órbita completa de algumas funções, haja visto a exigência da bijeção para se ter a inversa. Isso posto, comumente refere-se às órbitas futuras - nesse contexto, as únicas órbitas possíveis de se definir - das funções não inversíveis, simplesmente como órbitas.

Além disso, vale frisar que compreendemos que tais conjuntos órbitas correspondem ao itinerário de um determinado ponto inicial ao longo de uma aplicação f . Verifica-se que a bijeção de uma aplicação é um fator relevante no estudo da dinâmica desta aplicação. Retornaremos recorrentemente às funções bijetivas e contínuas no desenvolvimento deste trabalho, por isso faz-se necessário tratar desde já tais funções da seguinte maneira.

Definição 3.1.4 Uma função f diz-se um homeomorfismo se: f é bijetiva; e f e f^{-1} são contínuas.

Exemplo 3.1.2 Considere a aplicação $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida por $f(x) = x^2$, de fato f é homeomorfismo. pois:

i) *bijetividade*: $x_1 > x_2 \Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \therefore f$ é injetiva.

$c \in [0, \infty) \Leftrightarrow 0 \leq c \Leftrightarrow 0 \cdot c = 0 \leq c^2 = f(c) \therefore f(c) \in [0, \infty), \forall c \in [0, \infty) \therefore f$ é sobrejetiva.

ii) *continuidade*: $f(x) = x^2$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ são contínuas em $[0, \infty)$.

Exemplo 3.1.3 Retomando o Exemplo 3.1.2 considere o ponto $x_0 = \frac{1}{2} = 0.5$. Veja que

$$x_1 = f(x_0) = x_0^2 = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$x_2 = f^2(x_0) = (x_0^2)^2 = x_0^4 = \frac{1}{16} = 0.0625$$

$$x_3 = f^3(x_0) = ((x_0^2)^2)^2 = x_0^8 = \frac{1}{256} = 0.0039$$

$$x_n = f^n(x_0) = x_0^{2^n} = \frac{1}{2^{2^n}}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Assim, recursivamente calculando os iterados de $x_0 = 0.5$ em f quando n cresce obtemos a semiórbita positiva deste x_0 , veja

$$O^+[0.5] = \{f^n(0.5); n \in \mathbb{N} \cup 0\} = \left\{0.5, 0.25, 0.625, 0.0039, \dots, \frac{1}{2^{2^n}}, \dots\right\} \quad (3.3)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} f^{-1}(x_0) &= \sqrt{x_0} = 0.707 \\ f^{-2}(x_0) &= \sqrt{\sqrt{x_0}} = 0.84 \\ f^{-3}(x_0) &= \sqrt{\sqrt{\sqrt{x_0}}} = 0.917 \\ f^{-n}(x_0) &= \frac{1}{2^{2^{-n}}} \end{aligned}$$

Determinemos a semiórbita negativa de $x_0 = 0.5$,

$$O^-[0.5] = \{f^{-n}(0.5); n \in \mathbb{N} \cup 0\} = \left\{0.5, 0.70, 0.84, 0.91, \dots, \frac{1}{2^{2^{-n}}}, \dots\right\}. \quad (3.4)$$

A partir das semiórbitas obtidas em 3.3 e 3.4 conseguimos expressar o conjunto $O[0.5]$,

$$O[0.5] = \{f^n(0.5); n \in \mathbb{Z}\} = \left\{\dots, \frac{1}{2^{2^{-n}}}, \dots, 0.84, 0.70, 0.5, 0.25, 0.625, \dots, \frac{1}{2^{2^n}}, \dots\right\} \quad (3.5)$$

Exemplo 3.1.4 Considere a mesma função definida no Exemplo 3.1.2, observe que se $x_0 = 1$, então

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 = f(1) = f^2(1) = f^3(1) = \dots = f^n(1) \\ 1 &= \sqrt{1} = f^{-1}(1) = f^{-2}(1) = \dots = f^{-n}(1) \end{aligned}$$

Concluimos que

$$O[1] = O^+[1] \cup O^-[1] = \{1\} \cup \{1\} = \{1\}.$$

Observação 3.1.2 Gostaríamos de salientar a seguinte questão acerca dos exemplo anteriores. Quais seriam os itinerários, as órbitas positiva e negativa de $x_0 = 0.5$ e $x_0 = 1$ ao se iterar ad infinitum? Retomaremos esta questão futuramente.

Exemplo 3.1.5 Considere a aplicação g no S^1 , definida por $g(\theta) = 2\theta$. É fácil concluir que $O[0] = \{0\}$, afinal $f^n(\theta) = 2^n\theta$ e $2^n \cdot 0 = 0$, para qualquer n .

Os Exemplos 3.1.4 e 3.1.5 nos motivam às seguintes definições as quais são imprescindíveis ao estudo da teoria dos sistemas dinâmicos .

Definição 3.1.5 O ponto x é um ponto fixo para uma aplicação f se $f(x) = x$. Denotaremos o conjunto dos pontos fixos de uma aplicação f por $Fix(f)$.

Proposição 3.1.1 Sejam $f : X \rightarrow X$ e $x \in X$. Se $O[x] = \{x\}$, então x é ponto fixo de f

Demonstração. Pela Definição 3.1.3, devemos ter sem perda de generalidade que

$$\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x) \dots\} = \{x\}.$$

Mas se tais conjuntos são iguais, então $x = f^n(x)$ para todo n . E, particularmente, valerá que $f(x) = x$. Portanto, x é ponto fixo de f .

■

Definição 3.1.6 O ponto x é um ponto periódico de período p , se $f^p(x) = x$. Mais precisamente, diz-se que x é ponto de período p se p é o menor inteiro positivo tal que $f^p(x) = x$. Denotaremos o conjunto dos pontos periódicos de uma aplicação f por $Per_p(f)$. Observe que $Per_{kp} \subset Per_p$.

Se x é um ponto periódico de período p , então a sua órbita completa ciclos, repetições, a cada p iterações da aplicação. Analisando como conjunto, a órbita de um ponto periódico x de período p é um conjunto finito $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$.

Definição 3.1.7 Seja $f : A \rightarrow A$ uma função. Um conjunto $B \subseteq A$ é invariante pela f se $f(B) \subset B$.

Observação 3.1.3 É válido compreender claramente que a órbita periódica é o conjunto de todos os iterados de um determinado ponto periódico.

Esta discussão inicial sobre itinerários e periodicidade passa a ser mais interessante quando pensamos na quantidade de pontos fixos, para onde irão os pontos de uma vizinhança de tal ponto fixo, ou ainda o que a ordem de periodicidade é capaz de resultar. Por exemplo, a identidade $Id(x) = x$ em \mathbb{R} possui todo o seu domínio fixado, *i.e.*, $Fix(Id) = \mathbb{R}$, no entanto se pensarmos na função $f(x) = -x$, esta fixa apenas a origem, afinal $-x = x$ apenas se $x = 0$.

Analisando ainda $f(x) = -x$, observe que

$$f(x) = x, f^2(x) = -(-x) = x, f^3(x) = -(x) = -x, \dots, f^n(x) = (-1)^n x.$$

Depreendemos assim que todos os pontos não nulos são de período 2 e que $Per_2(f) = \mathbb{R}^*$, afinal sem perda de generalidade ao passo que n é par a próxima iteração $n + 1$ de x retorna ao iterado $n - 1$, isto é, retorna ao $-x$. Se iterarmos $x = 1$ ao longo de $f(x) = -x$, observaremos que $O[1] = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$. Veja que se iterarmos $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ao longo de $f(x) = -x$, concluímos que a órbita de x_0 é $O[x_0] = \{x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots\}$. Tal processo pode ser analisado pelo seguinte gráfico:

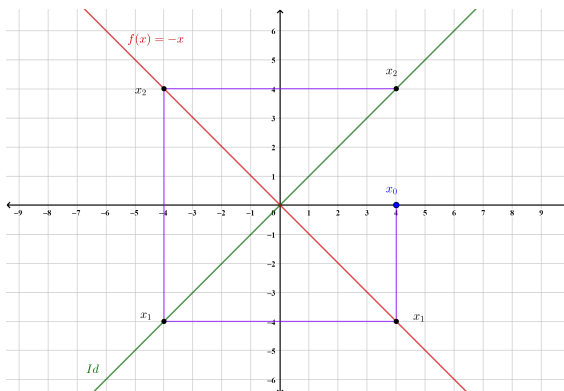


Figura 3.1: Itinerário de $x_0 = 4$ ao longo de $f(x) = -x$.

E aqui nos deparamos pela primeira vez com o diagrama das *iterações em teias*, que são essencialmente caminhos (no caso, em lilás) de poligonais perpendiculares. O processo da condução do diagrama consiste sobretudo no espelhamento recursivo que segue os seguintes passos: toma-se um ponto x_0 no domínio; projeta-se este ponto x_0 na aplicação, construindo o segmento de x_0 até sua projeção em f , isto é, esse passo reflete a busca do $x_1 = f(x_0)$; projeta-se x_1 perpendicularmente ao segmento anterior em Id , construindo um segmento paralelo ao eixo x ; note que a projeção de x_1 em Id é justamente o próprio x_1 no domínio de f ; agora basta repetir para x_1 em Id o que fizemos para x_0 , isto resultará no encontro de $x_2 = f^2(x_0) = f(x_1)$.

Repetindo o processo tanto quanto se queira estaremos construindo um diagrama que denotará geometricamente o itinerário de x_0 ao longo de f . No nosso exemplo, do fato de todo $x \neq 0$ ser de período 2 para $f(x) = -x$, obtemos poligonais quadradas.

Exemplo 3.1.6 A aplicação $f(x) = x^2$ possui 0 e 1 como pontos fixos. Veja que

$$x^2 = x \leftrightarrow x(x - 1) = 0. \quad (3.6)$$

E a equação (3.6) só é verdadeira para $x = 0$ e $x = 1$. Vejamos o gráfico

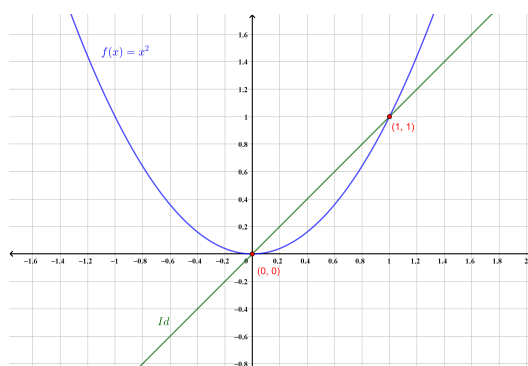


Figura 3.2: Pontos fixos de $f(x) = x^2$.

Exemplo 3.1.7 A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ possui três pontos fixos. Afinal,

$$x^3 = x \leftrightarrow x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) = 0. \quad (3.7)$$

E a equação (3.7) só é verdadeira para $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$. Vejamos no seguinte gráfico.

Exemplo 3.1.8 Encontremos os pontos fixos da aplicação $Q_a(x) = x^2 - a$, com $a \in \mathbb{Z}_+$. Façamos

$$x^2 - a = x \leftrightarrow x^2 - x = a \leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = a + \frac{1}{4}. \quad (3.8)$$

E assim do obtido em (3.8), temos

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4a + 1}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4a + 1} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{4a + 1}\right).$$

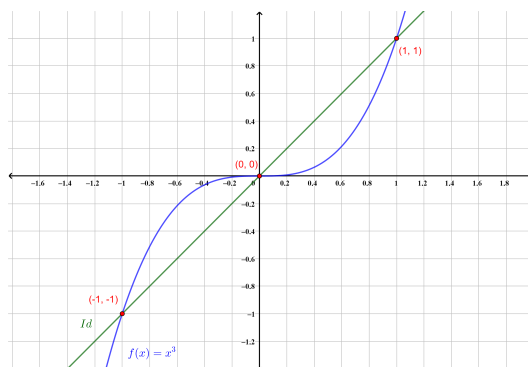


Figura 3.3: Pontos fixos de $f(x) = x^3$.

Desta forma, obtemos os dois pontos fixos de $Q_a(x) = x^2 - a$, os quais são

$$x = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{4a + 1} \right).$$

Exemplo 3.1.9 Se $a = 1$, teríamos $Q_1(x) = x^2 - 1$. Observe que o gráfico de Q_1 seria intersectado por Id nos pontos $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, aproximadamente $x = -0.62$ e $x = 1.62$. Ou seja, $x = -0.62$ e $x = 1.62$ são os pontos fixos de $Q_1(x)$.

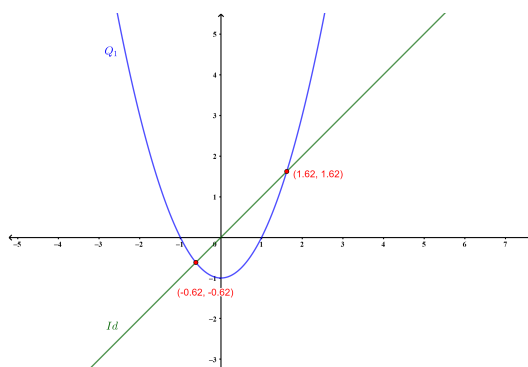


Figura 3.4: Pontos fixos de $Q_1(x) = x^2 - 1$.

Considerando ainda análise sobre os pontos aplicados em Q_1 . Observe que os iterados de 0 e -1 geram órbitas periódicas. Analisemos inicialmente $x = 0$, note que $Q_1(0) = -1$, $Q(Q_1(0)) = 0$, e assim recursivamente encontramos que $Q_1^{2n-1}(0) = -1$ e $Q_1^{2n}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Vejamos agora $x = -1$, note que $Q_1(-1) = 0$, $Q(Q_1(-1)) = -1$ e assim recursivamente encontramos que $Q_1^{2n-1}(-1) = 0$ e $Q_1^{2n}(-1) = -1$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ou seja, estamos diante de dois pontos de período 2 para Q_1 , cujas órbitas tem somente os mesmos elementos de $\{0, -1\}$.

Desta vez, testemos outro ponto. Seja este o $x = 1$, vejamos o que ocorre ao longo de $Q_1(x) = x^2 - 1$.

$$x = 1, Q_1(1) = 0, Q_1^2(1) = -1, Q_1^3(1) = 0, Q_1^4(1) = -1, Q_1^5(1) = 0, \dots$$

Observe que $x = 1$ é "quase" periódico. Na verdade, sua órbita culmina nas órbitas dos periódicos 0 e -1 .

Vejamos no diagrama de teias o itinerário de $x = 1$ no seguinte gráfico:

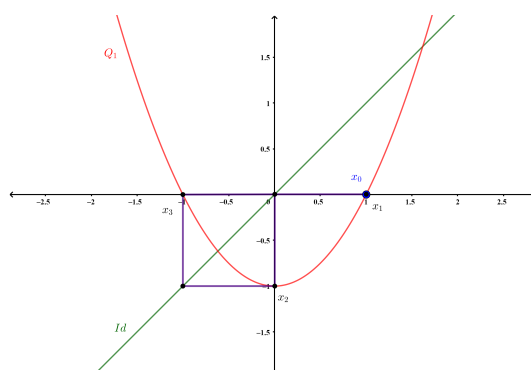


Figura 3.5: Itinerários de $x = 1$ sobre $Q_1(x) = x^2 - 1$.

Como $x = 1$ não é periódico, o fato das semiórbitas positivas $O^+[0]$ e $O^+[-1]$ sobre $Q_1(x)$ estarem contidas em $O^+[1]$ nos sugestionam que $x = 1$ é um ponto que *eventualmente* seria periódico - afinal, a partir do segundo iterado $x = 1$ segue o itinerário de $x = 0$, isto é, $Q_1^{n+1}(1) = Q_1^n(0)$. Precisamos definir este comportamento formalmente.

Definição 3.1.8 *Se x não é um ponto periódico, no entanto exista $m > 0$ tal que $f^{n+k}(x) = f^k(x)$ para todo $k \geq m$, então x é eventualmente periódico de período n . Isto é, $f^k(x)$ é periódico para $k \geq m$, e particularmente, se $f^{n+1}(x) = f^n(x)$ temos que x é pré-fixo.*

Desse modo, pela Definição 3.1.8, $x = 1$ é um ponto pré-periódico para $Q_1(x)$, uma vez que $Q_1^2(1) = Q_1(0)$.

Observação 3.1.4 *Vale ressaltar que se a aplicação f for um homeomorfismo, então para se manter a sua bijeção não deverá existir pontos eventualmente periódicos¹.*

¹Ver p.19 [7].

Tratemos a seguir um exemplo mais elaborado.

Exemplo 3.1.10 *Seja S^1 o círculo unitário no plano. Seja $g(\theta) = a\theta$, com $\theta \in S^1$ e $a \in \mathbb{N}$. Dizer que $\theta \in S^1$ nos permite escrever $\theta = \theta + 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}_+$. Note também que $g^n(\theta) = a^n\theta$, $\forall \theta \in S^1$. No entanto, se θ é um ponto periódico de período n , devemos ter que*

$$g^n(\theta) = a^n\theta = \theta = \theta + 2k\pi, \quad (3.9)$$

para algum inteiro k .

Mas observemos que de (3.9), é possível concluir que

$$\theta = \frac{2k\pi}{a^n - 1} \text{ e } k = \frac{\theta(a^n - 1)}{2\pi}. \quad (3.10)$$

Por ora, analisemos o seguinte, como $0 \leq \theta \leq 2\pi$, então $0 \leq a^n\theta \leq 2\pi a^n$. Utilizando a primeira desigualdade, obtemos $0 \leq a^n\theta - \theta \leq 2\pi a^n - 2\pi$. Dividindo a última desigualdade por 2π , obtemos $0 \leq k \leq a^n - 1$. Do fato de $a \in \mathbb{N}$, temos que $a \geq 1$. Desse modo de (3.10),

$$\theta \cdot a^n = \frac{2k\pi}{1 - \frac{1}{a^n}} \dots \quad (3.11)$$

Fixado k , ao se fazer $n \rightarrow \infty$ em (3.11), concluímos que $\theta \cdot a^n = k2\pi$. Mas lembre que θ pode ser 2π . Logo, k também pode ser a^n . E isto nos permite concluir que $\theta = \frac{2k\pi}{a^n - 1}$ para $0 \leq k \leq a^n$ inteiro. Mas não somente, uma vez que se θ é ponto periódico de período n para g , então os elementos de $Per_n(g)$ são as $a^n - 1$ raízes de 2π .

3.1.3 Conjuntos limite

Definição 3.1.9 *Sejam X um espaço métrico e $f : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico. Dado $x \in X$ definimos o conjunto ω -limite de x como o conjunto dos pontos $\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x); x \in X \right\}$ e denotamos por $\omega_f[x]$, e quando não houver ambiguidade, simplesmente por $\omega[x]$. Vale ressaltar a seguinte*

definição equivalente.

$$\omega_f[x] := \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x); x \in X \right\} \quad (3.12)$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{f^m(x); m \geq n\}}. \quad (3.13)$$

Observação 3.1.5 Se X é um compacto, é verdade que buscar $\omega_f[x_0]$ é procurar onde os pontos $x_0 \in X$ estão se acumulando. No entanto, se pegarmos por exemplo $X = \mathbb{R}$ é possível que $\omega[x] = \emptyset$. Tome $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$. Desse modo, $f^n(x) = x + n$ e nesse caso, de fato, $\omega_f[x_0] = \emptyset$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Definição 3.1.10 Seja $f : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico inversível. Dado $x \in X$ definimos o conjunto α -limite de x como o conjuntos dos pontos $\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x); x \in X \right\}$ e denotamos por $\alpha_f[x]$, e quando não houver ambiguidade, simplesmente por $\alpha[x]$. Vale ressaltar a seguinte definição equivalente.

$$\alpha_f[x] := \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x); x \in X \right\} \quad (3.14)$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{f^{-m}(x); m \geq n\}}. \quad (3.15)$$

Definição 3.1.11 Sejam $f : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico e p um ponto periódico de f de período n . Um ponto x é dito ω -limite assintoticamente se $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p$. O conjunto de todos os pontos $x \in X$ tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p$ é chamado de conjunto estável, e o denotaremos por $W^s(p)$.

Definição 3.1.12 Sejam $f : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico inversível e p um ponto periódico de f de período n . Um ponto é dito α -limite assintoticamente se $\lim_{k \rightarrow -\infty} f^{kn}(x) = p$. O conjunto de todos os pontos $p \in X$ tais que $\lim_{k \rightarrow -\infty} f^{kn}(x) = p$ é chamado de conjunto instável, e o denotaremos por $W^u(p)$.

Observação 3.1.6 Se p não é periódico, façamos uma adaptação às duas últimas definições adicionando a seguinte exigência, se

$$k \rightarrow \infty \implies |f^k(x) - f^k(p)| \rightarrow 0,$$

então p é ω -limite assintoticamente. Agora se

$$k \rightarrow -\infty \implies |f^k(x) - f^k(p)| \rightarrow 0,$$

então p é α -limite assintoticamente

Exemplo 3.1.11 Retomemos o Exemplo 3.1.9. O ponto $x = 1$ é eventualmente periódico, e culmina a órbita dos periódicos $x = -1$ (na primeira iteração) e $x = 0$ (na segunda iteração). E assim, segue diretamente que $1 \in W^s(-1)$ e $1 \in W^s(0)$.

Exemplo 3.1.12 Retomemos o Exemplo 3.1.7. Uma vez compreendido que $-1, 0$ e 1 são os pontos fixos de $f(x) = x^3$, podemos interpretar que $W^s(0) = (-1, 1)$, $W^u(-1) = \{x \in \mathbb{R}; x < -1\}$ e $W^u(1) = \{x \in \mathbb{R}; x > 1\}$. Vejamos isso com os seguintes diagramas de teias.

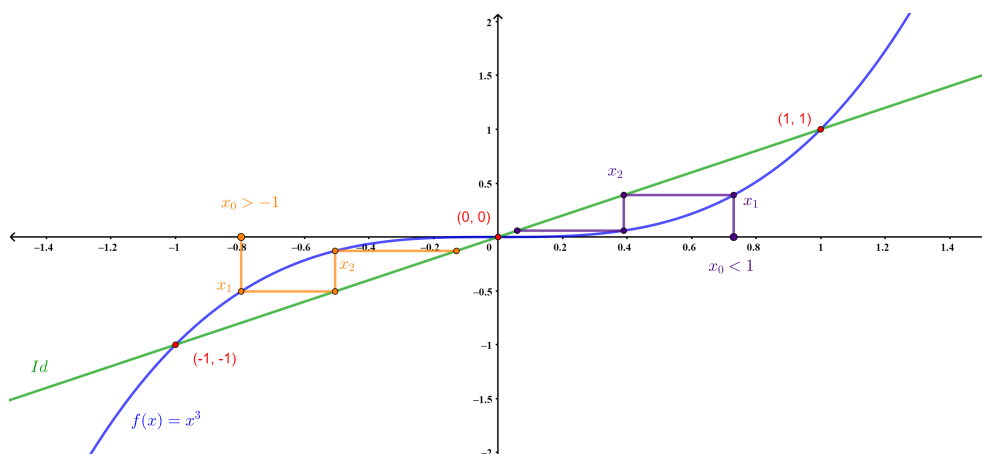


Figura 3.6: Diagrama que esboça o conjunto estável de 0.

Veja que da Figura 3.6, de fato os x tais $f^n(x) = 0$ quando $n \rightarrow \infty$ são $-1 < x < 1$, confirmando que $W^s(0) = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 1\}$.

Veja que da Figura 3.7, de fato os x tais $f^n(x) = -1$ quando $n \rightarrow -\infty$ são $x < -1$ e os x tais $f^n(x) = 1$ quando $n \rightarrow -\infty$ são $x > 1$. Confirmando que $W^u(-1) = \{x \in \mathbb{R}; x < -1\}$ e $W^u(1) = \{x \in \mathbb{R}; x > 1\}$.

Notem do exemplo anterior, que existem alguns pontos que se aproximam (ou se afastam) mais rápido. Mas isto já nos permite vislumbrar, antecipar, alguma relação com a derivada. Compreenderemos esta noção no capítulo seguinte, trata-se da hiperbolicidade.

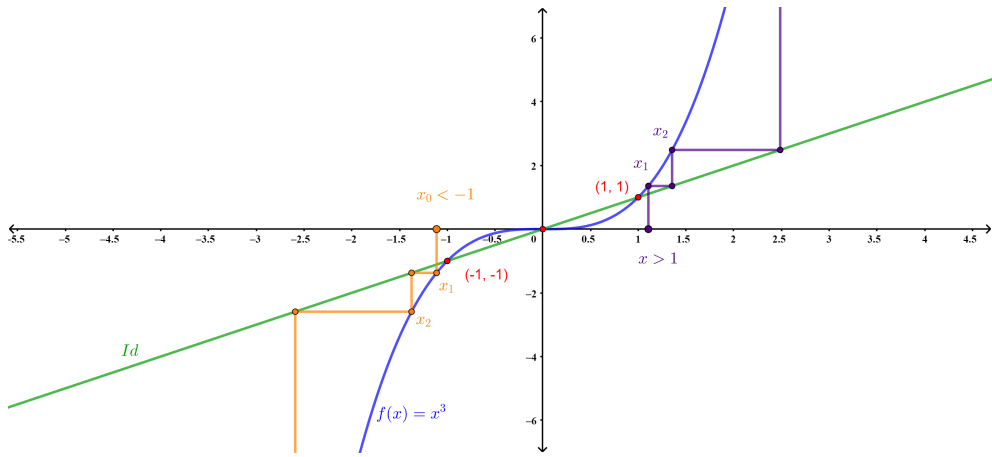


Figura 3.7: Diagrama que esboça os conjuntos instáveis de -1 e 1 .

CAPÍTULO 4

HIPERBOLICIDADE

Argumentaremos nesta seção a construção da atração e repulsão de pontos à luz da derivada do sistema dinâmico e a esta grandeza chamaremos *hiperbolicidade* e aos pontos nessa natureza de *pontos hiperbólicos*. A priori discutiremos algumas aplicações de suma importância para o desenvolvimento e boa compreensão do nosso estudo para bem introduzir a noção da hiperbolicidade. E uma dessas é a dinâmica sobre o círculo unitário S^1 que veremos a seguir.

4.1 Dinâmica no Círculo

O círculo unitário centrado na origem é visto no Ensino Médio como o conjunto

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

o já bem conhecido subconjunto de \mathbb{R}^2 . Aqui veremos S^1 como um intervalo. Para isso, ao invés do espaço \mathbb{R}^2 consideraremos o círculo como um subconjunto do plano complexo \mathbb{C} , ou seja, os números complexos $z \in \mathbb{C}$ tais que $|z| = 1$. Definamos $\Pi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ como

$$\Pi(x) = e^{2\pi i x}$$

desse modo, condicionamos a apresentação de S^1 sendo subconjunto de \mathbb{C} . Observe diretamente que estamos definindo um homomorfismo, afinal

$$\begin{aligned}\Pi(x + y) &= e^{2\pi i(x+y)} = e^{2\pi i x} \cdot e^{2\pi i y} \\ &= \Pi(x) \cdot \Pi(y).\end{aligned}$$

Além disso, compreenda que estamos diante de uma aplicação que não é injetiva, pois se $x \in \mathbb{Z}$, sempre ocorre que $\Pi(x) = 1$. Logo, Π não é um isomorfismo. No entanto, para fazer a identificação de algo em \mathbb{C} com um intervalo, tal como estamos construindo para rerepresentar S^1 precisaremos ter a bijetividade para se concluir o isomorfismo. Mas, para isso deveremos buscar restrições no domínio de Π . A priori, é direto concluir que o núcleo de Π é \mathbb{Z} - mas, gostaríamos que $\text{Ker}(\Pi) = \{0\}$. Por outro lado, se considerarmos $\Pi|_{[n, n+1)}$, com $n \in \mathbb{Z}$, temos assim que $\text{Ker}(\Pi|_{[n, n+1)}) = \{0\}$. Portanto, $\Pi|_{[0, 1)}$ é um homomorfismo que possui a injetividade. Dada tal construção, seja $\tau : [0, 1) \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$, com $\tau = \Pi|_{[0, 1)}$. Já sabemos que $\tau(x)$, com $x \in [0, 1)$, possui a injetividade, mas não somente, afinal τ possui também a sobrejetividade - uma vez que existe um único $\tau^{-1}(z) = x \in [0, 1)$ para todo $z \in S^1$. Por fim, concluímos a bijeção do homomorfismo τ , depreende-se que $[0, 1)$ e S^1 são isomorfos. Mas também, é verdade que $\Pi/\text{Ker}(\Pi) = \Pi/\mathbb{Z} = S^1$.

Ademais, embora rerepresentemos S^1 como o intervalo $[0, 1)$, compreendemos que para o desenvolvimento da teoria será mais conveniente considerar S^1 "isomorfo" ao intervalo unitário $I = [0, 1]$. Mas para isso, exigiremos a compreensão para termos os pontos "0" e "1" identificados, isto é, "0=1", para assim mantermos a injetividade do isomorfismo. Formalmente, a identificação se trata de fato da seguinte igualdade de classes $[0] = [1]$. Uma representação do exposto pode ser encontrada na Figura 4.1.

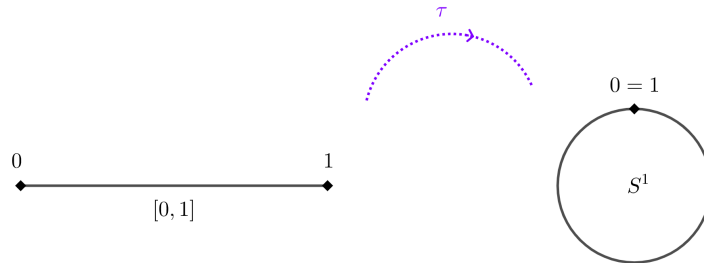


Figura 4.1: Identificação de $[0, 1]$ com S^1 .

Uma vez que nossa perspectiva sobre S^1 não é a usual, também precisaremos definir uma distância conveniente para prosseguirmos o nosso estudo. Afinal, ao identificar 0 e 1, não devemos ter que a distância entre eles resulte em 1, mas sim 0. Inclusive, ao medir as distâncias, em algum momento teríamos que escolher entre um arco maior e outro menor. Deste modo, para $x, y \in S^1$ vamos considerar a seguinte distância no círculo:

$$d_{S^1}(x, t) = \min\{|x - y|, |x - y - 1|, |x - y + 1|\}.$$

Usando a distância definida, obtemos $d_{S^1}(0, 1) = \min\{1, 2, 0\} = 0$ como queríamos.

Exemplo 4.1.1 *Vejamos alguns exemplos sobre d_{S^1} :*

$$1. \ d_{S^1}\left(\frac{1}{13}, \frac{12}{13}\right) = \frac{2}{13}$$

$$2. \ d_{S^1}\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

$$3. \ d_{S^1}\left(0, \frac{13}{18}\right) = \frac{5}{18}$$

$$4. \ d_{S^1}\left(\frac{13}{15}, 1\right) = \frac{2}{15}$$

Observemos que ao que parece se operarmos elementos de S^1 poderíamos obter um outro fora do mesmo. No entanto, isso seria uma inconveniência e para evitá-la consideraremos a noção de *módulo 1* - isto é, os pontos que diferem por um número inteiro são na verdade o mesmo elemento do S^1 .

Exemplo 4.1.2 *Para melhor compreensão, vejamos exemplos:*

1. O ponto 1.3 é o mesmo que 0.3, ou que -0.7 , ou que 75.3, ou que $0.3 \pmod{1}$, ou que $75.3 \pmod{1}$.
2. Vale também $\frac{2}{5} = -\frac{3}{5} = \frac{7}{5} = \frac{2}{5} \pmod{1}$.

É importante interpretarmos que a distância d_{S^1} se trata de uma métrica. Dada relevância da propriedade, exporemos essa noção como uma proposição.

Proposição 4.1.1 *A distância d_{S^1} é uma métrica sobre S^1 .*

Demonstração.

1. Já temos $d_{S^1}(x, y) \geq 0$, por definição de função modular.
2. Se $x = y$, então $d_{S^1}(x, y) = \min\{0, 1, 1\} = 0$. Por outro lado, se $d_{S^1}(x, y) = 0$, então $\min\{|x - y|, |x - y - 1|, |x - y + 1|\} = 0$. Daí, $x - y = 0$, ou $x - y - 1 = 0$, ou $x - y + 1 = 0$. No entanto, os dois últimos casos diferem apenas de um inteiro, isto é, $x = y \pmod{1}$. Desse modo, vale $x = y$.
3. Observe que $d_{S^1}(x, y) = \min\{|x - y|, |x - y - 1|, |x - y + 1|\} = \min\{|y - x|, |y - x + 1|, |y - x - 1|\} = d_{S^1}(y, x)$
4. Verificaremos analisando casos, inicialmente tomaremos $d_{S^1}(x, y) = |x - y|$ e $d_{S^1}(y, z) = |y - z|$. Desse modo, ocorrerá que

$$d_{S^1}(x, y) + d_{S^1}(y, z) = |x - y| + |y - z|. \quad (4.1)$$

Como $|x - y| + |y - z| \geq |(x - y) + (y - z)| = |x - z|$. Se $d_{S^1}(x, z) = |x - z|$, então está feito. Por outro lado, caso contrário, restariam duas possibilidades $d_{S^1}(x, z) = |x - z + 1|$ ou

$d_{S^1}(x, z) = |x - z - 1|$. Mas veja que se $d_{S^1}(x, z) = |x - z + 1|$, então $|x - z| \geq |x - z + 1|$. Assim, pela desigualdade em (4.1) obtemos a conclusão. Por fim, caso nenhum dos anteriores seja o mínimo, deve ocorrer que $d_{S^1}(x, z) \leq |x - z + 1|$ e $d_{S^1}(x, z) \leq |x - z|$, logo $d_{S^1}(x, z) = |x - z - 1| \leq \min\{|x - z|, |x - z + 1|\}$.

Segundo caso, se $d_{S^1}(x, y) = |x - y|$ e $d_{S^1}(y, z) = |y - z + 1|$. Desse modo,

$$d_{S^1}(x, y) + d_{S^1}(y, z) = |x - y| + |y - z + 1|. \quad (4.2)$$

Como $|x - y| + |y - z + 1| \geq |(x - y) + (y - z + 1)| = |x - z + 1|$. Se $d_{S^1}(x, z) = |x - z + 1|$, então já finalizamos. Caso contrário, só seria possível $d_{S^1}(x, z) = |x - z|$ ou $d_{S^1}(x, z) = |x - z - 1|$. Mas veja que se $d_{S^1}(x, z) = |x - z - 1|$, então $|x - z + 1| \geq |x - z - 1|$. Assim, pela desigualdade em (4.2) obtemos a conclusão. Por fim, caso nenhum dos anteriores seja o mínimo, deve ocorrer que $d_{S^1}(x, z) \leq |x - z + 1|$ e $d_{S^1}(x, z) \leq |x - z - 1|$, logo $d_{S^1}(x, z) = |x - z| \leq \min\{|x - z - 1|, |x - z + 1|\}$.

Terceiro caso, se $d_{S^1}(x, y) = |x - y + 1|$ e $d_{S^1}(y, z) = |y - z + 1|$. Desse modo,

$$d_{S^1}(x, y) + d_{S^1}(y, z) = |x - y + 1| + |y - z + 1|. \quad (4.3)$$

Como $|x - y + 1| + |y - z + 1| \geq |(x - y + 1) + (y - z + 1)| = |x - z + 2| \geq |x - z| + 2$. Se $d_{S^1}(x, z) = |x - z + 1|$, então já finalizamos. Uma vez que,

$$|x - z + 1| \leq |x - z| + 1 \iff |x - z + 1| + 1 \leq |x - z| + 2$$

Como $|x - z + 1| \leq |x - z + 1| + 1$, resulta

$$d_{S^1}(x, z) = |x - z + 1| \leq |x - z| + 2 \leq |x - y + 1| + |y - z + 1| = d_{S^1}(x, y) + d_{S^1}(y, z).$$

Caso contrário $d_{S^1}(x, z) = |x - z|$ ou $d_{S^1}(x, z) = |x - z - 1|$. Mas veja que se $d_{S^1}(x, z) = |x - z - 1|$, então $|x - z + 1| \geq |x - z - 1|$. Assim, pela desigualdade em (4.3) obtemos a conclusão. Por fim, caso nenhum dos anteriores seja o mínimo, deve ocorrer que $d_{S^1}(x, z) \leq |x - z + 1|$ e $d_{S^1}(x, z) \leq |x - z - 1|$, logo $d_{S^1}(x, z) = |x - z| \leq \min\{|x - z - 1|, |x - z + 1|\}$.

Os outros seis casos são inteiramente análogos. E por conseguinte, sempre vale a desigualdade triangular de d_{S^1} sobre S^1 .

Pelo que concluímos anteriormente, estamos diante de fato de uma métrica d_{S^1} sobre S^1 .

■

Ao concluir que d_{S^1} é uma métrica, obtemos que o par (S^1, d_{S^1}) é um espaço métrico. O que nos possibilita analisar a existência de conjuntos abertos ou fechados, de proximidade e convergência de pontos e até de continuidade de aplicações em S^1 .

Exemplo 4.1.3 *Analisemos alguns exemplos:*

1. O intervalo $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ é aberto em S^1 .
2. O intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{5}, 1\right]$ é aberto em S^1 .
3. O intervalo $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ é fechado em S^1 .
4. O intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{5}, 1\right]$ é fechado em S^1 .
5. O intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right)$ não é aberto nem fechado em S^1 .
6. O intervalo $\left(\frac{2}{5}, 1\right]$ não é aberto nem fechado em S^1 .
7. Vale que $[0, 1) = (0, 1] = [0, 1] = S^1$
8. O círculo unitário S^1 é aberto e fechado.

Observação 4.1.1 *Pelo que argumentamos anteriormente, é aceitável dizer também que o círculo todo é $[1, 2)$, $[44.3, 45.3]$, $(-12, -11]$, ou ainda $[a, a + 1) = (a, a + 1] = [a, a + 1]$.*

4.2 Rotações sobre o círculo unitário

Definição 4.2.1 *Uma rotação de S^1 é uma aplicação $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ definida na forma $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$, com $\alpha \in [0, 1]$.*

Observação 4.2.1 *Uma definição análoga à dada acima retrata a rotação como $R_\alpha(x) = x + 2\pi\alpha$, com $x \in S^1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Em alguns exemplos será mais conveniente tratar à última maneira para se evidenciar com clareza determinadas propriedades investigadas. Note que a identificação de 0 e 1 mantém-se respeitada. Em síntese, apenas reforçamos a compreensão de que 0 e 1 são identificados também com 2π .*

Exemplo 4.2.1 *Notemos que:*

1. $R_0(x) = R_1(x) = x$ é a rotação identidade - a qual possui todos os seus pontos sendo fixos.
2. $R_{\frac{1}{4}}, R_{\frac{3}{4}}$ são rotações de 90° e 270° no sentido horário, respectivamente.

Observação 4.2.2 *Ao se iterar R_α , obtemos*

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}, R_\alpha^2(x) = x + 2\alpha \pmod{1}, R_\alpha^3(x) = x + 3\alpha \pmod{1}, \dots$$

E ao passo indutivo, concluímos que

$$R_\alpha^n(x) = x + n\alpha \pmod{1} = R_{n\alpha}(x). \quad (4.4)$$

Logo compreendemos que a dinâmica anterior no círculo representa uma rotação se observarmos que cada elemento se desloca α ao longo do perímetro do círculo. É importante lembrarmos que embora estejamos fazendo identificações de 0 com 1, visando a perspectiva modular, a rotação apresentada também equivale a uma rotação de $2\pi\alpha$ radianos.

O parâmetro α dirige grande importância no desenvolvimento da teoria. Desse modo, dado $\alpha \in \mathbb{R}$ classificaremos as rotações no círculo em consonância com essa constante.

Definição 4.2.2 *Se $\alpha \in [0, 1]$ for um número racional, diremos que R_α é uma rotação racional. Senão, uma rotação irracional.*

Observação 4.2.3 *Ao se classificar a rotação dependendo da natureza de α , depreendemos que a aplicação se comporta de maneiras diferentes dependendo de α ser racional ou não, desse modo podemos também classificar as órbitas dos elementos de S^1 a partir dos iterados de R_α . Vejamos no seguinte exemplo que culminará em um teorema fundamental.*

Exemplo 4.2.2 Seja $R_\alpha(x) = x + 2\pi\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \in \mathbb{Q}$, isto é, se $\alpha = p/q$ com p e q inteiros, então $R_\alpha^q(x) = x + 2\pi p = x$. O que significaria que todos os pontos do círculo são periódicos de período q . Por outro lado, o que ocorre quando α é irracional? Discutiremos os casos a seguir.

Teorema 4.2.1 *Todo ponto do círculo tem órbita periódica sob rotação racional.*

Demonstração. Sejam x_0 um ponto do círculo e α um número racional associado à rotação R_α . Para mostrar que a órbita de x_0 é periódica, basta achar um natural n tal que $R_\alpha^n(x_0) = x_0$.

De $\alpha \in \mathbb{Q}$, consideremos $\alpha = p/q$, sendo p e q inteiros e q não nulo. Tomando $n = q$, temos $R_\alpha^q(x_0) = x_0 + q\alpha \pmod{1}$ e, finalmente, como $q\alpha = p$ é um inteiro, $R_\alpha^q(x_0) = x_0$. Como x_0 é um ponto genérico do círculo, todo ponto do círculo tem órbita periódica sob rotação racional. ■

Observação 4.2.4 *Da conclusão do Teorema 4.2.1 seria igualmente compatível concluir que todos os pontos do S^1 seriam periódicos de período q ou ainda que são fixos para R_α^q .*

Teorema 4.2.2 *Nenhum ponto do círculo tem órbita periódica sob rotação irracional.*

Demonstração. Sejam x_0 um ponto do círculo e α um número irracional associado à rotação R_α . Por redução ao absurdo, suponha que $\exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $R_\alpha^n(x_0) = x_0$ sob rotação irracional. Como $R_\alpha^n(x_0) = x_0 + n\alpha \pmod{1}$, teríamos $n\alpha$ inteiro. Contudo, n é inteiro e α irracional. Obtemos assim uma contradição! Portanto, como x_0 é arbitrário, $\nexists x \in S^1$ com $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que sua órbita seja periódica. ■

Às luzes dos teoremas acima, interpretamos sob a natureza da rotação R_α : todos os pontos do círculo tem órbita periódica se, e somente se, essa rotação é racional; as rotações irracionais não permitem periodicidade de nenhum ponto do círculo.

Definido e argumentado questões sobre a periodicidade de órbitas dependendo da racionalidade de α obtemos algumas consequências de grandeza elevada no nosso desenvolvimento. As propriedades que apresentamos até agora constituem a base para os teoremas que seguem. Uma dessas é sobre a densidade de órbitas sob rotações - mais especificamente sobre a rotação irracional. Mas inicialmente daremos uma definição à noção de um conjunto denso.

Definição 4.2.3 *Sejam X e Y conjuntos que satisfazem $X \subseteq Y$ e munidos da métrica $d : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que o conjunto X é denso no conjunto Y quando, para todo $\varepsilon > 0$ e $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $d(y, x) < \varepsilon$. Equivalentemente, $X \subseteq Y$ é denso em Y se $\overline{X} = Y$.*

Teorema 4.2.3 *Toda órbita de R_α é densa em S^1 se α é irracional.*

Demonstração. Seja $x \in S^1$. Dados pontos na órbita de x , então estes são distintos, caso contrário se $R_\alpha^m(x) = R_\alpha^n(x)$ nós teríamos

$$R_\alpha^m(x) - R_\alpha^n(x) = 0 \iff x + m\alpha \pmod{1} - x - n\alpha \pmod{1} = (m - n)\alpha \pmod{1} = 0.$$

Assim, ocorreria $(m - n)\alpha \in \mathbb{Z}$. Todavia, isto significaria que $m - n = 0$. Como para quaisquer conjuntos infinitos do S^1 deve-se existir limitantes. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$ existem inteiros n e m tais que $|R_\alpha^m(x) - R_\alpha^n(x)| < \varepsilon$. Agora, tomando $k = m - n$, obtemos $R_\alpha^{m-n}(x) = x + (m - n)\alpha \pmod{1}$. Ao se fazer $k \rightarrow 0$ sempre ocorrerá que $R_\alpha^{m-n}(x) \rightarrow x$, isto é, $|R_\alpha^{m-n}(x) - x| < \varepsilon$.

Mas observe que do anterior é possível concluir que

$$\left| R_\alpha^k(x) - x \right| < \varepsilon, \left| R_\alpha^{2k}(x) - R_\alpha^k(x) \right| < \varepsilon, \dots, \left| R_\alpha^{nk}(x) - R_\alpha^{(n-1)k}(x) \right| < \varepsilon.$$

Como a rotação R_α preserva comprimento, concluímos que ela conecta os arcos R_α^k iterados formando uma cobertura para todo o S^1 . Particularmente, dizemos que

$$x, R_\alpha(x), R_\alpha^2(x), \dots, R_\alpha^{nk}(x), \dots$$

particionam S^1 em arcos menores que ε . Como vale para ε tão pequeno quanto queiramos. Concluímos a densidade das órbitas sob rotação irracional. ■

Outra demonstração complementar pode ser encontrada na página 21 do livro [1].

Exemplo 4.2.3 *Analise um exemplo de densidade sobre uma aplicação. Seja $f(x) = 2x$ uma aplicação no S^1 . Inicialmente, vejamos como a aplicação da rotação $2x$ funciona. Observemos*

que os pontos do círculo são dobrados a cada iteração, isto é

$$x, f(x) = 2x, f^2(x) = 4x, f^3(x) = 8x, \dots, f^n(x) = 2^n x.$$

E sendo dessa forma, de todo modo, vale reforçar que não importa quão pequeno seja o arco $x \in S^1$, existirá n cujo $f^n(x) = 2^n x$ cobrirá todo o círculo S^1 .

Agora, se x é um ponto periódico de $f(x) = 2x$ de período p , ocorrerá $f^p(x) = 2^p x = x$. Mas também, ao compreender que se $\alpha \in \mathbb{Z}$, então $x = x + 2\alpha\pi$. Desse modo, obtemos uma relação para pontos periódicos de $f(x) = 2x$ de período p no círculo

$$2^p x = x + 2\alpha\pi, \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Mas e a densidade dos pontos periódicos dessa aplicação no círculo?

Proposição 4.2.1 *Seja $f(x) = 2x$ uma aplicação de rotação sobre S^1 . Os pontos periódicos de f são densos em S^1 .*

Demonstração. Do que analisamos anteriormente, já podemos retomar que se x_0 é um ponto periódico de $f(x) = 2x$ de período p , ocorrerá $f^p(x_0) = 2^p x_0 = x_0 + 2\alpha\pi$, para $\alpha \in \mathbb{Z}$. De forma equivalente, concluímos que se $f^p(x_0) = x_0$, então

$$2^p x_0 - x_0 = 2\alpha\pi \iff (2^p - 1)x_0 = 2\alpha\pi \therefore x_0 = \frac{2\alpha\pi}{2^p - 1}$$

E pela identificação que estamos trazendo desde o início desta teoria, $x_0 = \frac{\alpha}{2^p - 1} \pmod{1}$, para $0 \leq \alpha \leq 2^p$ inteiro. E novamente pela identificação concluímos que todos os pontos periódicos de f são as $(2^p - 1)$ -ésimas raízes da unidade. Segue-se que o conjunto dos pontos periódicos de f é denso em S^1 . Afinal, o conjunto de pontos periódicos de f de período $p = 1$, é

$$Per_1(f) = \left\{ \alpha \pmod{1} \in S^1; \alpha = 0, 1 \text{ ou } 2 \right\} = [0] = [1] = [2].$$

E quando $n = 2$,

$$Per_2(f) = \left\{ \frac{\alpha}{3} \pmod{1} \in S^1; \alpha = 0, 1, 2, 3 \text{ ou } 4 \right\} = [0] \cup [1/3] \cup [2/3].$$

E quando $n = 3$,

$$\begin{aligned} Per_3(f) &= \left\{ \frac{\alpha}{7} \pmod{1} \in S^1; 0 \leq \alpha \leq 8 \text{ e } \alpha \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= [0] \cup [1/7] \cup [2/7] \cup [3/7] \cup [4/7] \cup [5/7] \cup [6/7]. \end{aligned}$$

E assim, o conjunto de pontos periódicos de f de período p é dado por

$$Per_p(f) = \left\{ \frac{\alpha}{2^p - 1} \pmod{1} \in S^1; 0 \leq \alpha \leq 2^p \text{ e } \alpha \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{\alpha=0}^{2^p} \left[\frac{\alpha}{2^p - 1} \right].$$

Observe que a união dos pontos periódicos de f , $Per(f) = \bigcup_{j=1}^p Per_j(f)$, se trata de \mathbb{Q} quocientado com $Per_j(f)$ e que está contida em $[0, 1] \cong S^1$. Haja visto que o fecho do conjunto dos pontos periódicos de f é o próprio S^1 , isto é, $\overline{Per(f)} = S^1$, concluimos que o conjunto dos pontos periódicos de f é denso em S^1 .

■

Esta seção nos permitiu compreender e até vislumbrar diversas dinâmicas de aplicações no círculo. Mas sobretudo que uma pequena variação no parâmetro faz com que as dinâmicas possam ser completamente diferentes - como obtemos a partir do Exemplo 4.2.2.

O próximo exemplo tem o objetivo de discutir as noções de atração e repulsão de $x \in S^1$. Definições que como veremos estão essencialmente dependentes da derivada, trataremos novamente nas seções seguintes com maior generalidade. Contudo, compreendemos que a discussão a seguir proporcionará uma compreensão melhor sobre estas características de pontos hiperbólicos.

Exemplo 4.2.4 Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $f(x) = \frac{1}{20\pi} \cdot \cos(8\pi x) + x$. Consideraremos no mesmo plano a função identidade $Id(x) = x$.

Compreendemos que a aplicação f possui oito pontos fixos, são: $1/16, 3/16, 5/16, 7/16, 9/16, 11/16, 13/16$ e $15/16$. Afinal,

$$\frac{1}{20\pi} \cdot \cos(8\pi x) = 0 \implies 8\pi x = \pi/2 \text{ ou } 8\pi x = 3\pi/2 \implies x = 1/16 \text{ ou } 3/16.$$

Observe que a frequência da função tem repetição a cada $2/16 = 1/8$. Ao adicionar a frequência aos pontos fixos obtemos os demais obedecendo a lei $\frac{1}{8}k + \frac{1}{16}$, com $0 \leq k \leq 7$.

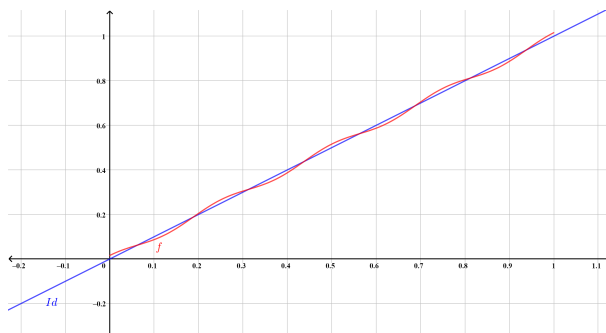


Figura 4.2: Aplicação $f(x) = \frac{1}{20\pi} \cdot \cos(8\pi x) + x$.

Note também que esta aplicação é contínua e bijetiva, logo possui inversa. Observe que sua inversa $f^{-1} : S^1 \rightarrow S^1$ também é contínua, afinal S^1 é compacto e $f : S^1 \rightarrow S^1$ é contínua e injetiva. Ver Teorema 4.17 de [24]¹. Desse modo, temos que f é um homeomorfismo.

Interpretemos agora as derivadas dos pontos fixos. Inicialmente, vale

$$f'(x) = \frac{-2 \cdot \text{sen}(8\pi x)}{5} + 1, \forall x \in S^1$$

e assim resulta que $f'(1/16) = f'(5/16) = f'(9/16) = f'(13/16) = 3/5 = 0.6$ e $f'(3/16) = f'(7/16) = f'(11/16) = f'(15/16) = 7/5 = 1.4$. Em síntese

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}, & \text{se } x = \frac{1}{4}k + \frac{1}{16} \\ \frac{7}{5}, & \text{se } x = \frac{1}{4}k + \frac{3}{16} \end{cases}, \text{ com } 0 \leq k \leq 3.$$

Destarte, depreendemos que os iterados dos pontos fixos no homeomorfismo f se compor-

¹Ver Rudin (1976, p.90).

tam da seguinte maneira

$$f^n \left(\frac{1}{8}k + \frac{1}{16} \right) = f^{n-1} \left(\frac{1}{8}k + \frac{1}{16} \right) = \dots = f \left(\frac{1}{8}k + \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{8}k + \frac{1}{16}$$

com $0 \leq k \leq 7$. Ou seja, os oito pontos fixos permanecerão parados sob iterações de f . Mas o que acontece com os iterados dos pontos próximos aos pontos fixos?

Podemos inferir que, os pontos próximos dos $x = \frac{1}{4}k + \frac{3}{16}$ estão se afastando destes pontos fixos. Por outro lado, os pontos próximos dos $x = \frac{1}{4}k + \frac{1}{16}$ estão se aproximando destes pontos fixos. Ou seja, pontos na proximidade dos fixos cuja derivada é 1.4 (maior que 1) estão sendo repelidos. Em contrapartida, os pontos próximos aos pontos fixos os quais possuem derivada 0.6 (menor que 1) estão sendo atraídos.

Mas o que ocorre com os outros pontos do S^1 ? Veremos que estes pontos têm órbitas as quais tendem a algum dos pontos fixos de derivada menor que 1. Pois, de todo modo seus iterados estarão na proximidade de algum desses pontos de derivada menor do que 1. Ou seja, se x é um desses "outro pontos" em S^1 cujos iterados recaiam sobre a proximidade de algum ponto fixo p , ocorrerá que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$, isto é, será atraído a esse ponto fixo.

4.3 Hiperbolicidade

Fundamentado na discussão que construímos até aqui compreende-se que a diferenciabilidade também é uma característica essencial. Desse modo, ao nos referirmos às aplicações nesta seção retomaremos sempre que estamos estudando aplicações C^n , ou ainda C^∞ . Por hora quando não for dito a qual C^n a aplicação pertence compreenderemos que se trata de uma aplicação C^1 ou no mínimo C^1 por partes. Em determinados momentos será suficiente também que compreendamos que as funções são, simplesmente, suaves ou ainda em casos mais fortes que são difeomorfismos - isto é, homeomorfismos diferenciáveis.

Ademais, com suporte à discussão recente, observa-se a grande retomada da expressão "proximidade de pontos", formalizaremos esta noção com a seguinte definição.

Definição 4.3.1 *O conceito de pontos ε próximos a p é formado precisamente pela noção de reunir todos os números reais os quais distam $\varepsilon > 0$ de p . Isto é, são pontos na vizinhança de*

centro p e raio ε . Se tomarmos proximidade em \mathbb{R} , podemos compreender a vizinhança de p e raio ε como $\{x \in \mathbb{R}; |x - p| \leq \varepsilon\}$, por exemplo. Para resumir, trataremos esta noção com a seguinte notação $V_\varepsilon(p)$.

Observação 4.3.1 Em determinados momentos não trataremos $V_\varepsilon(p)$ como $\{x \in \mathbb{R}; |x - p| \leq \varepsilon\}$, mas por exemplo, como subconjunto deste por questões de conveniência. Principalmente, quando nos referirmos a propriedades cujas ocorrem em um lado de p as quais não ocorrem do outro lado.

Definição 4.3.2 Sejam f um homeomorfismo diferenciável, isto é um difeomorfismo, e p um ponto fixo de f . Dizemos que p é um **ponto fixo hiperbólico** se $|f'(p)| \neq 1$.

Definição 4.3.3 Seja p um ponto fixo hiperbólico do difeomorfismo f . Se existir uma vizinhança de p cujos pontos são atraídos por p , então dizemos que o ponto p é um **ponto fixo atrator**, ou simplesmente **atrator** e que a vizinhança de p é uma **bacia de atração**. Se todos os pontos da vizinhança de p são repelidos, então dizemos que p é um **ponto fixo repulsor**, ou simplesmente **repulsor** e que a vizinhança de p é uma **fonte**.

Teorema 4.3.1 Seja p um ponto fixo hiperbólico do difeomorfismo f . Se existe um $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in V_\varepsilon(p)$ se tenha $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$, então p é atrator. Se para todo $A > 0$ tal que para todo $x \in V_A(p)$ ocorra $d(f^n(x), p) > A$, então p é repulsor.

Demonstração. Suponhamos que se $\forall \varepsilon > 0$, com $x \in V_\varepsilon(p)$, se tenha $|f^n(x) - p| \geq \varepsilon$. Ou seja, a n -ésima iteração de x próximo ao p fixo atrator não está sendo atraída. Das possibilidades $|f^n(x) - p| = \varepsilon$ ou $|f^n(x) - p| > \varepsilon$, que significam que os iterados de qualquer x na proximidade de p : nunca se movem, ou saem da vizinhança de p (são repelidos por p), respectivamente. Dada a Definição 4.3.3 resultamos em uma contradição!

Suponhamos que se $\exists A > 0$, com $x \in V_A(p)$, se tenha $|f^n(x) - p| \leq A$. Ou seja, a n -ésima iteração de x próximo ao p fixo repulsor não está sendo repelida por p . Das possibilidades $|f^n(x) - p| = A$ ou $|f^n(x) - p| < A$, que significam que os iterados de qualquer x na proximidade de p : nunca se movem, ou recaem cada vez mais próximos de p (são atraídos por p), respectivamente. Dada a Definição 4.3.3 resultamos em uma contradição!

■

Teorema 4.3.2 *Seja f um difeomorfismo em \mathbb{R} , se p é um ponto fixo de f então:*

1. *se $|f'(p)| < 1$, então p é atrator.*
2. *se $|f'(p)| > 1$, então p é repulsor.*

Demonstração. Parte 1: Pela continuidade de f' e que $|f'(p)| < 1$, então $\exists \varepsilon > 0$ e $\exists A$ tal que $|f'(x)| < A < 1$ para $x \in V_\varepsilon(p)$. Pelo Teorema do Valor Médio

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \leq A|x - p| < |x - p| \leq \varepsilon. \quad (4.5)$$

Como p é fixo, ocorre que $f^n(p) = p$ para todo n . Assim, novamente pelo Teorema do Valor Médio e pela equação (4.5)

$$|f^2(x) - p| = |f^2(x) - f^2(p)| \leq A|f(x) - f(p)| = A|f(x) - p| \leq A^2|x - p|.$$

Ao se aplicar o Teorema do Valor Médio à luz indutiva sobre n , obtemos que

$$|f^n(x) - p| = |f^n(x) - f^n(p)| \leq A|f^{n-1}(x) - f^{n-1}(p)| \leq \dots \leq A^{n-1}|f(x) - f(p)|.$$

Como $A^n < A^{n-1} < \dots < A^2 < A < 1$. Concluimos que

$$|f^n(x) - p| \leq A^n|x - p| < |x - p| \leq \varepsilon.$$

Ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$. E por fim, pelo Teorema 4.3.1, p é um ponto fixo atrator. ■

Parte 2: Dado o difeomorfismo de f e que $|f'(p)| > 1$, então $\exists B$ tal que $|f'(p)| > B > 1$ para $x \in V_M(p)$, $\forall M > 0$. Suponha que para todo $n > 0$, ocorra que $f^n(x) \in V_M(p)$. Pelo TVM, ocorre que

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \geq B|x - p|.$$

E recursivamente tal como anteriormente,

$$|f^n(x) - p| = |f^n(x) - f^n(p)| \geq B^n |x - p|.$$

Como $B^n > B > 1$. Ao se fazer $n \rightarrow \infty$, ocorreria que " $|f^\infty(x) - p| \geq B^\infty |x - p| = \infty$ ". Contudo, isso resultaria na divergência de $|f^n(x) - p|$, isto é, para n suficientemente grande, encontramos iterados que fogem de $V_M(p)$. Ou seja, nos deparamos com uma contradição ao supor que para todo $n > 0$, ocorresse que $f^n(x) \in V_M(p)$. Desse modo, existe $n > 0$ tal que $|f^n(x) - p| > M$. Por fim, pelo Teorema 4.3.1, concluímos que p é um ponto fixo repulsor. ■

Corolário 4.3.1 *Sobre S^1 , dada identificação que construímos ocorre que se $f'(p) < 1$, então p é atrator, ou se $f'(p) > 1$, p é repulsor.*

Observação 4.3.2 *Observe que da **Parte 1**, podemos concluir que a bacia de atração do fixo p está contida no $W^s(p)$ conjunto estável associado ao p . Além disso, da **Parte 2** encontramos elementos na proximidade que fogem de p , este conjunto é uma fonte do fixo p , porém analogamente ao anterior, esta fonte se trata de um subconjunto de $W^u(p)$ conjunto instável associado ao p .*

Ao se interpretar que para qualquer função f vale $Fix(f) \subset Per(f)$. Por outro lado, também é possível se compreender que todo ponto periódico é fixo, mas somente se pensarmos da seguinte maneira: se p é periódico de período n para f , então p é fixo para $g(x) = f^n(x)$. Afinal, para todo m valerá $g^m(p) = f^{m \cdot n}(p) = p$.

Observação 4.3.3 *De anteriormente, podemos também reescrever a definição 4.3.2 dizendo que dado p ponto periódico de período n em um difeomorfismo f , então o ponto p é hiperbólico se $|(f^n)'(p)| \neq 1$. E assim, por conseguinte também ao teorema anterior obtemos o seguinte corolário.*

Corolário 4.3.2 *Seja $f : A \rightarrow A$, $A \subseteq \mathbb{R}$ e p um ponto periódico de f de período n . Se $|(f^n)'(p)| < 1$ então p é um ponto periódico atrator. Se $|(f^n)'(p)| > 1$ então p é um ponto periódico repulsor.*

Observação 4.3.4 Sendo p periódico atrator ou repulsor, continuaremos nos referindo à vizinhança desse ponto p por bacia de atração ou fonte, respectivamente.

Exemplo 4.3.1 Inferência interessante é que se f é um difeomorfismo em \mathbb{R} , então todos os seus pontos periódicos hiperbólicos deverão ser isolados. Afinal, supondo que p é um ponto periódico hiperbólico não isolado, ocorre que para todo $\varepsilon > 0$ existe outro u periódico hiperbólico tal que $|p - u| < \varepsilon$. Como $f^m(p) = p$ e $f^k(u) = u$ para certos m e k inteiros, pela definição de ponto periódico, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(p) = p$, $f^n(u) = u$ e $|f^n(p) - f^n(u)| = |p - u| < \varepsilon$. Assim,

$$|(f^n)'(p)| = \left| \lim_{u \rightarrow p} \frac{f^n(p) - f^n(u)}{p - u} \right| = \left| \lim_{u \rightarrow p} \frac{p - u}{p - u} \right| = 1.$$

No entanto, a conclusão acima contradiz o fato de p ser um ponto periódico hiperbólico. Logo, todos os pontos periódicos hiperbólicos de um difeomorfismo f sobre \mathbb{R} são isolados.

Exemplo 4.3.2 Sobre S^1 considere $s(x) = \frac{1}{4}\text{sen}(x)$ e $a(x) = \frac{3\pi}{2}\arctan(x)$. As aplicações s e a possuem seu único ponto fixo em comum, $x = 0$. No entanto, uma vez que $s'(x) = \frac{1}{4}\cos(x)$ e $a'(x) = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, ocorre que $|s'(0)| = 1/4$ e $|a'(0)| = 3\pi/2$. E pelo Teorema 4.3.2, temos que $x = 0$ é atrator para s e repulsor para a .

Exemplo 4.3.3 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - x)$.

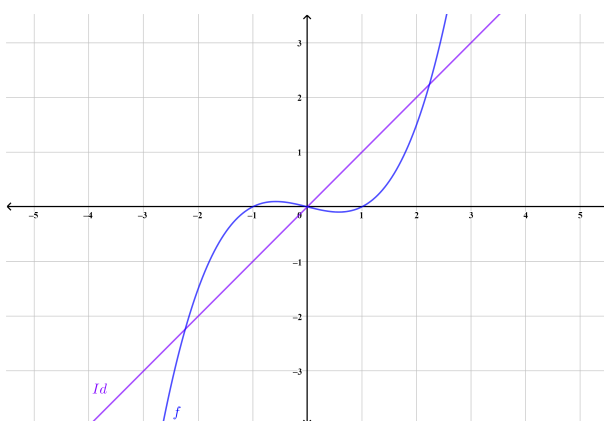


Figura 4.3: Aplicação $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - x)$.

Observamos que f possui 3 pontos fixos, os quais são $x = 0, \sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$. Pois,

$$\frac{1}{4}(x^3 - x) = x \iff x^3 - 5x = 0 \iff x = 0 \text{ e } \pm\sqrt{5}.$$

Como $f'(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 1)$, temos que $f'(0) = -\frac{1}{4}$ e $f'(\sqrt{5}) = f'(-\sqrt{5}) = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$. Assim todos os pontos fixos de f são hiperbólicos. Mas também, pelo Teorema 4.3.2, $p = 0$ é atrator e $p = \sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$ são repulsores, pois $|f'(0)| < 1$ e $|f'(\sqrt{5})| = |f'(-\sqrt{5})| > 1$.

Observe que se $x \in (-1, 1)$ e $p = 0$, podemos concluir que $|x - p| = |x| < 1$ e $|f(x) - f(p)| = \frac{1}{4}|x^3 - x| = \frac{1}{4}|x(x^2 - 1)|$. Como $|x| < 1$, se $x \neq p = 0$ temos $1/|x| > 1$. Desse modo, vale que

$$\frac{1}{4}|x(x^2 - 1)| = \frac{1}{4}|x||x^2 - 1| < \frac{1}{4}|x^2 - 1| < \frac{1}{4} < 1.$$

Ou seja, $|f(x) - f(p)| < 1$, isto é, de fato os pontos na proximidade de $p = 0$ estão se aproximando. O que significa que $V_1(0) = (-1, 1)$ é uma bacia de atração e que $V_1(0)$ está contido no conjunto estável de 0, $W^s(0)$, pois seus pontos estão convergindo para 0 sob iterações de f .

Consideremos agora que $p = \sqrt{5}$ e $x < -p$, podemos concluir que $|x - p| = |x - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - x > 2\sqrt{5} > 1$. Como $|f(-\sqrt{5})| = |-\sqrt{5}| = \sqrt{5}$. Dado que $x < -\sqrt{5}$, ocorre $f(x) > -\sqrt{5}$. Desse modo,

$$|f(x) - f(p)| = \left| \frac{1}{4}x^3 - x - \sqrt{5} \right| > |-\sqrt{5} - \sqrt{5}| = 2\sqrt{5}.$$

Analogamente, se considerarmos $p = -\sqrt{5}$ e $x > -p$, chegaremos a conclusão que

$$|f(x) - f(p)| > 2\sqrt{5} > 1.$$

E isto significa que $p = \pm\sqrt{5}$ são repulsores e $(-\infty, -\sqrt{5})$ e $(\sqrt{5}, \infty)$ são fontes. Ou seja, os iterados de f nestas fontes divergem.

Exemplo 4.3.4 Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x - x^2$.

Observamos que g possui apenas um ponto fixo $x = 0$. Como $g'(x) = 1 - 2x$, temos que $|g'(0)| = 1$. Porém, isto significa que 0 não é um ponto fixo hiperbólico. E assim nossos teoremas sobre atração e repulsão são inconclusivos sobre pontos não hiperbólicos. Portanto, é sempre necessário tomar cuidado com a hiperbolicidade do ponto fixo. No entanto, ao se pensar nos iterados de pontos em $[0, 1]$ podemos concluir da imagem a seguir que $x = 0$ atrai os pontos que estão à sua direita.

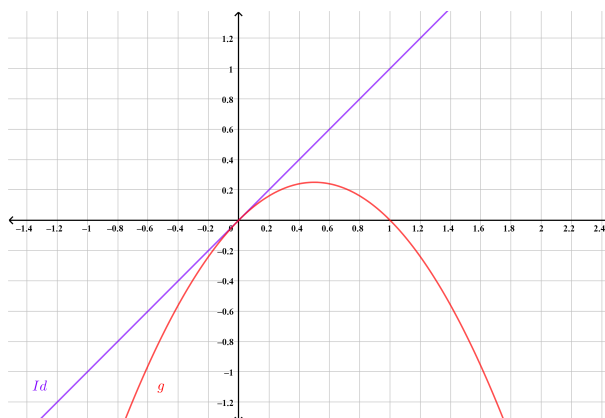


Figura 4.4: Aplicação $g(x) = x - x^2$.

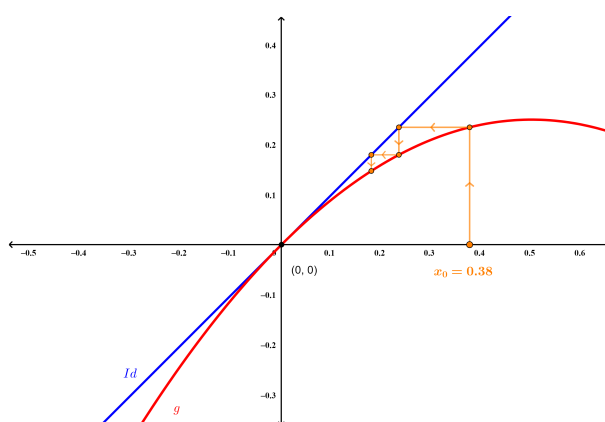


Figura 4.5: Diagrama de teias sobre $g(x) = x - x^2$ dos pontos à direita do 0.

Afinal, comparando $|f(x) - f(p)|$ com $|x - p|$, tendo $p = 0$ e $x \in (0, 1)$ podemos concluir que

$$\begin{cases} |x - 0| = |x| = x \\ |x - x^2 - 0| = |x(1 - x)| = |x||1 - x| = x(1 - x) \end{cases} \quad (4.6)$$

Como $0 < 1 - x < 1$, para $x \in (0, 1)$. E isto significa que $(0, 1)$ é uma bacia de atração para g . Afinal, $1 - x$ é sempre menor que 1, para $x \in (0, 1)$. Logo, $|f(x) - f(p)|$ é sempre menor que $|x - p|$, para $p = 0$ e $x \in (0, 1)$, ou seja, os pontos estão se aproximando do fixo $p = 0$.

Mas o que ocorre com os pontos à esquerda de $x = 0$? Responderemos isso pensando sobre $(-1, 0)$. Reaproveitando a análise de (4.6), teríamos agora a seguinte situação, tendo $p = 0$ e $x \in (-1, 0)$:

$$\begin{cases} |x - 0| = |x| = -x \\ |x - x^2 - 0| = |x(1 - x)| = |x||1 - x| = -x(1 - x) \end{cases} \quad (4.7)$$

Como $1 < 1 - x < 2$, para $x \in (-1, 0)$. E isto significa que $(-1, 0)$ é uma fonte para g . Afinal, $1 - x$ é sempre maior que 1, para $x \in (-1, 0)$. Logo, $|f(x) - f(p)|$ é sempre maior que $|x - p|$, para $p = 0$ e $x \in (-1, 0)$, ou seja, os pontos estão se afastando do fixo $p = 0$.

Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 4.3.5 Seja $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $q(x) = 3x - 3x^2$.

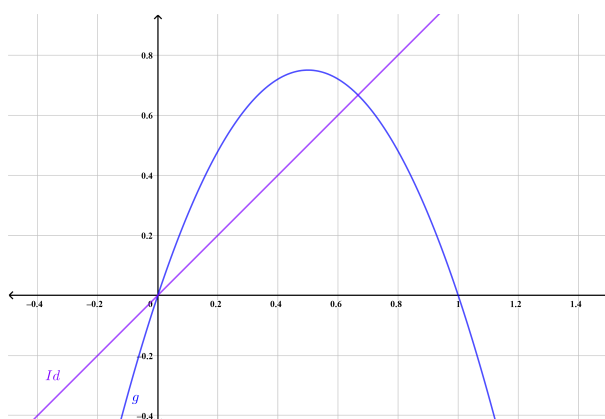


Figura 4.6: Aplicação $q(x) = 3x - 3x^2$.

A aplicação quadrática q acima possui 2 pontos fixos, os quais são $x = 0$ e $\frac{2}{3}$. Pois, se $x = 3x - 3x^2$, então $(3x - 2)x = 0$ - cujas soluções são os pontos fixos. Como $q'(x) = 3 - 6x$, ocorre que $|q'(0)| = 3$ e $|q'(\frac{2}{3})| = 1$. Pelo Teorema 4.3.2, podemos concluir que $x = 0$ é repulsor. No entanto, quanto ao outro fixo ainda não podemos dizer nada.

Contudo, ao se iterar q , consideremos agora apenas 2 futuras iterações, temos:

$$\begin{cases} q^2(x) = q(q(x)) = 9x(1-x)(3x^2 - 3x + 1). \\ q^3(x) = q(q^2(x)) = 27x(1-x)(3x^2 - 3x + 1)(27x^4 - 54x^3 + 36x^2 - 9x + 1). \end{cases}$$

com o auxílio computacional e uma aproximação de 15 casas decimais é possível se calcular que $|(q^2(\frac{2}{3}))'| = 1.0000000000000007$ e $|(q^3(\frac{2}{3}))'| = 0.999999999996362$. E pelo Teorema 4.3.2, esse ponto é repulsor para q^2 e atrator para q^3 .

Mas o que podemos falar sobre q em relação ao fixo não hiperbólico? Analisaremos estes casos posteriormente, mas, em antecipação, o que de fato ocorre com $x = 2/3$ em relação a aplicação q (e $x = 0$ para g , do exemplo anterior) é uma bifurcação.

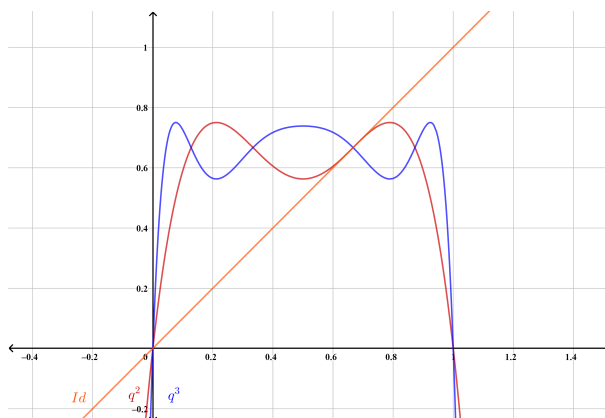


Figura 4.7: Aplicações $q^2(x)$ e $q^3(3)$.

Perceba que a discussão sobre a hiperbolicidade de um ponto pode ser bastante delicada, há inclusive sensível dependência de qual iteração estamos debruçando nossas interpretações. Vimos casos em que o ponto fixo é atrator, repulsor e ainda atrator por um lado e repulsor pelo outro. Trataremos essas noções introduzidas neste capítulo em seu seguinte, sobre algumas aplicações que compreendemos serem fundamentais à nossa teoria.

Ademais, na seção seguinte rerepresentaremos de outra forma alguns resultados importantes obtidos em \mathbb{R} no conjunto \mathbb{C} . A este estudo que faremos chamaremos de *hiperbolicidade em \mathbb{C}* .

4.3.1 Hiperbolicidade em \mathbb{C}

Recortamos à esta seção uma discussão sobre tópicos da hiperbolicidade que vimos anteriormente, no entanto faremos estes aplicados ao conjunto dos números complexos \mathbb{C} . Nossa discussão reflete a introdução à teoria dos sistemas dinâmicos complexos. Haja visto sua reconhecida relevância faremos um panorama sintético sobre definições, teoremas e proposições análogas as quais obtivemos ao definir hiperbolicidade em subconjuntos da reta.

Teorema 4.3.3 *Seja f uma função complexa diferenciável e p um ponto fixo de f . Se $|f'(p)| < 1$, então a bacia de atração de p contém uma vizinhança de p . Se $|f'(p)| > 1$, então existe uma vizinhança de p a qual todos os seus pontos saem sobre iterações de f .*

Demonstração. A priori, discutiremos a primeira conclusão. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função diferenciável. Suponha que $f(p) = p$ e $|f'(p)| < 1$. Inicialmente, observe que pela desigualdade

triangular

$$\left| \frac{f(z) - p}{z - p} \right| = \left| \frac{f(z) - p}{z - p} - f'(p) + f'(p) \right| \leq \left| \frac{f(z) - p}{z - p} - f'(p) \right| + |f'(p)|. \quad (4.8)$$

Queremos comparar o membro da esquerda com $|f'(p)|$, desta forma devemos procurar comparar $\left| \frac{f(z) - p}{z - p} - f'(p) \right|$ de modo que relacione em desigualdade com $|f'(p)|$, a menos de constantes. Note que,

$$|f'(p)| < 1 \Leftrightarrow 1 - |f'(p)| > 0.$$

Considere $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - |f'(p)|)$, então existe $\delta > 0$, com $0 < |z - p| < \delta$ que implica que

$$\left| \frac{f(z) - p}{z - p} - f'(p) \right| < \frac{1}{2}(1 - |f'(p)|). \quad (4.9)$$

Deduz-se de (4.8) e (4.9) que

$$\left| \frac{f(z) - p}{z - p} \right| \leq \left| \frac{f(z) - p}{z - p} - f'(p) \right| + |f'(p)| < \frac{1}{2}(1 - |f'(p)|) + |f'(p)| = \frac{1}{2}(1 + |f'(p)|).$$

Faça $\lambda := \frac{1}{2}(1 + |f'(p)|)$. Reescrevendo, temos que

$$\left| \frac{f(z) - p}{z - p} \right| < \lambda, \text{ i.e, equivalentemente } |f(z) - p| < \lambda|z - p|.$$

A conclusão anterior nos auxilia na seguinte projeção, afinal a partir da n -ésima iteração obtemos do último resultado que

$$|f^n(z) - p| < \lambda^n|z - p|, n \in \mathbb{N}. \quad (4.10)$$

O que é válido se fizermos indução sobre n , pois se $n = 1$ já sabemos que (4.10) é verdade afinal $|f(z) - p| < \lambda|z - p|$. Suponha que $|f^k(z) - p| < \lambda^k|z - p|$, $k \in \mathbb{N}$ é verdade. Queremos concluir que $|f^{k+1}(z) - p| < \lambda^{k+1}|z - p|$, veja que

$$\left| \frac{f^{k+1}(z) - p}{f^k(z) - p} \right| < \lambda, \text{ equivalentemente } |f^{k+1}(z) - p| < \lambda|f^k(z) - p|.$$

Por hipótese de indução,

$$|f^{k+1}(z) - p| < \lambda(\lambda^k |z - p|) = \lambda^{k+1} |z - p|.$$

Concluimos por indução que $|f^n(z) - p| < \lambda^n |z - p|$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora se $n \rightarrow \infty$, como $\lambda < 1$, temos que $\lambda^n \rightarrow 0$, i.e, $\lambda^n |z - p| \rightarrow 0$. E por fim desta forma, $f^n(z) \rightarrow p$.

Considere agora as mesmas hipóteses utilizadas anteriormente para demonstrar a primeira parte do teorema, em exceção de que agora argumentaremos com $|f'(p)| > 1$. Queremos concluir a divergência de $f^n(z)$ a p na vizinhança de p . No entanto, como $|f'(p)| > 1$, então existe um disco de raio w tal que $|f'(p)| \geq w > 1$. Por definição, temos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |z - p| < \delta \implies \left| \left| \frac{f(z) - p}{z - p} \right| - |f'(p)| \right| < \varepsilon.$$

Assim,

$$\left| \frac{f(z) - p}{z - p} \right| \geq w, \text{ i.e, } |f(z) - p| \geq w|z - p|.$$

Por indução análoga à feita anteriormente, concluimos que $|f^n(z) - p| \geq w^n |z - p|$, $n \in \mathbb{N}$. Como $w > 1$, se $n \rightarrow \infty$ então $w^n |z - p| \rightarrow \infty$. Concluimos assim que $f^n(z)$ sobre consecutivas ilimitadas iterações tende a fugir da vizinhança de p . ■

Teorema 4.3.4 *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função diferenciável e p um ponto periódico de período k , isto é, $f^k(p) = p$. Se $|(f^k)'(p)| < 1$, então existe uma vizinhança de p que está contida na bacia de p . Se $|(f^k)'(p)| > 1$, então existe uma vizinhança de p tal que todos os pontos fogem desta vizinhança sobre iterações de f^k .*

Demonstração. Considere g uma função complexa definida como $g(z) = f^k(z)$. Como p é periódico de período k para f , p corresponde para g como um ponto fixo, afinal $g(p) = f^k(p) = p$. É também importante observar que g é uma função complexa diferenciável, pois $g'(z) = (f^k)'(z)$ e pela regra da cadeia

$$g'(z) = (f^k)'(z) = (f^{k-1})'(f(z))f'(z) = (f'(z))^k.$$

Ou seja, por f ser diferenciável a diferenciabilidade de g se justifica. Inferimos que estamos inseridos e satisfazendo as condições do Teorema 4.3.3. Deste modo, pelo referido teorema obtemos diretamente a conclusão para esta demonstração.

■

Definição 4.3.4 *Seja f uma função complexa diferenciável e p um ponto periódico de período k . Então p é um ponto periódico hiperbólico se $|(f^k)'(p)| \neq 1$. Se $|(f^k)'(p)| < 1$, então p é um ponto periódico atrator. Por outro lado, se $|(f^k)'(p)| > 1$, então p é um ponto periódico repulsor.*

Proposição 4.3.1 *Considere f uma função complexa definida por $f(z) = e^{\theta i} z$ e $z_0 \in \mathbb{C}^*$. A órbita de z_0 sobre iterações de f cai sobre o círculo de raio $|z_0|$ e centro na origem. Se θ é um múltiplo racional de π , então z_0 é periódico de f . Se θ não é um múltiplo racional de π , então z_0 não é ponto periódico e sua órbita é densa no círculo.*

Demonstração. Deveremos verificar no primeiro caso que se $\theta = q\pi$, $q \in \mathbb{Q}$ então z_0 é periódico. Dessa forma, observe que $f(z) = e^{\theta i} z$ nos implica:

$$f^n(z) = e^{\theta i} f^{n-1}(z) = e^{\theta i} (e^{\theta i})^{n-1} z = e^{n\theta i} z.$$

Isto é, $f^n(z_0) = e^{n\theta i} z_0$. Além disso,

$$|f^n(z_0)| = \left| e^{n\theta i} z_0 \right| = \left| e^{n\theta i} \right| |z_0| = |z_0|.$$

E como também $\arg(f^n(z_0)) = n\theta + \arg(z_0)$. Desta forma, suponha que z_0 não seja periódico, isto é, para todo $n \in \mathbb{N}$ ocorre $f^n(z_0) \neq z_0$, e então por serem complexos distintos resulta $\arg(f^n(z_0)) \neq \arg(z_0)$. E equivalentemente, com $k \in \mathbb{Z}$

$$n\theta + \arg(z_0) \neq \arg(z_0) + 2k\pi.$$

Além disso, como k é um inteiro qualquer, ocorre que $\theta \neq \frac{2k}{n}\pi$. Contradição! Afinal $\frac{2k}{n}$ descreve todos os racionais e θ é múltiplo racional de π . Desta maneira concluímos o primeiro resultado.

Analisemos agora o segundo caso. Para isso, tome $\theta \neq \pi q$, se q for racional. Considere também o número $\frac{2\pi|z_0|}{\varepsilon}$, com $\varepsilon > 0$ e $|z_0|$ o raio da circunferência referida no enunciado, dessa forma $2\pi|z_0|$ é o comprimento desta. Ademais, note que para algum $m \in \mathbb{N}$ deve ocorrer que $f^m(z_0) \neq z_0$. Mais particularmente, se $m > \frac{2\pi|z_0|}{\varepsilon}$ há ao menos dois iterados cuja distância entre si é menor que ε . Suponha $m_2 > m_1$ sejam tais que $|f^{m_2}(z_0) - f^{m_1}(z_0)| < \varepsilon$. Mas, como $f^m(z_0) = |z_0|e^{m\theta i + \arg(z_0)i}$, temos que

$$|f^{m_2}(z_0) - f^{m_1}(z_0)| = \left| |z_0|e^{m_2\theta i + \arg(z_0)i} - |z_0|e^{m_1\theta i + \arg(z_0)i} \right| = |z_0| \left| e^{(m_2-m_1)\theta i} - 1 \right|.$$

Isto é, $|z_0| \left| e^{(m_2-m_1)\theta i} - 1 \right| = |f^{m_2}(z_0) - f^{m_1}(z_0)| < \varepsilon$. Considere $f^{m_2-m_1}$, a qual é a função que rotaciona pontos pelo ângulo $(m_2 - m_1)\theta$ e veja que

$$|f^{m_2-m_1}(z_0) - z_0| = \left| |z_0|e^{(m_2-m_1)\theta i + \arg(z_0)i} - |z_0|e^{\arg(z_0)i} \right| = |z_0| \left| e^{(m_2-m_1)\theta i} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Conclui-se, $|f^{m_2-m_1}(z_0) - z_0| < \varepsilon$ nos indica que a distância de iterações sucessivas é menor que ε . Portanto, a órbita de z_0 é densa no círculo de raio $|z_0|$ e centro na origem. ■

Exemplo 4.3.6 *Seja q uma função complexa definida por $q(z) = z^2$. Iremos estudar a estabilidade de q referente aos pontos discriminados ao modo que a iteramos. A priori, veja que $z = 0$ e $z = 1$ são pontos fixos de q , afinal $z^2 = z$ apenas se $z = 0$ ou $z = 1$. Aliás, além de serem fixos tais pontos são hiperbólicos, afinal como $q'(z) = 2z$, temos $q'(0) = 0 < 1$ e $q'(1) = 2 > 1$ - estes são inclusive pontos hiperbólicos atrator e repulsor, respectivamente.*

Reescreva agora z da forma $z = |z|e^{i\theta}$, e conseqüentemente $q(z) = z^2 = zz = |z|^2e^{2i\theta}$. Por termos $q^2(z) = |z|^2e^{2i\theta}$, recursivamente concluimos que $q^n(z) = |z|^{2^n}e^{2^n i\theta}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Daí, da recursão anterior, $\forall n \in \mathbb{Z}$, decorre

$$|q^n(z)| = \left| |z|^{2^n}e^{2^n i\theta} \right| = |z|^{2^n}. \quad (4.11)$$

Veja que pela tricotomia, determinamos como possibilidades: $|z| < 1$, $|z| > 1$ e $|z| = 1$. Infere-se que para o caso $|z| < 1$, se n tender ao infinito em (4.11), obtemos $|q^n(z)| \rightarrow 0$, logo

$z \in W^s(0)$. No segundo caso, depreende-se que se n tender ao infinito, obtemos $|q^n(z)| \rightarrow \infty$, logo $z \in W^s(\infty)$. No último caso, i.e, $|z| = 1$, se n tender ao infinito, obtemos $|q^n(z)| \rightarrow 1$ - isto é, os pontos permanecem na fronteira do disco de raio 1.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES FUNDAMENTAIS

Neste capítulo continuaremos desenvolvendo nossa conceituação acerca de aplicações de dinâmicas interessantes. No entanto, as famílias de aplicações que referenciaremos tratam-se de exemplos delicados, uma vez que ilustram comportamentos importantíssimos na teoria dos sistemas dinâmicos. A saber, faremos nossa construção teórica sobre as famílias de aplicações Baker (B_μ), Tenda (T_μ) e Quadrática (F_μ). Em síntese, discutiremos os diversos comportamentos dinâmicos que de maneira intrigante essas aplicações possuem dependendo do valor do parâmetro μ .

5.1 Aplicação Baker

Consideremos a função $B_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $\mu \in \mathbb{R}_+$ dada por

$$B_\mu(x) = \begin{cases} \mu x, & \text{se } x \leq 1/2, \\ \mu(x - 1/2), & \text{se } x > 1/2. \end{cases}$$

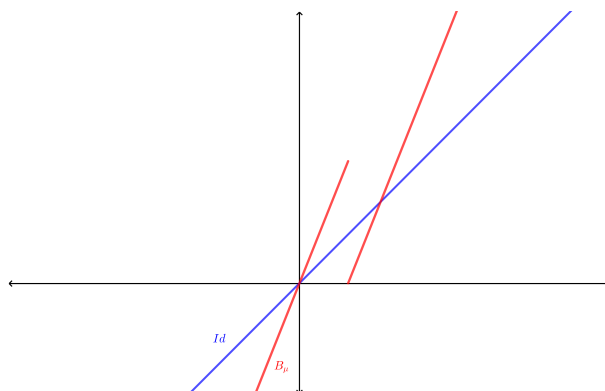


Figura 5.1: Gráficos da aplicação Baker e da Identidade.

Essa função é chamada de *baker* de inclinação μ . Inicialmente, observe que seus pontos fixos em geral são: para $x \leq 1/2$, temos $x = 0$ como ponto fixo; mas para $x > 1/2$, com $\mu \neq 1$, o ponto fixo será

$$\begin{aligned}\mu x - \mu/2 &= x \\ x(\mu - 1) &= \mu/2 \\ x &= \frac{\mu}{2\mu - 2}.\end{aligned}$$

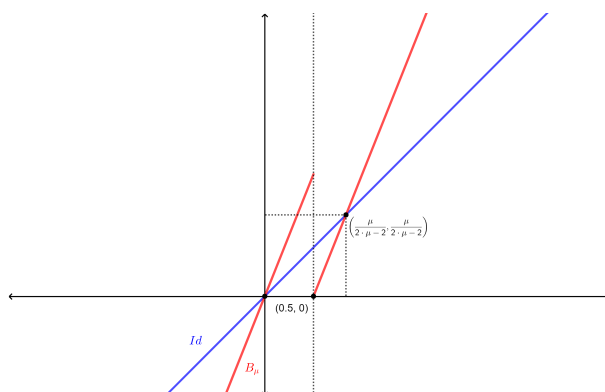


Figura 5.2: Gráficos da Identidade e da aplicação Baker determinando pontos fixos.

Por fim, caso tenhamos $\mu = 1$, então pela definição da aplicação baker os pontos fixos de B_μ serão todos os $x \leq 1/2$. Isso pode ser observado também diretamente no seguinte gráfico.

Fazendo análise gráfica para a aplicação B_μ , com $\mu > 1$, imediatamente compreende-se que a órbita dos pontos $x < 0$ tende para $-\infty$, em contrapartida obtemos também que a órbita dos pontos $x > 1$ tende para ∞ . Mas o que ocorre com os pontos que estão em $[0, 1]$? O nome

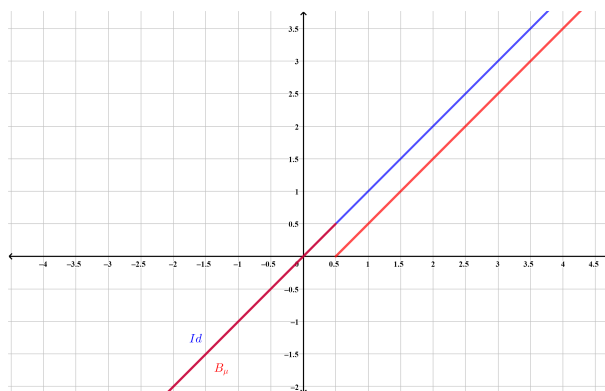


Figura 5.3: Gráficos da Identidade e da aplicação Baker com inclinação 1.

"baker" vem de padeiro em inglês. De senso comum, bem entendemos que o padeiro amassa e mistura recursivamente os ingredientes de um pão. Em metáfora, os $x \in [0, 1]$ tratam-se da massa de ingredientes do pão que serão consecutivamente "amassados e misturados" permanecendo em $[0, 1]$. No entanto, esta metáfora precisa estar de acordo com o parâmetro μ . Afinal, uma vez discriminado os pontos fixos de B_μ , determinar se pontos próximos permanecem em ou são repelidos de $[0, 1]$ é uma tarefa que depende da derivada da aplicação sobre os pontos fixos, tal como vimos na Definição 4.3.3 e nos Teoremas 4.3.1 e 4.3.2.

Infere-se que, a aplicação B_μ , embora não seja derivável na descontinuidade em $x = 1/2$, ainda é possível derivá-la nos seus ramos, afinal são ambos C^1 por partes. Desse modo, temos que

$$B'_\mu(x) = \begin{cases} \mu, & \text{se } x < 1/2, \\ \mu, & \text{se } x > 1/2. \end{cases} = \mu, \text{ para todo } x \neq 1/2.$$

E portanto, o módulo da derivada $|B'_\mu(x)| = |\mu| = \mu$, para todo $x \neq 1/2$. Assim, concluímos pelo Teorema 4.3.2 que dado $p \in \left\{0, \frac{\mu}{2\mu - 2}\right\}$ então p será atrator se $\mu < 1$, em contrapartida p será repulsor se $\mu > 1$. No entanto, dado $\mu < 1$ teremos trivialmente apenas 0 como ponto fixo. Ou seja, $p = 0$ é atrator dado $\mu < 1$. Não obstante a existência do ponto fixo para um parâmetro $\mu < 1$, não é uma dinâmica tão interessante afinal existe apenas um ponto fixo o qual atrai todos os outros.

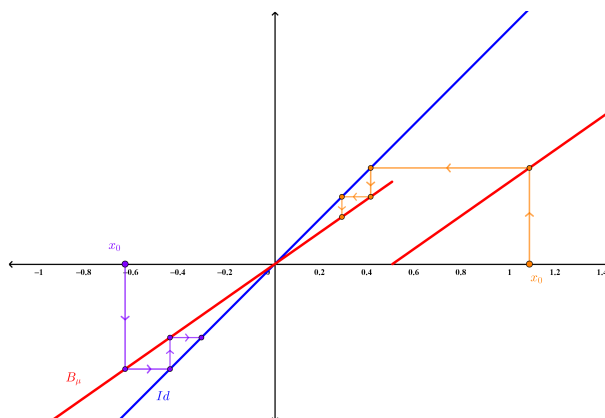


Figura 5.4: Diagrama de teias na aplicação Baker com inclinação menor que 1.

Exemplo 5.1.1 Consideremos a função $B_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$B_2(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2x - 1, & \text{se } 1/2 < x \leq 1. \end{cases} = 2x(\text{mod } 1).$$

Já sabemos que os pontos fixos de B_2 são $x = 0$ e $x = 1$. E como $|B'(x)| = 2$ para todo $x \neq 1/2$, temos que estes dois pontos são ambos repulsores.

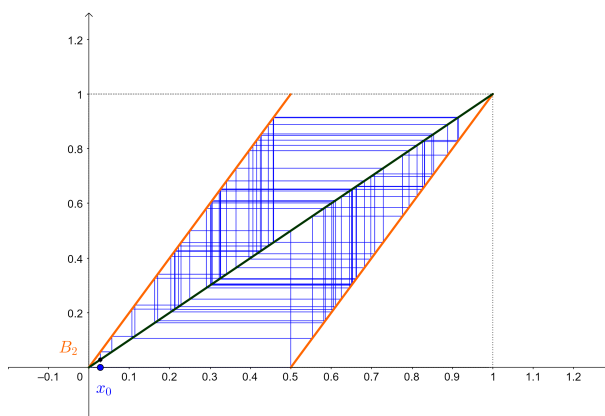


Figura 5.5: Diagrama de teias em Baker para x próximo de 0.

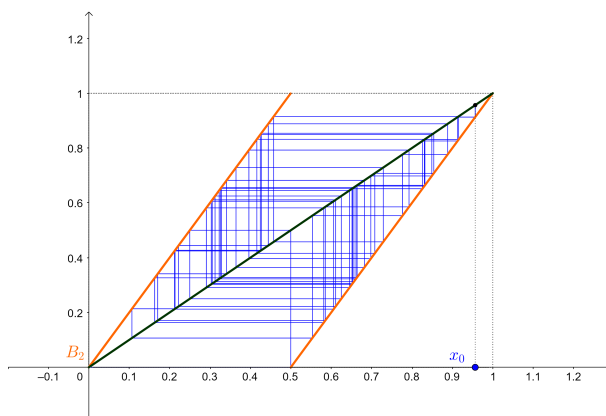


Figura 5.6: Diagrama de teias em Baker para x próximo de 1.

5.2 Aplicação Tenda

Consideremos a função $T_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $\mu \in \mathbb{R}_+$ dada por

$$T_\mu(x) = \begin{cases} \mu x, & \text{se } x \leq 1/2, \\ \mu(1-x), & \text{se } x > 1/2. \end{cases}$$

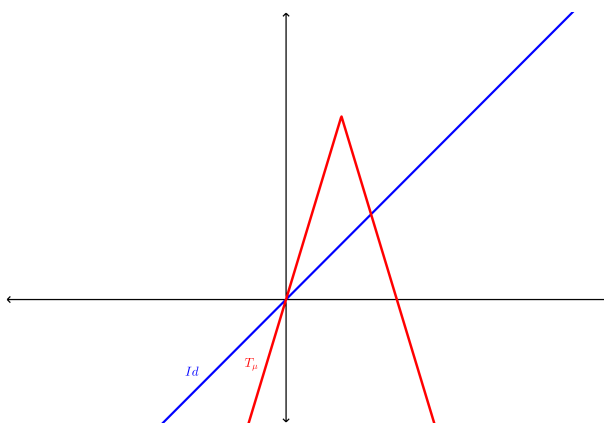


Figura 5.7: Gráficos da aplicação Tenda e da Identidade.

Essa função é chamada de *tenda* de inclinação μ . A priori, observemos que os pontos fixos de T_μ em geral são: para $x \leq 1/2$, temos $x = 0$ como ponto fixo; mas para $x > 1/2$, como $\mu \in \mathbb{R}_+$,

o ponto fixo será

$$\mu - \mu x = x$$

$$x(1 + \mu) = \mu$$

$$x = \frac{\mu}{1 + \mu}.$$

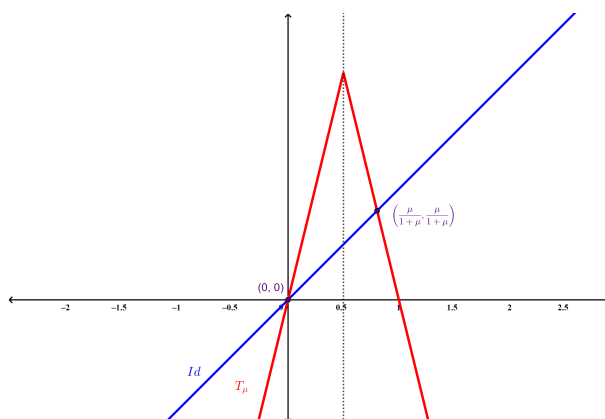


Figura 5.8: Gráficos da Identidade e da aplicação Tenda determinando pontos fixos.

Fazendo análise gráfica para a aplicação T_μ , com $\mu > 1$, imediatamente compreende-se que a órbita dos pontos $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ tende para $-\infty$, a Figura 5.9 pode auxiliar nesta conclusão. Por outro lado, o que ocorre com os pontos que estão em $[0, 1]$? Retomaremos esta reflexão para o caso particular $\mu = 3$.

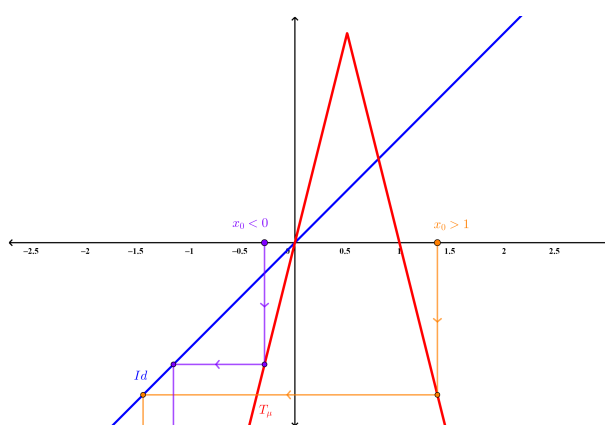


Figura 5.9: Diagrama de teias dos pontos da aplicação Tenda que fogem do $[0, 1]$ indo para $-\infty$.

Além disso, depende-se que a aplicação T_μ , embora não seja derivável em $x = 1/2$, ainda

é possível derivá-la em seus ramos, afinal são ambos C^1 por partes. Desse modo,

$$T'_\mu(x) = \begin{cases} \mu, & \text{se } x < 1/2, \\ -\mu, & \text{se } x > 1/2. \end{cases}$$

Logo, o módulo da derivada $|T'_\mu(x)| = |-\mu| = |\mu| = \mu$, para todo $x \neq 1/2$. Portanto, concluímos pelo Teorema 4.3.2 que dado $p \in \left\{0, \frac{\mu}{1+\mu}\right\}$ então p será atrator se $\mu < 1$, em contrapartida p será repulsor se $\mu > 1$. Contudo, se $\mu < 1$ teremos apenas 0 como ponto fixo. Ou seja, $p = 0$ é atrator dado $\mu < 1$. Apesar da existência do ponto fixo quando $\mu < 1$, T_μ não possui uma dinâmica tão interessante, afinal existe apenas um ponto fixo o qual atrairia todos os outros.

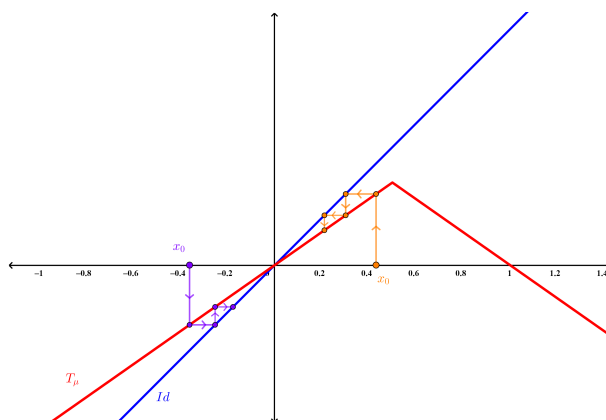


Figura 5.10: Diagrama de teias na aplicação Tenda com inclinação menor que 1.

Exemplo 5.2.1 Consideremos a função $T_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2, \\ -2x + 2, & \text{se } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Já sabemos que os pontos fixos de T_2 são $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$. E como $|T'(x)| = 2 > 1$ para todo $x \neq 1/2$, temos que estes dois pontos são ambos repulsores.

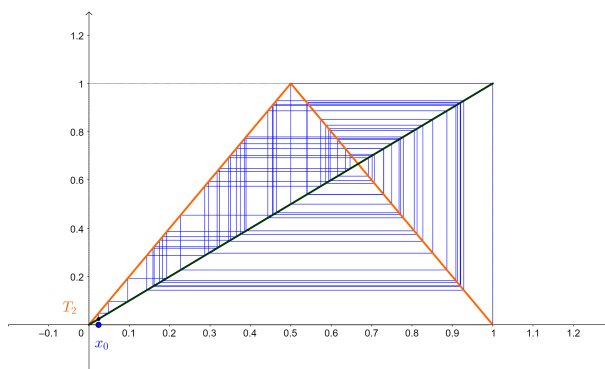


Figura 5.11: Diagrama de teias na Tenda para x próximo de 0.

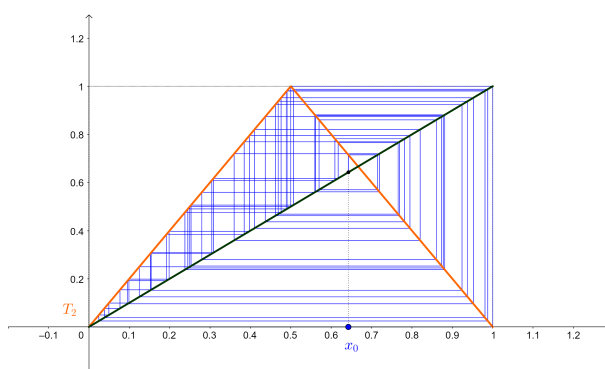


Figura 5.12: Diagrama de teias na Tenda para x próximo de 1.

Exemplo 5.2.2 Consideremos a função $T_3 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$T_3(x) = \begin{cases} 3x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2, \\ -3x + 3, & \text{se } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Tal como no exemplo anterior, sabemos que os pontos fixos de T_3 são $x = 0$ e $x = \frac{3}{4}$. E como $|T'(x)| = 3 > 1$ para todo $x \neq 1/2$, temos que estes dois pontos são ambos repulsores.

Fazendo análise gráfica para a aplicação T_3 , compreende-se que há alguns pontos em $[0, 1]$ os quais seguem o mesmo itinerário dos x que estavam fora do $[0, 1]$ aplicados T_μ , isto é, estes tendem a $-\infty$. Prosseguindo a reflexão sobre T_μ , podemos descrever os pontos fujões da seguinte forma, se $x < 0$ ou $x > 1$, então quando $n \rightarrow \infty$, $T_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$. No entanto, pela construção dos diagramas de teias, isto é equivalente a dizer se $T_\mu^n(x) < 0$ ou $T_\mu^n(x) > 1$, então, quando $n \rightarrow \infty$, $T_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$, isto é, x foge de $[0, 1]$. Ao nosso caso específico, x sai de $[0, 1]$ quando $n \rightarrow \infty$ sempre que $T_3^n > 1$ para $n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, se $O^+[x_0]$ é a órbita futura de um ponto inicial

$x_0 \in [0, 1]$ sobre T_3 , bastaria a existência de um iterado x_k maior que 1 para concluirmos que $x_n \in W^u(-\infty)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A Figura 5.13 pode exemplificar dois casos, $x = 0.16$ e $x = 0.72$ os quais fogem de $[0, 1]$ a partir das segunda e terceira iterações, respectivamente.

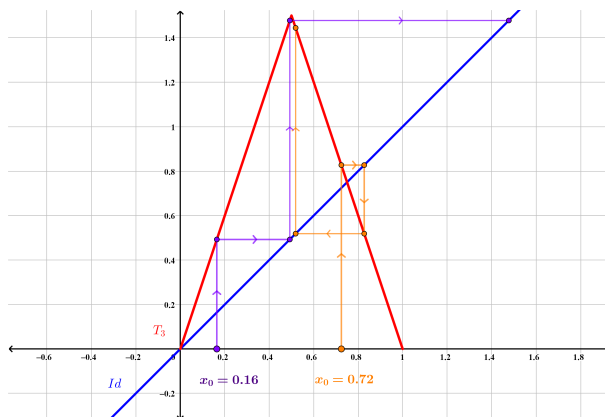


Figura 5.13: Diagrama de teias dos pontos 0.16 e 0.72 sobre a aplicação T_3 que fogem do $[0, 1]$ indo para $-\infty$.

Por outro lado, dizer quais são os pontos que saem de $[0, 1]$ é relativamente fácil e isto pode ser diretamente concluído quando refletirmos sobre quais são os pontos que permanecem em $[0, 1]$. Iremos mostrar que o conjunto dos pontos que permanecem em $[0, 1]$ quando iterados por T_3 trata-se de um conjunto bastante conhecido.

A priori, vamos refletir sobre os pontos fixos. Sabemos que $x = 0$ e $x = \frac{3}{4}$ são os fixos de T_3 e estes sempre permanecerão em $[0, 1]$. Por conseguinte, é imediato que qualquer ponto cuja órbita convirja para estes dois pontos fixos permanecerá em $[0, 1]$ - isto é, os pré fixos. Veja que $T_3(1) = 0$, logo 1 é pré fixo e portanto, este permanecerá em $[0, 1]$. Além disso, observe que $x = \frac{1}{3}$ e $x = \frac{2}{3}$ aplicados em T_3 são projetados no pré fixo 1. Portanto, $x = \frac{1}{3}$ e $x = \frac{2}{3}$ também permanecerão em $[0, 1]$. No entanto, observe que se $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ então $T_3(x) > 1$, e logo estes tenderão ao $-\infty$ - para auxílio veja a Figura 5.14. Como na primeira iteração dos $x \in [0, 1]$ sobre tenda, os pontos que estão em $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ recaem fora de $[0, 1]$. Portanto, podemos concluir que os pontos que permanecem em $[0, 1]$ na primeira iteração estão no conjunto complementar de $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ no $[0, 1]$, ou seja, $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Mas esta estrutura já foi obtida antes com um processo semelhante. Trata-se do primeiro passo da construção do Conjunto de Cantor Ternário.

Além disso, em cada um dos intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ existe um intervalo que será pré imagem de $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ pela aplicação T_3 no segundo iterado. Que pontos são esses os quais são levados

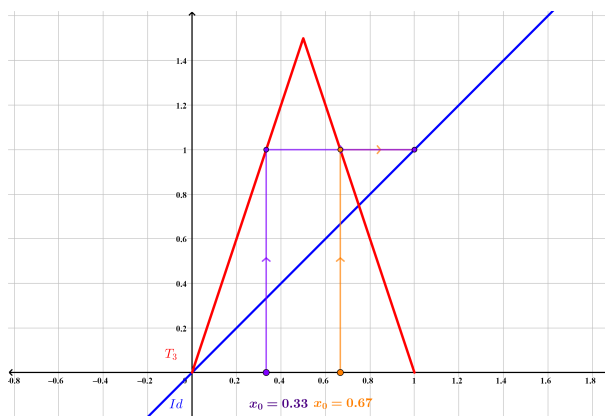


Figura 5.14: Diagrama de teias dos pontos $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ sobre a aplicação T_3 .

em $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ pela aplicação T_3 no segundo iterado? São pontos que pertencem aos terços médios de $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Isto é, respectivamente os intervalos abertos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Logo, os pontos que permanecem em $[0, 1]$ após duas iterações estão em

$$\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

E assim recaímos sobre o segundo passo da construção do conjunto de Cantor. Continuando o processo indefinidamente sobre as iterações de T_3 , obtemos a construção equivalente do Triádico de Cantor. Ou seja, o conjunto dos pontos que permanecem em $[0, 1]$ mediante infinitas iterações de T_3 é exatamente o conjunto de Cantor.

O conjunto dos fujões do intervalo $[0, 1]$ é portanto complementar do conjunto de Cantor. Ou seja, podemos dizer que as órbitas desses pontos são divergentes, ou melhor, diremos que elas convergem para o infinito (no caso $-\infty$). Aqui o infinito atrai todos os pontos que não estão no Cantor Ternário, ou seja, estes pontos formam a bacia de atração do infinito. Apesar do infinito não ser um ponto ou um subconjunto do \mathbb{R} , de certa forma, estamos dizendo que o símbolo ∞ é um atrator para este sistema. (NASCIMENTO, p. 7, 2018).

Com o argumentado até aqui podemos fazer as seguintes reflexões: $T_3(C_\infty) \subset C_\infty$, isto é, o conjunto de Cantor Triádico é um invariante pela tenda; e como os pontos fixos são repulsores, então os pontos que culminam nas órbitas destes fixos também o são, logo C_∞ é um repulsor para T_3 .

5.3 Aplicação Quadrática

Consideremos a função $F_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $\mu \in \mathbb{R}_+$ dada por

$$F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$$

Essa função é chamada de *quadrática* de parâmetro μ . A priori, observemos que os pontos fixos de F_μ em geral são $x = 0$ e $x = 1 - \frac{1}{\mu}$, afinal se $x \neq 0$ então

$$\begin{aligned} \mu x(1 - x) &= x \\ \mu(1 - x) &= 1 \\ x &= \frac{\mu - 1}{\mu}. \end{aligned}$$

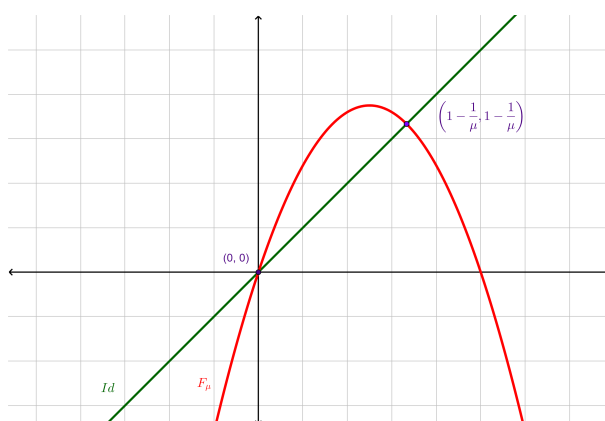


Figura 5.15: Gráficos da Identidade e da aplicação quadrática $F_\mu(x)$ determinando pontos fixos.

Proposição 5.3.1 *Seja p um ponto fixo não nulo de F_μ . Se $\mu > 1$, então $0 < p < 1$.*

Demonstração. Por hipótese, temos que $p = \frac{\mu - 1}{\mu}$. Ao supor que $p \geq 1$, concluímos que

$$p = \frac{\mu - 1}{\mu} \geq 1 \implies \mu - 1 \geq \mu \implies -1 \geq 0.$$

Desse modo, pela contradição obtida, devemos ter que $0 < p < 1$.

■

Observação 5.3.1 *Vale ressaltar que, embora $F_\mu(1) = 0$ pra qualquer $\mu \in \mathbb{R}_+$, $x = 1$ não é fixo, mas sim pré fixo.*

Fazendo análise gráfica para a aplicação F_μ , com $\mu > 1$, imediatamente compreende-se que a órbita dos pontos $x \in (-\infty, 0)$ e $x \in (1, \infty)$ fogem de $[0, 1]$ - a saber, tendem para $-\infty$ e ∞ , respectivamente. Mas também podemos chegar a esta conclusão da seguinte maneira. Se $x < 0$, então

$$\mu x(1 - x) < x \implies F_\mu(x) < x,$$

logo $F_\mu^n(x)$ é uma sequência decrescente a qual sequer converge para o ponto fixo p . Caso contrário, teríamos $F_\mu^n(x) \rightarrow F_\mu(p) < p$. Desse modo, $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$. Se $x > 1$, então

$$\mu x(1 - x) > x \implies F_\mu(x) > x,$$

logo $F_\mu^n(x)$ é uma sequência crescente a qual também não converge para o ponto fixo p . Senão, teríamos $F_\mu^n(x) \rightarrow F_\mu(p) > p$. Desse modo, $F_\mu^n(x) \rightarrow \infty$.

Além disso, a aplicação quadrática, diferente das duas anteriores, possui derivada para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Veja que

$$F'_\mu(x) = \mu(1 - 2x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mas também ao se pensar no módulo da derivada tal como anteriormente, não dependeremos apenas de μ , afinal

$$|F'_\mu(x)| = |\mu| \cdot |(1 - 2x)| = \mu \cdot |(1 - 2x)|.$$

Estas características nos motivam às seguintes proposições que tratam sobre a hiperbolicidade dos pontos aplicados em F_μ .

Proposição 5.3.2 *Sejam $1 < \mu < 3$ e p um ponto fixo de F_μ . Se $p = 0$, então p é ponto fixo repulsor. Se $p = 1 - \frac{1}{\mu}$, então p é ponto fixo atrator.*

Demonstração. Se $p = 0$, então $|F'_\mu(0)| = \mu \cdot |(1 - 2 \cdot 0)| = \mu$. Por hipótese $1 < \mu < 3$, desse modo pelo Teorema 4.3.2 ocorre que $p = 0$ é um ponto fixo repulsor. Por outro lado, se $p = 1 - \frac{1}{\mu}$, então $|F'_\mu(p)| = \mu \cdot |(1 - 2p)| = \mu \cdot \left| \frac{2-\mu}{\mu} \right| = |2 - \mu|$. Por hipótese $1 < \mu < 3$, logo $1 > 2 - \mu > -1$, ou seja, $|2 - \mu| < 1$. Desse modo, pelo Teorema 4.3.2 ocorre que $p = 1 - \frac{1}{\mu}$ é ponto fixo atrator.



Observação 5.3.2 Observe que se $\mu = 3$, $|F'_3(p)| = |2 - 3| = 1$. As figuras a seguir auxiliarão a compreensão do que ocorre nesse caso. De todo modo, ao tomar $\mu > 3$ em F_μ^2 é possível perceber a aparição de dois novos pontos fixos - ver Figura 5.19. E mais especificamente, outra bifurcação deverá ocorrer.

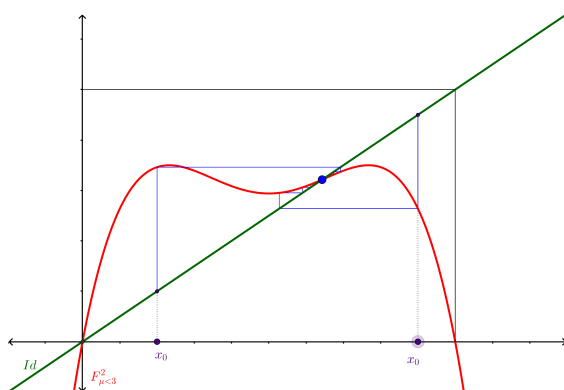


Figura 5.16: Gráfico de $F_\mu^2(x)$ para $\mu < 3$.

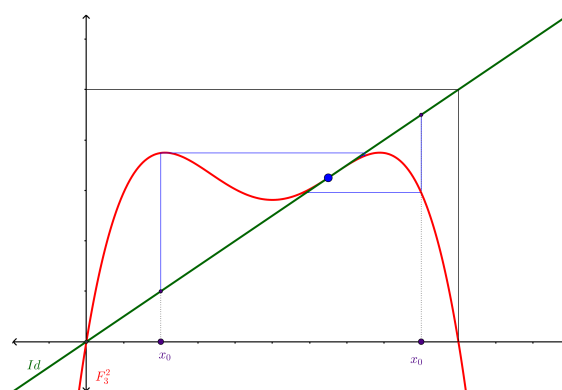


Figura 5.17: Gráfico de $F_\mu^2(x)$ para $\mu = 3$.

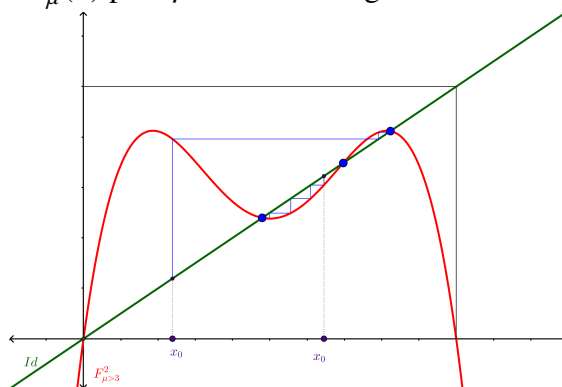


Figura 5.18: Gráfico $F_\mu^2(x)$ para $\mu > 3$.

Figura 5.19: Gráficos da aplicação $F_\mu^2(x)$, com $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, para μ próximo de 3.

Proposição 5.3.3 *Sejam $1 < \mu < 3$ e p um ponto fixo de F_μ . Se $0 < x < 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = p$.*

Demonstração. Verificaremos esta proposição dividindo-a em dois momentos o primeiro será para $1 < \mu < 2$, o segundo para $2 \leq \mu < 3$. Desse modo, seja $1 < \mu < 2$. Consideremos $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Diretamente pode-se obter que $|F_\mu(x) - p| < |x - p|$, para $x \neq p$. Por conseguinte, se fizermos $n \rightarrow \infty$, então teremos $F_\mu^n(x) \rightarrow p$. Por outro lado, se tomarmos $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $F_\mu(x)$ será projetado em $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Mas do que se argumentou anteriormente, podemos concluir que

$$F_\mu^{n+1}(x) = F_\mu^n(F_\mu(x)) \rightarrow p.$$

Portanto, se $1 < \mu < 2$ e $x \in (0, 1)$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = p$. Agora, seja $2 \leq \mu < 3$. Veja que pela Proposição 5.3.2 temos que $p = 1 - \frac{1}{\mu}$ é um ponto fixo atrator - inclusive se $\mu = 2$, temos um caso de excessiva atração do fixo p , pois $|F_2'(p)| = 0$. Por ora, pensemos em $\mu = 2$. Veja que se $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ então este intervalo é todo projetado pela F_2^n em $\frac{1}{2}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Além disso, se $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, é fácil concluir que $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ será levado em $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ pela F_2 . E do que vimos anteriormente, se $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, então este será projetado em $\frac{1}{2}$ por F_2^{n+1} para algum $n \in \mathbb{N}$. De modo geral, se $x \in (0, 1)$ e $\mu = 2$, então $F_2^n \rightarrow \frac{1}{2}$ quando $n \rightarrow \infty$. Para verificar a validade desta proposição para $2 < \mu < 3$ uma análise gráfica pode auxiliar - ver Figura 5.20.

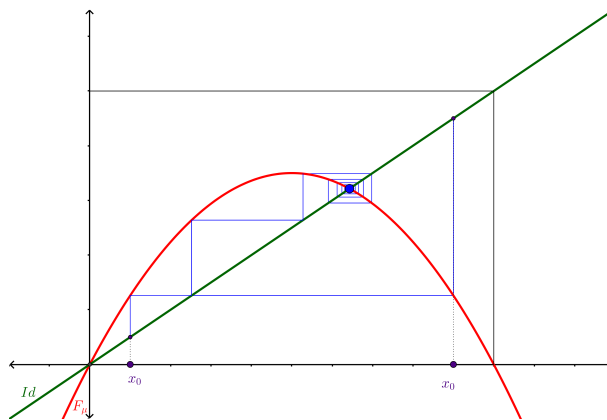


Figura 5.20: Diagrama de teias da aplicação Quadrática F_μ quando $2 < \mu < 3$.

Veja que se $x \in \left(0, 1 - \frac{1}{\mu}\right]$ então este intervalo é todo projetado pela F_μ^n em $p = 1 - \frac{1}{\mu}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Além disso, se $x \in (p, 1)$, é fácil concluir que $(p, 1)$ será levado em $(0, p)$ pela F_μ . E

do que vimos anteriormente, se $x \in (p, 1)$, então este será projetado em $p = 1 - \frac{1}{\mu}$ por F_μ^{n+1} para algum $n \in \mathbb{N}$. De modo geral, se $x \in (0, 1)$ e $2 < \mu < 3$, então $F_\mu^n \rightarrow 1 - \frac{1}{\mu} = p$ quando $n \rightarrow \infty$.

■

CAPÍTULO 6

CONJUNTO DE CANTOR E DINÂMICA SIMBÓLICA

Neste capítulo, discutiremos a *dinâmica simbólica*. Mais precisamente, teremos como principal objetivo construir um modelo para a estrutura dinâmica da *aplicação quadrática* F_μ sobre o *conjunto de Cantor* Λ . Para isso deveremos configurar um modelo de mapeamento sob um espaço, cujo mapeamento seja equivalente à $F_\mu(\Lambda)$. Faremos isto já vislumbrando compreender a natureza de $F_\mu(\Lambda)$ sobre uma aplicação mais simples de se estudar, esta aplicação será justamente o modelo equivalente citado.

6.1 Conjunto de Cantor

O objetivo desta seção é dar um modelo para a estrutura dinâmica da aplicação quadrática sobre o conjunto de Cantor Λ , que adiante comumente referenciaremos somente por Λ . Para isso deveremos configurar um modelo de mapeamento sob um espaço, cujo mapeamento seja equivalente à $F_\mu(\Lambda)$. Mas também, ainda precisaremos de um espaço no qual tal modelo atuará. A este estudo chamamos de Dinâmica Simbólica.

Os pontos no espaço que estamos por definir deverão ser sequências infinitas de 0's e 1's. Associaremos ao número 0 os pontos os quais caem a esquerda do ponto crítico e se a órbita for para o lado direito, o número 1. Assim, associamos 0 para esquerda e 1 para a direita do $\frac{1}{2}$ no intervalo $I = [0, 1]$, concebendo assim os conjuntos I_0 e I_1 .

Por ora, deixemos a construção do espaço para depois para pensarmos na seguinte questão. O que é o tal Conjunto de Cantor Λ ¹? Será que já o conhecemos? Retomemos as propriedades de conjunto de Cantor Triádico apresentadas no Capítulo 2.

Definição 6.1.1 *Conjunto de Cantor:* Um conjunto de Cantor $\Lambda \subset \mathbb{R}$ é subconjunto compacto, perfeito e totalmente desconexo.

De maneira equivalente, podemos estender essa definição para espaços como \mathbb{R}^2 e \mathbb{C} . Porém, em cada espaço métrico temos que definir claramente o significado de conjunto totalmente desconexo e subconjunto perfeito.

Exemplo 6.1.1 *O conjunto de Cantor Triádico é um conjunto de Cantor.*

Já demonstramos este fato em capítulo anterior.

Trataremos a seguir de um Λ obtido no intervalo unimodal $[0, 1]$ aplicado sobre a F_μ , particularmente quando $\mu > 4$ - é quando ocorre uma dinâmica mais interessante de F_μ , onde nos deparamos com um comportamento caótico num conjunto "pequeno". Observe que, para $\mu > 4$, o valor máximo $\frac{\mu}{4}$ de F_μ é maior que 1. Observa-se que alguns pontos deixam I após uma iteração de F_μ , veja figura~6.1. Denotaremos o conjunto de tais pontos por A_0 . Note que A_0 é um intervalo aberto com centro em $\frac{1}{2}$ e possui a propriedade de que se $x \in A_0$, então $F_\mu(x) > 1$, $F_\mu^2(x) < 0$ e $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$. Desse modo, compreendemos que A_0 é o conjunto de pontos os quais escapam imediatamente de I . Todos os outros pontos, isto é são os $x \in I$ que não estão em A_0 , permanecem em I após uma iteração de F_μ .

Seja $A_1 = \{x \in I | F_\mu(x) \in A_0\}$. Se $x \in A_1$, então $F_\mu^2(x) > 1$, $F_\mu^3(x) < 0$, e como antes $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$. Indutivamente, seja $A_n = \{x \in I | F_\mu^n(x) \in A_0\}$, tal que A_n consista de todos os

¹Um justificativa para a escolha de Λ para representar este conjunto de Cantor pode ser encontrada em [15], p.48-49.

pontos os quais fogem de I na $n + 1$ -ésima iteração. Como acima, se x recair em A_n ocorrerá que a órbita de x tenderá ao $-\infty$.

Desde que sabemos o destino final de qualquer ponto o qual cai sobre A_n , nos resta apenas analisar o comportamento daqueles pontos que nunca escapam de I . Será que o conjunto formado por esses pontos é vazio? A resposta é não, observe que os extremos de I , isto é $x = 0$ e $x = 1$, nunca escapam de I . Infere-se que, se todos os pontos que **saem** de I estão em $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Então, o conjunto de pontos que **permanecem** em I estão em

$$I - \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

E este é o conjunto de Cantor o qual desta vez denotaremos por Λ - passos da construção podem ser compreendidos com as Figuras (6.1, 6.2 e 6.3.) das iterações da aplicação $F_{\mu}(x)$ para $\mu > 4$. De fato o é, pois $\Lambda \subset I$ é compacto, tem interior vazio, e do modo que construímos podemos concluir também que não contém pontos isolados e não é enumerável - ou seja, é um conjunto de Cantor. Vale ressaltar que, não se trata do mesmo Cantor que construímos no segundo capítulo - o Cantor Triádico. Uma vez que o primeiro é obtido por aplicações recursivas de $3x$, o último foi obtido por $\mu x(1 - x)$ com $\mu > 4$.

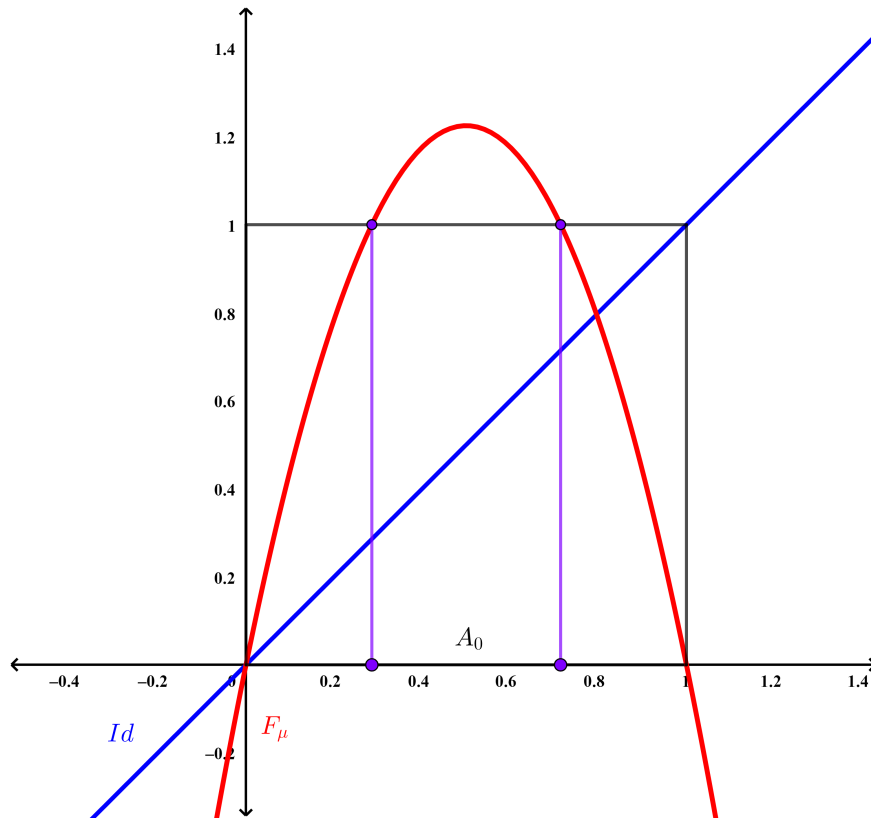


Figura 6.1: Gráfico de $F_\mu(x)$ para $\mu > 4$.

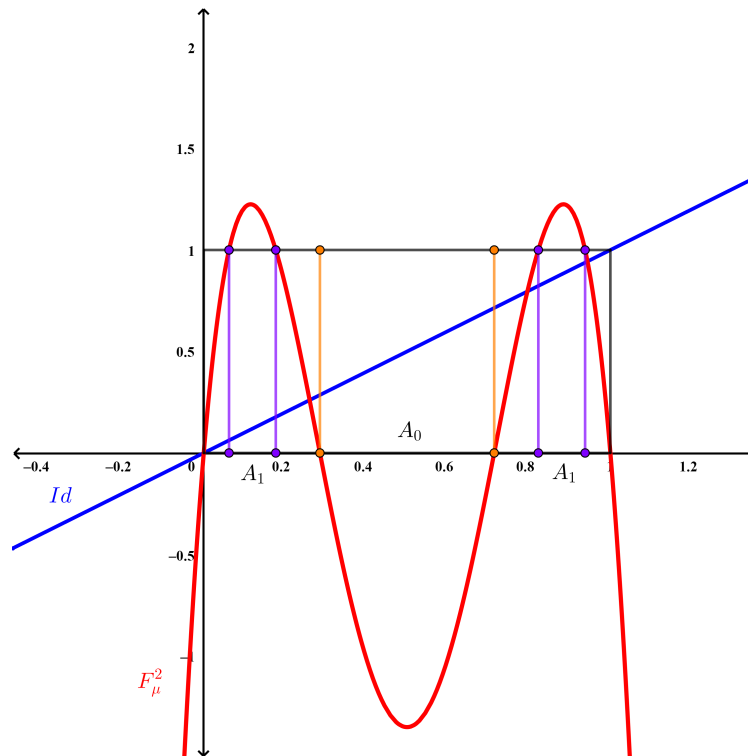


Figura 6.2: Gráfico de $F_\mu^2(x)$ para $\mu > 4$.

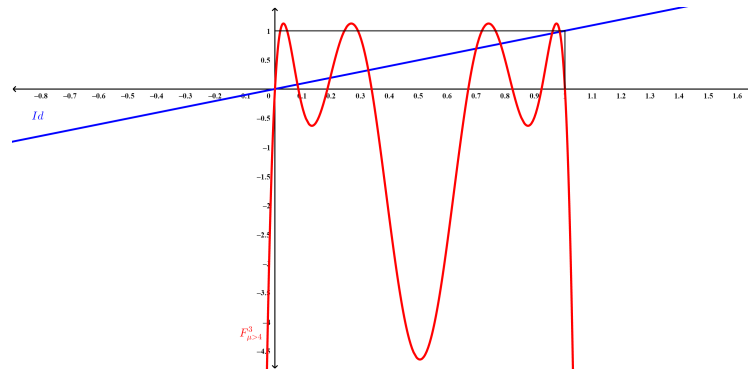


Figura 6.3: Gráfico $F_\mu^3(x)$ para $\mu > 4$.

Observação 6.1.1 Vale ressaltar que estamos imersos num contexto de um Cantor obtido de F_μ com um parâmetro maior que 4, logo suas derivadas serão mais altas. Por outro lado, quando o parâmetro é maior que 4, porém ainda assim está muito próximo de 4 a derivada já não é tão alta quanto deveria para usarmos uma demonstração usando o cálculo e a regra da cadeia. Desse modo, nos deparamos com uma dificuldade, trata-se de como de fato concluir a característica de ser totalmente desconexo - que de fato não é trivial. Em verdade, uma vez que o conjunto que sobra repele intervalos de I tal como um conjunto de Cantor Ternário, o Λ que tratamos aqui retira pequenos pedaços de I - mas mesmo assim se despedaça tornando-se totalmente desconexo. A verificação de se $\mu > 4$, com μ próximo de 4, implicando que Λ é de fato um conjunto de Cantor pode ser encontrada em [22] p.30-33.

Observação 6.1.2 A garantia de que Λ é um conjunto totalmente desconexo ocorre mediante a observação de que μ é grande o suficiente tal que $|F'_\mu(x)| > 1$ para qualquer $x \in I_0 \cup I_1$. Observe que se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então deve existir $\lambda > 1$ tal que $|F'_\mu(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda$. Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} |(F_\mu^n)'(x)| &= |(F_\mu^{n-1})'(x)| \cdot |F'_\mu(x)| > |(F_\mu^{n-1})'(x)| \cdot \lambda \\ &\vdots \\ |(F_\mu^n)'(x)| &> |(F_\mu^2)'(x)| \cdot \lambda^{n-2} \\ |(F_\mu^n)'(x)| &> \lambda^n. \end{aligned}$$

Queremos concluir que Λ não contém intervalos. Suponhamos por contradição que dados $x, y \in \Lambda$, $x \neq y$, tenhamos $[x, y] \subset \Lambda$. Desse modo, como $|(F_\mu^n)'(\alpha)| > \lambda^n$ para todo $\alpha \in [x, y]$.

Tome n tal que $\lambda^n|y - x| > 1$. Desta maneira, pelo Teorema do Valor Médio,

$$|F_\mu^n(y) - F_\mu^n(x)| \geq \lambda^n|y - x| > 1.$$

Como a medida de I é 1, temos que $F_\mu^n(y)$ ou $F_\mu^n(x)$ está(ão) fora de I . Mas isso é uma contradição, afinal esses dois pontos estão em Λ ! Portanto, Λ é totalmente desconexo.

Exemplo 6.1.2 Consideremos a aplicação $F_{2+\sqrt{5}}(x) = (2 + \sqrt{5})x(1 - x)$ sobre $I = [0, 1]$. Observe seu gráfico com diagrama de teias a seguir.

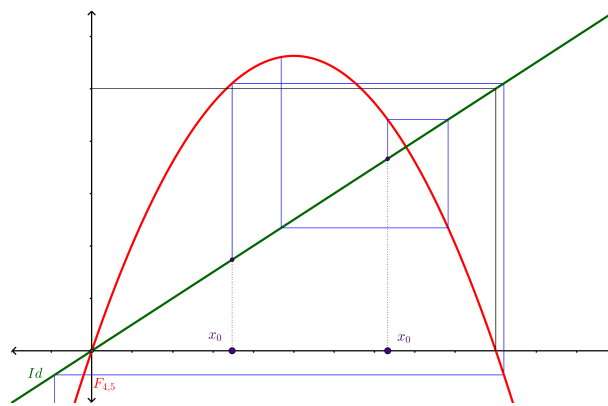


Figura 6.4: Aplicação $F_{2+\sqrt{5}}(x)$.

Observe que, o valor máximo de $F_{2+\sqrt{5}}$ é $\frac{2+\sqrt{5}}{4}$ que é maior que 1. Observa-se que alguns pontos deixam I após uma iteração de $F_{2+\sqrt{5}}$. Denotaremos o conjunto de tais pontos por A_0 . Note que A_0 é um intervalo aberto com centro em $\frac{1}{2}$ e possui a propriedade de que se $x \in A_0$, então $F_{2+\sqrt{5}}(x) > 1$, $F_{2+\sqrt{5}}^2(x) < 0$ e $F_{2+\sqrt{5}}^n(x) \rightarrow -\infty$. Em verdade, os pontos de A_0 tratam-se do intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ os quais de fato escapam de I rapidamente após uma iteração de $F_{2+\sqrt{5}}$. Todos os outros pontos são os $x \in I$ que não estão em A_0 , isto é, são os que permanecem em I após uma iteração de $F_{2+\sqrt{5}}$.

Seja $A_1 = \{x \in I | F_{2+\sqrt{5}}(x) \in A_0\}$. Se $x \in A_1$, então $F_{2+\sqrt{5}}^2(x) > 1$, $F_{2+\sqrt{5}}^3(x) < 0$, e como antes $F_{2+\sqrt{5}}^n(x) \rightarrow -\infty$. Indutivamente, seja $A_n = \{x \in I | F_{2+\sqrt{5}}^n(x) \in A_0\}$, tal que A_n consista de todos os pontos os quais fogem de I na $n + 1$ -ésima iteração. Como acima, se x recair em A_n ocorrerá que a órbita de x tenderá ao $-\infty$. E tal como anteriormente, estamos construindo um conjunto compacto e que não contém intervalos. Infere-se que, se todos os pontos que saem de I estão em $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Então, o conjunto de pontos que permanecem em I estão no complementar de

$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ em I . E este é outro exemplo de conjunto de Cantor Λ . Vale ressaltar que o contexto da busca dos pontos que permanecem em I que fizemos pode ser sintetizado na compreensão de que estamos buscando o complementar do conjunto cujas pré-imagens dos pontos recaem em A_0 .

Observação 6.1.3 *Tal como argumentado para a aplicação T_μ , com $\mu > 2$, podemos exprimir as seguintes reflexões sobre F_μ para $\mu > 4$: $F_\mu(\Lambda) \subset \Lambda$, isto é, o conjunto de Cantor é um invariante pela aplicação quadrática $F_\mu(x)$; e como $p = 1 - \frac{1}{\mu} > 0$ é ponto fixo repulsor, então os pontos que culminam neste fixo também terão órbita repulsora, logo Λ é uma fonte para F_μ .*

6.2 Dinâmica Simbólica

Nesta seção tomaremos nossa atenção para a busca de um modelo equivalente a F_μ em Λ . Isto é, deveremos estruturar um modelo de aplicação sob um espaço métrico, cuja transformação desse modelo no seu respectivo espaço seja equivalente à $F_\mu(\Lambda)$. Os pontos no espaço que estamos por definir serão sequências infinitas de 0's e 1's. Associaremos ao número 0 os pontos os quais caem a esquerda do ponto crítico e se a órbita for para o lado direito, o número 1. Retomemos a concepção do espaço com a seguinte definição.

Definição 6.2.1 *O espaço Σ_n é um conjunto cujos elementos são sequências infinitas de inteiros positivos com cada entrada da sequência variando entre 0 a $n-1$, isto é, $\Sigma_n = \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) | s_j = 0, 1, 2, \dots, \text{ ou } n-1\}$.*

Observe que itinerário de x é uma sequência $S(x) = s_0 s_1 s_2 \dots$. Desta forma, Σ_n é um espaço de sequências infinitas de inteiros entre 0 e $n-1$. Assim compreendemos que, Σ_2 é o espaço de sequência sobre os símbolos 0 e 1. Observe que os elementos de Σ_2 são sequências infinitas de inteiros, como $(00000 \dots)$, $(01011010 \dots)$ e $(11111 \dots)$. De todo modo, se dissermos agora que I_0 é o conjunto dos pontos que caem à esquerda do ponto crítico e I_1 , à direita deveremos fazer equivalência do seguinte modo, se $F_\mu^j(x) \in I_0$, então $s_j = 0$ e se $F_\mu^j(x) \in I_1$, então $s_j = 1$. Portanto, ao compreender que o itinerário de x é um sequência infinita de 0's e 1's, depreendemos que $S(x)$ ($S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$) é um ponto no espaço sequencial Σ_2 .

Ademais, precisamos ainda de uma métrica para este modelo para falarmos da topologia deste espaço Σ_2 . Portanto, compreendemos que devemos construir Σ_2 sobre um espaço métrico.

Inicialmente, consideremos duas sequências $s = (s_0s_1s_2 \cdots)$ e $t = (t_0t_1t_2 \cdots)$, definiremos a distância entre elas como

$$d_{\Sigma_2}[s, t] := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

Observação 6.2.1 *Escreveremos simplesmente $d[s, t]$ ou d no lugar de $d_{\Sigma_2}[s, t]$ quando não houver ambiguidade.*

Exemplo 6.2.1 *Sejam $s = (s_0s_1s_2 \cdots s_j \cdots)$ e $t = (t_0t_1t_2 \cdots t_j \cdots)$ elementos de Σ_2 , com $s_j = 0$ e $t_j = 1$ para todo j , então a distância $d[s, t] = 2$. Pois, para todo j vale $|s_j - t_j| = 1$, obtemos assim da equação (6.2) que*

$$d[s, t] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2$$

□

Note que como as sequências só podem estar a esquerda ou a direita do ponto crítico, logo para cada i , $|s_i - t_i|$ resultará apenas em 0 ou 1. Isto nos permite concluir que a série $d = d[s, t]$ é uma série infinita, a qual é dominada pela série geométrica $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$. Ou seja, d também é convergente.

Exemplo 6.2.2 *Vejam outro exemplo, sejam $s = (001001001 \cdots)$, $t = (101010 \cdots) \in \Sigma_2$. Temos que, $d[s, t] = \frac{10}{9}$. Afinal, $(|s_i - t_i|)_{i \in \mathbb{N}} = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, \cdots)_{i \in \mathbb{N}}$. Da sequência das i -ésimas distâncias, observamos que se $i \in \{4, 10, 16, \cdots\}$ a diferença é uma unidade, vale o mesmo para $i \in \{5, 11, 17, \cdots\}$ e $i \in \{0, 6, 12, 18, \cdots\}$. De modo geral ocorre que*

$$d[s, t] = 1 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{12}} + 0 + \cdots \quad (6.1)$$

Depreende-se, quando o resto da divisão de 6 por i for menor que 3, $|s_i - t_i| = 1$, caso contrário é 0. Desse modo, reescrevendo a soma em (6.1), obtemos

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6i}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{6i-1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{6i-2}} \quad (6.2)$$

Mas também, observe que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6i}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^6}}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{6i-1}} = \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^6}} \quad e \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{6i-2}} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^6}}$$

Desse modo a soma em (6.2) resulta em

$$d[s, t] = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^6}} \cdot \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + 1 \right) = \frac{64}{63} \cdot \frac{2^5 + 2^4 + 2^9}{2^9} = \frac{560}{63 \cdot 8} = \frac{70}{63} = \frac{10}{9}.$$

Proposição 6.2.1 Ocorre que d é uma métrica de Σ_2 .

Demonstração. Observemos que, $d[s, t] \geq 0 \forall s, t \in \Sigma_2$ e $d[s, t] = 0$ se, e somente se $s_i = t_i \forall i$.

Mas também,

$$|s_i - t_i| = |t_i - s_i| \implies d[s, t] = d[t, s].$$

E finalmente se $r, s, t \in \Sigma_2$, então

$$|r_i - s_i| + |s_i - t_i| \geq |r_i - t_i| \implies d[r, s] + d[s, t] \geq d[r, t].$$

■

Uma vez que Σ_2 está munido de uma métrica d , dizemos que o par (Σ_2, d) é um espaço métrico. E assim, a métrica d nos permitirá inferir propriedades topológicas sobre os subconjuntos de Σ_2 , como: a existência de conjuntos abertos ou fechados; proximidade e convergências de tais seqüências; e a continuidade de aplicações definidas em Σ_2 .

Proposição 6.2.2 Sejam $s, t \in \Sigma_2$ com $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Então $d[s, t] \leq \frac{1}{2^n}$. Em contrapartida, se $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$, então $s_i = t_i$ para $i \leq n$.

Demonstração. Se $s_i = t_i$ com $i \leq n$, então

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$

Logo,

$$d[s, t] \leq \frac{1}{2^n}.$$

Por outro lado, pela contrapositiva se $s_j \neq t_j$, ou seja $|s_j - t_j| = 1$, para $j \leq n$. Então devemos ter

$$\begin{aligned} d[s, t] &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{j=0}^n \frac{|s_j - t_j|}{2^j} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|s_j - t_j|}{2^j} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^j} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|s_j - t_j|}{2^j} \\ &\geq \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d[s, t] \geq \frac{1}{2^n}.$$

E, equivalentemente, se $s_j = t_j$, para $j \leq n$, então $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$.

■

Posterior ao contingente inicial apresentado podemos portanto definir a aplicação **shift**, cuja apresenta reconhecível importância para a modelagem da dinâmica que queremos descrever sobre F_μ .

Definição 6.2.2 A aplicação **shift** ($\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$) é dada por $\sigma(s) = \sigma(s_0s_1s_2 \cdots) = (s_1s_2s_3 \cdots)$.

Note que $\sigma^n(s_0s_1s_2 \cdots) = (s_ns_{n+1} \cdots)$.

A aplicação σ não é injetora em Σ_2 , uma vez que podemos ter $\sigma(s) = \sigma(t)$, bastando por exemplo ter $s = (010010 \cdots)$ e $t = (110010 \cdots)$ se diferenciando, no caso, apenas em s_0 e t_0 .

Para concluir coerentemente a modelagem na dinâmica simbólica que estamos construindo seria interessante que a aplicação shift fosse contínua. No entanto, para concluir a continuidade de shift deveremos utilizar a métrica d construída anteriormente.

Proposição 6.2.3 De fato, $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ é contínua.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ e $s = (s_0s_1s_2 \cdots)$. Tome n tal que $1/2^n < \varepsilon$. Seja $\delta = 1/2^{n+1}$. Se $t = (s_0s_1s_2 \cdots)$ satisfaz $d[s, t] < \delta$, então pela Proposição 6.2.2 resulta $s_i = t_i$ para $i \leq n + 1$.

Desse modo, $\sigma(s)$ e $\sigma(t)$ possuem as mesmas entradas em todo $i < n + 1$, isto é, $i \leq n$. Portanto, novamente pela Proposição 6.2.2, obtemos que $d[\sigma(s), \sigma(t)] \leq 1/2^n < \varepsilon$.

■

Interpretemos alguns pontos que obtivemos até aqui. Observamos que os pontos periódicos correspondem à repetições sequenciais, afinal são todos sequências na forma $s = (s_0 \cdots s_{n-1}, s_0 \cdots s_{n-1}, s_0 \cdots s_{n-1} \cdots)$. E desse modo, existem ao todo 2^n pontos periódicos de período n para σ , veja que se p é uma sequência de n casas que representa justamente as possibilidades de cada uma das n entradas teríamos: $p = (2, 2, 2, \cdots, 2, 1)$ ou $p = (1, 2, 2, \cdots, 2, 2)$. Ao todo são $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ possibilidades. Ou seja, cada um dos 2^n pontos periódicos de período n para σ é gerado por uma das 2^n sequências finitas de 0s e 1s de comprimento n . É interessante observar que pelo raciocínio seguido conseguimos responder diretamente que a quantidade de pontos periódicos que σ teria em Σ_n seria n^n .

Depreende-se também que o conjunto dos pontos periódicos de σ , $Per(\sigma)$, forma um denso subconjunto de Σ_2 , afinal $\overline{Per(\sigma)} = \Sigma_2$. Haja visto que ao tomar $t_n \in \Sigma_2$ uma sequência de pontos periódicos de período n cuja converge a uma sequência $s \in \Sigma_2$, desta maneira, estaremos construindo uma situação em que temos duas sequências distintas em Σ_2 com as n -ésimas primeiras entradas iguais. Pela Proposição 6.2.2, resulta que $d[t_n, s] \leq \frac{1}{2^n}$. Assim, basta tomar ε tal que $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$ para se concluir que se n é suficientemente grande resulte $|t_n - s| < \varepsilon$. Portanto, $Per(\sigma)$ é de fato denso em Σ_2 .

Diretamente, podemos dizer que nem todos os pontos em Σ_2 são periódicos ou pré-periódicos. Note que qualquer sequência sem repetição não é periódica. Aliás, em virtude da vastidão da não periodicidade, existem órbitas não periódicas em Σ_2 as quais são densas em Σ_2 - por exemplo, a de $s = (010110111010111 \cdots)$. Afinal, o fecho destas órbitas seria o próprio Σ_2 .

Observação 6.2.2 *Diremos também que aplicações as quais contém órbitas densas serão topologicamente transitivas. Posteriormente, no Capítulo 8 falaremos mais sobre a transitividade topológica.*

Dada importância do que tratamos, vamos separar as inferências as quais fizemos acima em uma proposição cuja evidenciaremos unidas.

Proposição 6.2.4 *Ocorre que: $|Per_n(\sigma)| = 2^n$; $Per(\sigma)$ é denso em Σ_2 ; e há uma órbita densa para σ em Σ_2 .*

CAPÍTULO 7

CONJUGAÇÃO TOPOLÓGICA

É interessante pensarmos em como determinadas propriedades são herdadas topologicamente, tal como a continuidade e a densidade. Será que poderemos concluir heranças de naturezas como repulsões ou atrações? No decorrer deste capítulo, nosso estudo caminhará próximo as conclusões mais imprescindíveis do desenvolvimento deste trabalho.

7.1 Conjugação Topológica

Nesta seção evocaremos conjugações de sistemas dinâmicos na tentativa de vislumbrar características topologicamente herdadas e assim ponderar resultados verificados. Vale ressaltar que nosso estudo sobre aplicações (de rotações, bem como as trigonométricas) no círculo no capítulo 4 será também de grande utilidade agora. Mas, afinal, o que é uma conjugação?

Definição 7.1.1 *Dizemos que as aplicações f e g são **conjugadas** se elas são relacionadas por uma mudança de coordenadas contínua e injetora. Ou seja, se ocorre $C \circ f = g \circ C$ para uma aplicação contínua e injetora C .*

Proposição 7.1.1 As aplicações $T_2(x)$ e $F_4(x)$ vistas no Capítulo 5 são conjugadas pela aplicação $C(x) = \frac{1 - \cos(\pi \cdot x)}{2}$, $F_4(C(x)) = C(T_2(x))$, para cada $x \in [0, 1]$.

Demonstração. Inicialmente, observemos que C é de fato: contínua e injetiva em $[0, 1]$. A continuidade segue diretamente por C ser formada por operações de funções contínuas sobre $[0, 1]$. A injetividade ocorre pelo fato de se $C(x) = C(y)$, então devemos ter $\cos(x\pi) = \cos(y\pi)$. Mas, isto resulta em $x = y$, logo C é de fato injetiva.

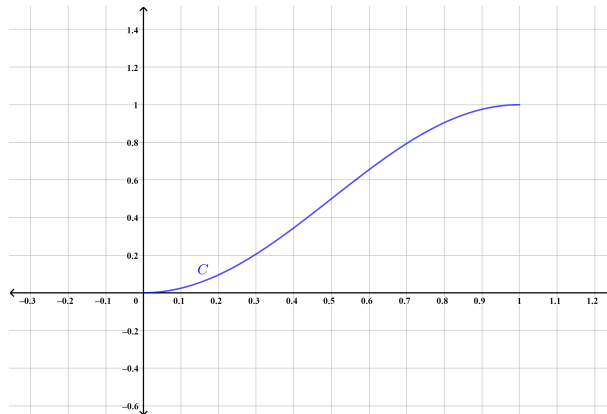


Figura 7.1: Homeomorfismo $C(x) = \frac{1 - \cos(\pi x)}{2}$.

Agora, como T_2 é definida por duas sentenças para $x \in [0, \frac{1}{2}]$ e $(\frac{1}{2}, 1]$, deveremos calcular $C(T_2(x))$ para as metades de $[0, 1]$. Inicialmente, se $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} C(T_2(x)) &= C(2x) = \frac{1 - \cos(2\pi x)}{2} \\ &= \frac{2 - 2 \cos^2(\pi x)}{2} \\ &= 1 - \cos^2(\pi x) \\ &= \text{sen}^2(\pi x). \end{aligned}$$

Agora, se $\frac{1}{2} < x \leq 1$

$$\begin{aligned} C(T_2(x)) &= C(2 - 2x) = \frac{1 - \cos(2\pi - 2\pi x)}{2} \\ &= \frac{1 - \cos(-2\pi x)}{2} \\ &= \frac{1 - \cos(2\pi x)}{2} \\ &= C(2x). \end{aligned}$$

Desse modo, para todo $x \in [0, 1]$, então $C(T_2(x)) = \text{sen}^2(\pi x)$. Analisemos agora $F_4(C(x))$,

$$\begin{aligned} F_4(C(x)) &= 4 \left(\frac{1 - \cos(\pi x)}{2} \right) \left(1 - \frac{1 - \cos(\pi x)}{2} \right) \\ &= 4 \left(\frac{1 - \cos(\pi x)}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos(\pi x)}{2} \right) \\ &= 1 - \cos^2(\pi x) = \text{sen}^2(\pi x), \quad \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Portanto, $F_4(C(x)) = C(T_2(x))$, para cada $x \in [0, 1]$.

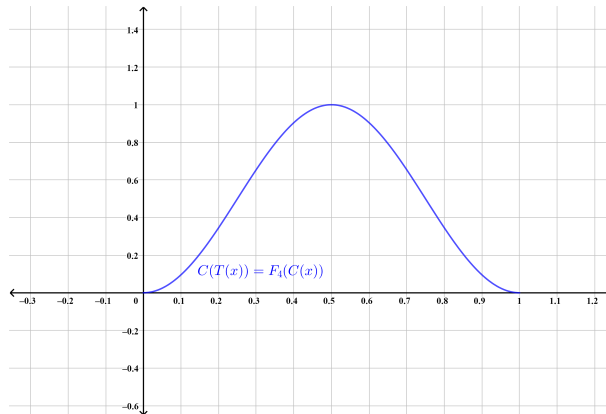


Figura 7.2: Aplicação resultante de $C(T_2(x)) = F_4(C(x)) = \text{sen}^2(\pi x)$.

■

Agora que compreendemos o que é uma conjugação neste contexto, exigiremos uma natureza mais bem designada. Afinal, estamos buscando ponderar heranças de essência topológica pelo viés das conjugações. Adicionaremos a conjugação a característica de ser um homeomorfismo.

Definição 7.1.2 *Sejam $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ dois sistemas dinâmicos, tais que X e Y são espaços topológicos. Tais espaços são **topologicamente conjugados** se existir um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$, ou equivalentemente $h(f(x)) = g(h(x))$. Nos referiremos a h como **conjugação topológica** entre f e g .*

Interpretamos da Definição 7.1.2 que dizer f e g são aplicações topologicamente conjugadas, significa que as dinâmicas destas aplicações sobre X e Y , respectivamente, são equivalentes. Além disso, que a conjugação topológica h nos permite vislumbrar como são as órbitas de um conjunto, digamos o X , estudando as órbitas do outro topologicamente conjugado, nesse caso Y , e vice-versa.

Observação 7.1.1 Da Proposição 7.1.1 e da Definição 7.1.2 concluímos diretamente que as aplicações T_2 e F_4 são topologicamente conjugadas pela aplicação $C(x) = \frac{1 - \cos(\pi \cdot x)}{2}$ para cada $x \in [0, 1]$. Uma vez que, para verificar a conjugação topológica só faltaria garantir que C é um homeomorfismo, no entanto isso é direto. Ao passo de que a aplicação C é contínua e injetiva sobre $[0, 1]$, e assim a inversa C^{-1} também será contínua. Ver Teorema 4.17 de [24]¹. Desse modo, de fato C é um homeomorfismo sobre $[0, 1]$. Portanto, C é uma conjugação topológica de F_4 e T_2 .

Exemplo 7.1.1 Existe uma conjugação topológica entre $Q_{-2} = x^2 - 2$ em $[-2, 2]$ e a tenda $T_2(x)$ em $[0, 1]$.

Veja que se definirmos uma função $h : [0, 1] \rightarrow [-2, 2]$ por $h(x) = 2 \cos(\pi \cdot x)$ e dissermos que ela é o homeomorfismo que conjuga Q_{-2} e T_2 . Então deveremos provar que $Q_{-2} \circ h = h \circ T_2$ e que h é um homeomorfismo.

Mas observe que o último ponto segue diretamente, afinal h é injetora e sobrejetora. Para verificar tais propriedades basta supor que $f(x) = f(y)$ para $x, y \in [0, 1]$ que se concluirá que $x = y$, isto é, a injetividade. A sobrejetividade segue do fato de todo ponto em $[-2, 2]$ ser imagem de um em $[0, 1]$, dadas continuidade e monotonicidade de h , podemos concluir que $h([0, 1]) = [-2, 2]$. Logo, h é uma bijeção e possui inversa. Da continuidade sobre $[0, 1]$, temos que a inversa h^{-1} também será contínua. Ver Teorema 4.17 de [24]². Desse modo, de fato h é um homeomorfismo.

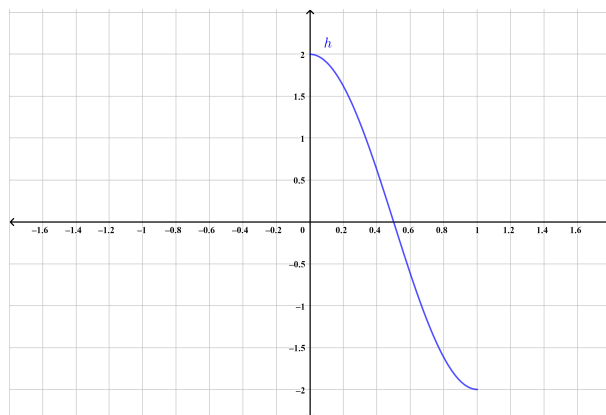


Figura 7.3: Homeomorfismo $h(x) = 2 \cos(\pi x)$.

¹Ver Rudin (1976, p.90).

²Ver Rudin (1976, p.90).

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
 Q_{-2}(h(x)) &= (h(x))^2 - 2 = 4 \cos^2(\pi x) - 2 \\
 &= 2(2 \cos^2(\pi x) - 1) \\
 &= 2(\cos^2(\pi x) + \cos^2(\pi x) - 1) \\
 &= 2(\cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x)) \\
 &= 2 \cos(2\pi x).
 \end{aligned}$$

Como T_2 é definida por duas sentenças, devemos ter cuidado sobre qual intervalo estamos fazendo as composições. Desse modo, consideremos inicialmente $0 \leq x \leq 1/2$, e sobre este intervalo estamos falando de $T_2(x) = 2x$. Assim,

$$h(T_2(x)) = h(2x) = 2 \cos(2\pi x)$$

e concluímos a validade da composição para $0 \leq x \leq 1/2$. Tomemos agora $1/2 < x \leq 1$, ou seja, estamos falando de $T_2(x) = 2 - 2x$. Logo,

$$\begin{aligned}
 h(T_2(x)) &= h(2 - 2x) = 2 \cos(2\pi - 2\pi x) \\
 &= 2 \cos(-2\pi x) \\
 &= 2 \cos(2\pi x).
 \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que h é uma conjugação topológica de Q_{-2} e T_2 .

Exemplo 7.1.2 *Sejam $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ e $h : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo tal que $h \circ f = g \circ h$. Consideremos a órbita futura de $x_0 \in X$ sobre f ,*

$$O^+[x_0] = \{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots, x_n = f^n(x_0) \dots\}.$$

Considere também $y_0 = h(x_0) \in Y$. E observe que

$$O^+[y_0] = \{y_0, y_1 = g(y_0), y_2 = g^2(y_0), \dots, y_n = g^n(y_0) \dots\}.$$

Portanto, pela Definição 7.1.2 temos que $O^+[x_0]$ e $O^+[y_0]$ são equivalentes sobre h - uma vez que f e g são topologicamente conjugados por h . Uma vez que, também podemos concluir $y_n = h(x_n)$ para todo $n \geq 0$.

A última sentença do exemplo anterior nos propõe uma propriedade essencial aos capítulos que seguem. Desse modo, estabeleceremo-na como uma proposição.

Proposição 7.1.2 *Sejam $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ e $h : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo tal que $h \circ f = g \circ h$. Se $x_0 \in X$ e $y_0 = h(x_0) \in Y$, então é válido que $y_n = h(x_n)$, para todo $n \geq 0$ - ou equivalentemente, que $g^n(h(x_0)) = h(f^n(x_0))$ para todo $n \geq 0$.*

Demonstração. Consideremos para $n \geq 0$ a propriedade $P(n) : g^n(h(x_0)) = h(f^n(x_0))$. Tem-se que:

- i) se $n = 0$. Pelo lado esquerdo ocorre, $g^0(h(x_0)) = h(x_0)$. Pelo direito, $h(f^0(x_0)) = h(x_0)$. Desse modo, $P(0)$ é verdade por hipótese.
- ii) se $n = 1$. Pelo lado esquerdo ocorre, $g(h(x_0))$. Pelo direito, $h(f(x_0))$. Desse modo, $P(1)$ é verdade por hipótese.
- iii) se $n = 2$. Pelo lado esquerdo ocorre, $g^2(h(x_0)) = g \circ g \circ h(x_0) = g \circ h \circ f(x_0)$. Pelo direito, $h(f^2(x_0)) = h \circ f \circ f(x_0) = g \circ h \circ f(x_0)$. Desse modo, $P(2)$ é verdade.
- iv) Suponhamos para $k \geq 0$ que $P(k)$ é verdadeira. Ou seja, temos como hipótese de indução $g^k(h(x_0)) = h(f^k(x_0))$.
- v) Devemos mostrar que $P(k + 1)$ é verdadeira. Ou seja, temos como tese de indução $g^{k+1}(h(x_0)) = h(f^{k+1}(x_0))$.

Observemos que como $g^{k+1}(h(x_0)) = g \circ g^k \circ h(x_0)$. Pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} g^{k+1}(h(x_0)) &= g \circ g^k \circ h(x_0) \\ &= g \circ h \circ f^k(x_0). \end{aligned}$$

Desse modo, $g^{k+1}(h(x_0)) = g \circ h \circ f^k(x_0) = h \circ f \circ f^k(x_0)$. Portanto, $g^{k+1}(h(x_0)) = h(f^{k+1}(x_0))$, o que significa que $P(k+1)$ é verdadeira. Por fim, pelo Princípio da indução finita, concluímos que a propriedade $P(n) : g^n(h(x_0)) = h(f^n(x_0))$ é verdadeira para todo $n \geq 0$.

■

Observação 7.1.2 Além disso, sendo h um homeomorfismo, existe h^{-1} . E como $g^n(h(x_0)) = h(f^n(x_0))$ para todo $n \geq 0$. A coerência de nossas interpretações sobre a Definição 7.1.2 se concluem consonantemente, uma vez que desta relação sempre podemos obter:

$$h \circ f \circ h^{-1} = g \circ h \circ h^{-1} = g \qquad h^{-1} \circ g \circ h = h^{-1} \circ h \circ f = f$$

E pela proposição anterior, generalizamos para todo $n \geq 0$:

$$h \circ f^n \circ h^{-1} = g^n \circ h \circ h^{-1} = g^n \qquad h^{-1} \circ g^n \circ h = h^{-1} \circ h \circ f^n = f^n$$

Exemplo 7.1.3 Já vimos que as aplicações $T_2(x)$ e $F_4(x)$ são conjugadas topologicamente pela aplicação $C(x) = \frac{1 - \cos(\pi \cdot x)}{2}$ para cada $x \in [0, 1]$. Mas também, é verdade que se p é um ponto periódico de período k para T_2 , então $C(p)$ é um ponto periódico de período k para F_4 .

Afinal, pela Proposição 7.1.2, obtemos que se $x \in [0, 1]$, então $F_4^n(C(x)) = C(T_2^n(x))$ para todo $n \geq 0$. Desse modo, sendo p um ponto periódico de período k para T_2 , isto é $T_2^k(p) = p$. Obtemos $C(T_2^k(p)) = C(p)$ e $C(T_2^k(p)) = F_4^k(C(p))$. Portanto, $F_4^k(C(p)) = C(p)$, isto é, $C(p)$ é um ponto periódico de período k para F_4 .

O que vimos anteriormente, nos vislumbra a garantia de periodicidade dos pontos que será herdada graças à conjugação topológica. Já vimos que o itinerário de $x \in \Sigma_2$ é uma sequência $S(x) = (s_0 s_1 s_2 s_3 \dots)$, com $s_j = 0$ ou 1 . A conclusão deste nos confronta que o objetivo daquela conceituação era determinar um modelo que bem representasse o sistema dinâmico $F_\mu(x)$. Nossas conclusões nos indicavam que este modelo era o shift, σ . Desse modo, agora nos é interessante herdar tais propriedades do modelo shift em F_μ , como a cardinalidade dos pontos periódicos, a densidade do conjunto dos pontos periódicos sobre o espaço em que F_μ é aplicada e a existência de órbita densa. Para isso é indutivo que precisaremos exibir um homeomorfismo que conjugue σ com F_μ , para assim ponderar a validade das propriedades herdadas. A priori, necessitaremos definir a seguinte relação.

Definição 7.1.3 Se o itinerário de $x \in \Sigma_2$ é uma sequência $S(x) = (s_0s_1s_2s_3 \cdots)$, com $s_j = 0$ ou 1 . Consideraremos que se $F_\mu^j(x) \in I_0$, então $s_j = 0$, mas se $F_\mu^j(x) \in I_1$, $s_j = 1$.

Teorema 7.1.1 Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ é um homeomorfismo.

Demonstração. Observemos a priori que devemos verificar as seguintes características: injetividade de S , sobrejetividade de S e continuidade de S e S^{-1} . Vejamos a primeira. Sejam x e y pontos distintos em Λ , suponha que $S(x) = S(y)$. Então, para qualquer n , devemos ter que $F_\mu^n(x)$ e $F_\mu^n(y)$ projetam-se sobre o mesmo lado, I_0 ou I_1 . Assim, obtemos que F_μ é monótona no intervalo entre $F_\mu^n(x)$ e $F_\mu^n(y)$. Por conseguinte, todos os pontos entre $F_\mu^n(x)$ e $F_\mu^n(y)$ permanecem em I_0 ou I_1 , isto é, $I_0 \cup I_1$. No entanto, isto é uma contradição, afinal teríamos que o Cantor Λ é formado por intervalos, sendo que este na verdade é totalmente desconexo. Portanto, garantimos assim a injetividade de S .

Analisemos a sobrejetividade de S . Seja $B \subset I$ um conjunto fechado. Consideremos

$$F_\mu^{-n}(B) = \{x \in I; F_\mu^n(x) \in B\}.$$

Observe que se $y \in B$, então $F_\mu^{-n}(y)$ é a n -ésima órbita passada de y . Dada a não monotonicidade de F_μ em I é diretamente conclusivo que dois intervalos, um em I_0 e outro em I_1 , equidistantes de $1/2$ resultam pela F_μ em um mesmo intervalo. Desse modo, sobre a pré-imagem $F_\mu^{-1}(B)$ podemos concluir que, sendo B um conjunto fechado, consiste em dois subconjuntos, um sobre I_0 e outro em I_1 . Seja $s = (s_0s_1s_2 \cdots) \in \Sigma_2$. Devemos mostrar que existe $x \in \Lambda$ tal que $S(x) = s$. Consideremos o seguinte conjunto,

$$\{x \in I; x \in I_{s_0}, F_\mu(x) \in I_{s_1}, \cdots, F_\mu^n(x) \in I_{s_n}\}.$$

De forma conveniente, denotaremos este conjunto como $I_{s_0s_1 \cdots s_n}$. Observe agora que

$$\begin{aligned} I_{s_0 \cdots s_n} &= I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 \cdots s_n}) \\ &= I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap F_\mu^{-2}(I_{s_2 \cdots s_n}) \\ &\vdots \\ &= I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \cdots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}). \end{aligned}$$

Gostaríamos de concluir que $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n} \neq \emptyset$, para assim obtermos que se $x \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n}$, então $\exists x \in I_{s_0 \dots s_n}$, para $n \geq 0$. Pois desse modo, teríamos construído um $x \in \Lambda$ tal que $S(x) = s$.

Desse modo, façamos a seguinte afirmação, quando n for suficientemente grande, $I_{s_0 \dots s_n}$ formará uma sequência não vazia de intervalos encaixantes. Veja diretamente que se $I_{s_i \dots s_n} = \emptyset$, para $1 \leq i \leq n$, então $I_{s_0 \dots s_n} = \emptyset$ - e assim nossa construção seria inconclusiva. Desse modo, reforçamos que supomos $I_{s_i \dots s_n}$ é um subconjunto não vazio, com $1 \leq i \leq n$. Decorre como anteriormente, $F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$ consiste em dois intervalos fechados, um em I_0 e outro em I_1 . E assim, pelo passo indutivo

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1} &= I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n}) \subset I_{s_0}, \\ I_{s_0 s_1 s_2} &= I_{s_0 s_1} \cap F_\mu^{-2}(I_{s_2 \dots s_n}) \subset I_{s_0 s_1}, \\ I_{s_0 s_1 s_2 s_3} &= I_{s_0 s_1 s_2} \cap F_\mu^{-3}(I_{s_3 \dots s_n}) \subset I_{s_0 s_1 s_2}, \\ &\vdots \\ I_{s_0 \dots s_n} &= I_{s_0 s_1 \dots} \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos uma sequência de intervalos encaixados

$$I_{s_0 \dots s_n} \subset I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}} \subset \dots \subset I_{s_0 s_1 s_2 s_3} \subset I_{s_0 s_1 s_2} \subset I_{s_0 s_1} \subset I_{s_0},$$

que vale para todo $n \geq 0$. E conseqüentemente, podemos concluir que $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n}$ não é vazio. Uma vez que S é injetiva ao se fazer $n \rightarrow \infty$ tais interseções resultariam em um único ponto. Logo, se $x \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n}$, então $x \in I_{s_0}, \dots, F_\mu^n(x) \in I_{s_n}$ para $n \geq 0$. O que garante a sobrejetividade de S . Logo, S é uma bijeção e portanto admite inversa S^{-1} .

Por fim, as continuidades de S e S^{-1} . Seja $x \in \Lambda$, suponhamos que $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$. Tomemos n tal que $1/2^n < \varepsilon$. Consideremos $I_{t_0 \dots t_n}$ subconjuntos fechados, tal como anteriormente, para as possíveis combinações $(t_0 t_1 \dots t_n)$. Note que esses subconjuntos são todos distintos, e portanto disjuntos. Mas também, que $\Lambda \subset \bigcup I_{t_0 \dots t_n}$. Veja que se pensarmos em uma sequência $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ de $n + 1$ casas que representa justamente as possibilidades de cada uma das $n + 1$ entradas de $(t_0 t_1 \dots t_n)$ teríamos ao todo 2^{n+1} possibilidades de elementos dessa sequência, uma vez que a cada p_j , com $0 \leq j \leq n$, há duas possibilidades "0" ou "1". Assim, existem 2^{n+1} subconjuntos $I_{t_0 \dots t_n}$, e $I_{s_0 \dots s_n}$ é um deles. Se $y \in \Lambda$, tomemos δ tal que $|x - y| < \delta$.

Desse modo, devemos ter que $y \in I_{s_0 \dots s_n}$. Por conseguinte, y e x possuem as $n + 1$ primeiras entradas em comum para S . Destarte, pela Proposição 6.2.2,

$$d_{\Sigma_2}[S(x), S(y)] < \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Assim, concluímos a continuidade de S . Além disso, sua inversa $S^{-1} : \Sigma_2 \rightarrow \Lambda$ também é contínua, afinal Σ_2 é compacto e S é contínua e injetiva. Ver Teorema 4.17 de [24]³. Por fim, temos que S é de fato um homeomorfismo. ■

Teorema 7.1.2 S conjugua F_μ e σ , isto é, $S \circ F_\mu = \sigma \circ S$.

Demonstração. Do teorema anterior vimos que se $x \in \Lambda$, então ele deve ser obtido por interseções de intervalos encaixantes. Isto é, um ponto $x \in \Lambda$ deve ser obtido por intervalos encaixantes $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n}$ determinados pela órbita de $S(x)$. Vimos também que

$$\begin{aligned} I_{s_0 \dots s_n} &= I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}) \\ &= \bigcap_{k=0}^n F_\mu^{-k}(I_{s_k}). \end{aligned}$$

Como $F_\mu(I_{s_0}) = I$. Temos que

$$\begin{aligned} F_\mu(I_{s_0 \dots s_n}) &= F_\mu\left(\bigcap_{k=0}^n F_\mu^{-k}(I_{s_k})\right) = \bigcap_{k=0}^n F_\mu^{-k+1}(I_{s_k}) \\ &= I \cap \left(\bigcap_{k=1}^n F_\mu^{-k+1}(I_{s_k})\right) = \bigcap_{k=1}^n F_\mu^{-k+1}(I_{s_k}) \\ &= I_{s_1} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_2}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n+1}(I_{s_n}) = I_{s_1 s_2 \dots s_n}. \end{aligned}$$

³Ver Rudin (1976, p.90).

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
 S \circ F_\mu(x) &= S \circ F_\mu \left(\bigcap_{n \geq 0}^{\infty} I_{s_0 \dots s_n} \right) \\
 &= S \left(\bigcap_{n \geq 1}^{\infty} I_{s_1 \dots s_n} \right) = (s_1 s_2 s_2 \dots) \\
 &= \sigma(s_0 s_1 s_2 s_2 \dots) = \sigma \circ S(x).
 \end{aligned}$$

■

Corolário 7.1.1 *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ é uma conjugação topológica de F_μ e σ .*

Demonstração. A conclusão segue diretamente dos Teoremas 7.1.1 e 7.1.2.

■

Ao se garantir a conjugação topológica não obtemos somente que determinados conjuntos herdam propriedades de outros conjugados, como decidimos tratar aqui para simplificar as noções iniciais. Em topologia, na verdade, inferimos que estamos concluindo que os espaços topologicamente conjugados são equivalentes. Ou seja, $F_\mu(\Lambda)$ e $\sigma(\Sigma_2)$, para $\mu > 2 + \sqrt{5}$, são homeomorfos graças a S , isto é, eles são equivalentes. À maneira mais conveniente, podemos entender que suas dinâmicas são completamente equivalentes. E desse modo, as características concluídas nas proposições e teoremas no capítulo 6 para σ sobre Σ_2 também são verdadeiras para F_μ sobre Λ , sendo $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Sobretudo a Proposição 6.2.4, que neste capítulo referenciaremos como o seguinte teorema.

Teorema 7.1.3 *Seja $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ com $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Então: $\|Per_n(F_\mu)\| = 2^n$; $Per(F_\mu)$ é denso em Λ ; e F_μ possui uma órbita densa em Λ .*

Depreendemos que os últimos três teoremas nos permitem vislumbrar a potência e aplicabilidade da Conjugação Topológica e da Dinâmica Simbólica.

Exemplo 7.1.4 *Seja $Q_c(x) = x^2 + c$. Se $c < 1/4$, existe um único $\mu > 1$ tal que Q_c é conjugada topologicamente com $F_\mu(x) = \mu \cdot x(1 - x)$ por uma aplicação da forma $h(x) = \alpha x + \beta$.*

Demonstração. Sobretudo devemos concluir que, fixado $c < \frac{1}{4}$, existe μ tal que $h \circ F_\mu = Q_c \circ h$ e sendo $\mu > 1$, então este é único. Inicialmente, veja que

$$\begin{cases} h(F_\mu(x)) = \alpha\mu x(1-x) + \beta \\ Q_c(h(x)) = \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 + c \end{cases}$$

Para se ter a igualdade da conjugação, precisamos da igualdade dos polinômios. Desse modo, devemos ter que

$$\begin{cases} -\alpha\mu = \alpha^2 \xrightarrow{\alpha \neq 0} \mu = -\alpha \\ \alpha\mu = 2\alpha\beta \xrightarrow{\alpha \neq 0} \mu = 2\beta \\ \beta = \beta^2 + c \end{cases}$$

E assim, obtemos que $\mu^2 - 2\mu + 4c = 0$. Mas, tal equação possui solução sobre μ , uma vez que

$$(\mu - 1)^2 = 1 - 4c \implies \mu = 1 \pm \sqrt{1 - 4c}. \quad (7.1)$$

Portanto, garantimos a existência de μ . E pelo obtido em (7.1), das duas possibilidades, apenas $\mu = 1 + \sqrt{1 - 4c}$ é maior que 1.

□

Observação 7.1.3 *Determinado tais resultados sobre topologias equivalentes, nos é interessante também observar que a equivalência topológica, isto é, o homeomorfismo de espaços topológicos também se corresponde através da transitividade. Ou seja, se uma aplicação f_1 é topologicamente equivalente a uma aplicação f_2 e a aplicação f_2 é topologicamente equivalente a uma aplicação f_3 , então a aplicação f_1 é topologicamente equivalente a f_3 .*

Afinal, sejam $f_i : A_i \rightarrow B_i$ e $h_j : B_j \rightarrow B_{j+1}$, com $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2$, tais que $h_1 \circ f_1 = f_2 \circ h_1$ e $h_2 \circ f_2 = f_3 \circ h_2$ e h_j seja conjugação topológica. Mas observe que

$$\begin{aligned} h_2 \circ h_1 \circ f_1 &= h_2 \circ f_2 \circ h_1 \\ &= f_3 \circ h_2 \circ h_1. \end{aligned}$$

Logo, se definirmos $h := h_2 \circ h_1 : B_1 \rightarrow B_3$, verificamos que f_1 e f_3 são topologicamente conjugados por h .

Podemos compreender tal observação com o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} f_1 : & A_1 & \rightarrow & B_1 \\ & h_1 \downarrow & & h_1 \downarrow \\ f_2 : & A_2 & \rightarrow & B_2 \\ & h_2 \downarrow & & h_2 \downarrow \\ f_3 : & A_3 & \rightarrow & B_3 \end{array}$$

Tabela 7.1: Diagrama comutativo da transitividade de homeomorfismos.

Exemplo 7.1.5 *Vimos anteriormente que $C(x) = \frac{1 - \cos(\pi x)}{2}$ é uma conjugação topológica de T_2 e F_4 , $C \circ T_2 = F_4 \circ C$, sobre $[0, 1]$. Mas também que, se $c < 1/4$, existe um único $\mu > 1$ tal que $Q_c(x) = x^2 + c$ é conjugada topologicamente com $F_\mu(x) = \mu \cdot x(1 - x)$ por uma aplicação da forma $h(x) = \alpha x + \beta$, ambas sobre $[0, 1]$. Observe que se estivermos considerando $\mu = 4$, na segunda situação deveremos ter*

$$\begin{cases} 4 = 1 + \sqrt{1 - 4c} \implies c = -2 \\ \alpha = -4 \text{ e } \beta = 2 \end{cases}$$

E assim, concluiremos que $h \circ F_4 = Q_{-2} \circ h$ para o homeomorfismo $h(x) = -4x + 2$. Logo,

$$\begin{aligned} h \circ C \circ T_2 &= h \circ F_4 \circ C \\ &= Q_{-2} \circ h \circ C \end{aligned}$$

E portanto, o homeomorfismo $h \circ C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definido por $h(C(x)) = 2 \cos(\pi x)$ também é uma conjugação topológica de T_2 e Q_{-2} .

□

Conseguimos verificar a equivalência de sistemas dinâmicos pela conjugação topológica, o que de modo geral nos permite compreender equivalências de órbitas, existência de órbitas densas, cardinalidade de pontos periódicos e inclusive características mais gerais como continuidade e

densidade. No entanto, o que podemos falar sobre atração e repulsão pelo viés da conjugação topológica?

Sejam $f, g : X \rightarrow X$ dois sistemas dinâmicos e h uma conjugação topológica entre f e g tal que $h \circ f = g \circ h$. Adicionaremos a hipótese de f , g e h serem deriváveis. E desse modo, observemos que pela regra da cadeia,

$$(h(f(x)))' = h'(f(x)) \cdot f'(x), \quad (7.2)$$

$$(g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x), \quad (7.3)$$

$$h'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x). \quad (7.4)$$

Consideremos agora que p é um ponto fixo de f e que $h'(p) \neq 0$. Desse modo, como $f(p) = p$ temos

$$\begin{aligned} g'(h(p)) \cdot h'(p) &= h'(f(p)) \cdot f'(p) \\ &= h'(p) \cdot f'(p) \\ \therefore f'(p) &= g'(h(p)). \end{aligned}$$

Inferese que as derivadas de f e g calculadas nos seus respectivos pontos fixos p e $h(p)$ possuem o mesmo valor. E portanto, os comportamentos de expansão (repulsão) e de contração (atração) determinados pelo módulo da derivada no ponto fixo são bem compreendidos, afinal preserva-se a estabilidade - assim dizendo, a mesma hiperbolicidade. Destarte, despontamos o que buscávamos na conclusão deste capítulo, além da equivalência regrada por um homeomorfismo, vislumbramos que a hiperbolicidade parece ser preservada. Mas e se generalizarmos e dissermos que p é periódico de período k para f , poderemos concluir analogamente que $(f^k)'(p) = (g^k)'(h(p))$? A resposta é assentada. Uma vez compreendendo a magnitude de tal propriedade, enunciaremos-na como um teorema.

Teorema 7.1.4 *Sejam f e g sistemas dinâmicos conjugados topologicamente pelo homeomorfismo h , isto é, $g(h(x)) = h(f(x))$ para todo x . Se p é um ponto periódico de período k para f , então $h(p)$ é um ponto periódico de período k para g . Se h' nunca zera sobre pontos na órbita periódica*

de f , então

$$(g^k)'(h(p)) = (f^k)'(p). \quad (7.5)$$

Demonstração. Já sabemos pela Proposição 7.1.2 que $g^k(h(x)) = h(f^k(x))$ para todo $k \geq 0$. Assim, pela regra da cadeia concluímos que

$$\begin{aligned} (g^k(h(x)))' &= (h(f^k(x)))' \\ h'(x) \cdot (g^k)'(h(x)) &= h'(f^k(x)) \cdot (f^k)'(x). \end{aligned}$$

Mas por hipótese, $f^k(p) = p$ e $h'(f^k(p)) \neq 0$. Logo $h'(f^k(p)) = h'(p) \neq 0$. Portanto,

$$(g^k)'(h(p)) = (f^k)'(p).$$

■

Vimos anteriormente que $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ são pontos fixos de T_2 e F_4 , respectivamente. Note que

$$C\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1 - \cos(2\pi/3)}{2} = \frac{3}{4}.$$

Como é válido que $C \circ T = F_4 \circ C$ para todo $n \geq 0$, ao aplicar o teorema acima considerando os pontos fixos agora citados, obtemos que

$$F'_\mu(3/4) = F'_\mu(C(2/3)) = T'(2/3) = -2.$$

Ou seja, ambos os pontos fixos são fontes, pois $|F'_\mu(3/4)| = |T'(2/3)| = 2 > 1$. No entanto, e quanto aos outros pontos periódicos? Retomemos nosso mais recente teorema, observe que este exige a derivada do homeomorfismo em x não nula na órbita do x . Por outro lado, como os outros pontos fixos de T_2 e F_4 são respectivamente $x = 0$ e $C(0) = 0$. E veja que $T'_2(0) = -2$ e $F'_4(0) = 4 - 4 \cdot 0 = 4$. E assim despontamos uma das conclusões que veremos no capítulo seguinte, cuja reflete que todos os pontos de Per_{F_4} , isto é, do conjunto de todos os pontos periódicos de F_4 , em exceção do 0, são fontes.

CAPÍTULO 8

CAOTICIDADE

Neste capítulo oitavo, abordaremos o grande escopo deste trabalho, exprimiremos enfim a caoticidade. Além disso, a priori vale salientar que desenvolveremos um conceito amplamente reverberado em diversas áreas do conhecimento, modelado por ramos teóricos distintos bem como Matemática. Podendo ser aplicados, por exemplo, à meteorologia, engenharia elétrica ou ainda criptografia. Mas, inicialmente, o que seria o Caos? Uma vez compreendido que é possível encontrar esta palavra em diversos contextos, reforçamos que nossa conceituação se desenvolve com a discussão teórica da caoticidade. Afinal esta será abordada com noções que conotam instabilidade, regularidade e aleatoriedade matematicamente. Em verdade, na perspectiva matemática, o caos pode descrever as iterações de uma aplicação definida em um conjunto e suas consequências no comportamento futuro de cada ponto do conjunto fixado, com as seguintes características globais: Alta Regularidade: o sistema dinâmico contém infinitos pontos periódicos; Alta Aleatoriedade: dependência sensível às condições iniciais ou efeito borboleta; Alta Mistura de órbitas: transitividade topológica (existência de órbitas densas no conjunto domínio).

Ademais, no que concerne o caos propriamente, embora o defina como acima, Devaney (2003) declara:

(...) Existem muitas possíveis definições de caos, em um sistema dinâmico,

algumas consistentes outras não. Nós escolhemos esta particular definição, pois se aplica a vários exemplos importantes e porque, em muitos casos, é fácil de verificar. (p. 50).

Dentre diversas formas de se definir a caoticidade, assimilaremos sobre um recorte à luz de Alligood (1996, p. 110) - o qual conceitua para a dinâmica a caoticidade sobre órbitas. De modo que define órbita caótica considerando uma aplicação invariante da reta e um conjunto limitado de uma órbita desta aplicação. Nessa conformidade, uma órbita será caótica se esta órbita não for assintoticamente periódica e o respectivo expoente de Lyapunov da órbita for maior que zero. Inclusive, veremos posteriormente que se o expoente de Lyapunov de uma órbita é positivo, então esta é caótica.

Além disso, com as definições e teoremas da dinâmica caótica de Devaney e Alligood podemos despontar conclusões interessantes sobre a entropia de um sistema dinâmico topologicamente. Ademais,

(...) Podemos dizer que a entropia mede a forma como se afastam as órbitas do sistema dinâmico à medida que o tempo passa. (...) A entropia topológica é um invariante topológico, o que significa que toma o mesmo valor para quaisquer dois sistemas dinâmicos topologicamente conjugados. (BARREIRA, 2012, p. 45-46.)

Após esta introdução do contexto geral deste capítulo, podemos enfim definir formalmente as propriedades mencionadas.

8.1 Aplicação caótica

8.1.1 Transitividade Topológica

Definição 8.1.1 *Seja $f : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico, dizemos que f possui a transitividade topológica se para qualquer par U, V de conjuntos abertos contidos em X , existir $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Assim, uma aplicação topologicamente transitiva tem pontos os quais movem-se sobre iterações de uma pequena vizinhança arbitrária para qualquer outra. Consequentemente, o sistema

dinâmico não pode ser decomposto em dois conjuntos abertos e disjuntos tendo em vista que também são invariantes sobre a aplicação.

Além disso, é de certa forma, direta a observação de que se uma aplicação possuir órbita densa¹, então esta possuirá a transitividade topológica. Vimos anteriormente que σ aplicado sobre Σ_2 , $\sigma(\Sigma_2) \subset \Sigma_2$, exprime a propriedade de que suas sequências não periódicas preenchem mais Σ_2 do que as sequências periódicas. Aliás, em virtude da vastidão da não periodicidade, existem órbitas não periódicas em Σ_2 as quais são densas. Um exemplo é $s = (010110111010111 \dots)$, cujo fecho da órbita de s sobre σ é o próprio Σ_2 . Ou seja, dado $x \in X$, se o fecho da órbita $O[x]$ se estende, se alastra, por todo o conjunto X cuja está contida, isto é, é densa em X , então é consecutivo que o sistema dinâmico $f(X) \subset X$ não pode ser decomposto em dois conjuntos abertos disjuntos. Logo em essência esta é a caracterização de f que possui a transitividade topológica.

8.1.2 Dependência Sensível às Condições Iniciais

Definição 8.1.2 *Seja $f : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico, dizemos que f possui dependência sensível às condições iniciais se existir $\delta > 0$ tal que, para qualquer $x \in X$ e qualquer vizinhança V_ε de x , exista $y \in V_\varepsilon$ e $n \geq 0$ tal que $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.*

Em outras palavras, se f é uma aplicação em X , um ponto $x \in X$ possui a dependência sensível às condições iniciais se existir uma distância não nula δ tal que alguns pontos próximos de x são projetados por f^n em pontos que distam pelo menos δ de $f^n(x)$. Em alguns momentos será necessário retomar x nesse contingente como *ponto sensível*.

Observação 8.1.1 *Geralmente, no contexto da dependência sensível, quanto mais perto y está de x , maior deverá ser $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Além disso, depreende-se que uma aplicação possui dependência sensível às condições iniciais se existirem pontos arbitrários próximos de x os quais eventualmente se separam de x por pelo menos δ sobre k iterações de f , para k suficientemente grande, mas basta ser pelo menos um desses pontos em todas as vizinhanças de x .

¹É também válido que se possui transitividade topológica, então possui órbita densa. No entanto, acrescenta-se a hipótese de estarmos sobre compactos da reta ou do círculo unitário. Para provar isto precisaríamos do **Teorema da Categoria de Baire**.

Proposição 8.1.1 *Para qualquer aplicação f sobre uma fonte sempre ocorre a dependência sensível às condições iniciais.*

Demonstração. Sejam a aplicação $f : X \rightarrow X$ e $A \subset X$. Suponha que A seja uma fonte sobre a aplicação f , isto é, todos os pontos de A são repulsores. Desse modo, se $x \in A$, então $|f'(x)| > 1$. Logo, é válido que se $y \in A$, então $|f(x) - f(y)| > |x - y|$. Seja $\delta > 0$ tal que $|x - y| > \delta$. Assim,

$$|f(x) - f(y)| > |x - y| > \delta.$$

Pela Definição 8.1.2, temos que sobre A a aplicação f possui a dependência sensível às condições iniciais.

■

Corolário 8.1.1 *Sobre o conjunto Λ a dependência sensível às condições iniciais existe na aplicação F_μ para $\mu > 4$.*

Demonstração. Consequência direta da Proposição anterior, uma vez que já sabemos que Cantor é uma fonte para F_μ com $\mu > 4$. Tal informação pode ser reencontrada na Observação 6.1.3.

■

Observação 8.1.2 *Uma vez compreendido que Λ possui a dependência sensível às condições iniciais sobre a aplicação F_μ para $\mu > 4$. Então também é direto que possui a mesma característica quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$.*

Embora tenhamos apresentado justificativas que demonstrem o resultado a seguir suficientemente bem, optaremos por descrever de maneira independente. E isto se dá pela importância histórica do seguinte Teorema como excelente exemplo aos resultados que o seguem.

Teorema 8.1.1 *A aplicação quadrática $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ com $\mu > 2 + \sqrt{5}$ possui dependência sensível às condições iniciais em Λ .*

Demonstração. Na construção de Λ vimos que nos passos iniciais alguns pontos deixariam I após uma iteração de F_μ . Denotamos o conjunto de tais pontos por A_0 . Note que A_0 é um intervalo

aberto com centro em $\frac{1}{2}$ e possui a propriedade de que se $x \in A_0$, então $F_\mu(x) > 1$, $F_\mu^2(x) < 0$ e $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$. Para ver a dependência sensível, tome δ menor que o diâmetro de A_0 , onde podemos compreender que $A_0 = [0, 1] - I_0 \cup I_1$ é o "espaço" entre I_0 e I_1 . Retome a Definição 7.1.3. Sejam $x, y \in \Lambda$. Se $x \neq y$, então $S(x) \neq S(y)$, i.e os itinerários de x e y devem se diferenciar em pelo menos um ponto, seja o tal o n -ésimo. Mas isso significa que $F_\mu^n(x)$ e $F_\mu^n(y)$ caem sobre lados opostos de A_0 , tal que $|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| > \delta$

■

Definição 8.1.3 $f : X \rightarrow X$ é **expansiva** se $\exists \nu > 0$ tal que, $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists n$ tal que $|f^n(x) - f^n(y)| > \nu$.

Embora, sejam conceitos que tratam de afastamentos, a expansividade difere da dependência sensível em que *todos os pontos próximos* eventualmente se separam em pelo menos ν . A definição acima fornece uma condição mais forte sobre o crescimento das derivadas das aplicações, por ser expansiva possui derivadas altas em todas as iterações.

Observação 8.1.3 A família das aplicações que possuem expansividade está contida na família das aplicações que possuem dependência sensível às condições iniciais. Isto é, toda aplicação expansiva possui a dependência sensível.

8.1.3 Aplicação Caótica

Consecutivamente às definições iniciais dos conceitos de Transitividade Topológica e Dependência Sensível às condições iniciais, nosso contingente nos permite neste momento definir nitidamente uma aplicação caótica. Definiremo-nas mediante três características principais tal como Robert Devaney definira em 1989 na primeira edição de seu *An Introduction to Dynamical Systems* - [7].

Definição 8.1.4 Seja V um espaço métrico. Dizemos que $f : V \rightarrow V$ é uma **aplicação caótica** em V se: f tem dependência sensível às condições iniciais; f é topologicamente transitiva; e pontos periódicos são densos em V .

Ou seja, uma aplicação caótica possui três características essenciais: *imprevisibilidade*, *indecomponibilidade* e *um elemento de regularidade*. Um sistema caótico é imprevisível por causa da dependência sensível às condições iniciais. Não se quebra, parte, ou decompõe em dois sistemas (dois subconjuntos invariantes abertos) que não interajam sobre f por conta da transitividade topológica. E em meio a esse comportamento aleatório, no entanto, temos um elemento de regularidade, os pontos periódicos os quais são densos em V .

Exemplo 8.1.1 $f : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $f(\theta) = 2\theta$ é caótica.

É caótica pois a distância angular entre dois pontos é dobrada sobre iterações de f , caracterizando a expansividade para todos os pontos. No entanto, se serve para todos é porquê os pontos são sensíveis. Logo, esta aplicação também possui dependência sensível às condições iniciais. Além disso, do argumento inicial, desde que qualquer arco pequeno em S^1 é expandido, para algum f^k é possível se cobrir todo o S^1 e, particularmente, qualquer outro arco em S^1 , exprimindo a propriedade da transitividade topológica. E por fim, a densidade de pontos periódicos é garantida pelo apresentado na seção 4.1 - Dinâmica do Círculo.

Teorema 8.1.2 A aplicação σ é caótica em Σ_2 .

Demonstração. Para provar que S possui a dependência sensível às condições iniciais, vamos considerar $x \neq y$ ambos em Σ_2 . Isso significa que em algum instante n as suas expansões irão se diferenciar, isto é, deve existir n tal que $x_n \neq y_n$. Desse modo,

$$\begin{aligned} |\sigma^n(x) - \sigma^n(y)| &= |x_n x_{n+1} x_{n+2} \cdots - y_n y_{n+1} y_{n+2} \cdots| \\ &\geq \frac{|x_n - y_n|}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

E isto é suficiente para garantir a dependência sensível. Vamos agora verificar que σ possui um denso conjunto de pontos periódicos. Observe que os pontos periódicos de σ são sequências repetitivas na forma

$$x_0 x_1 x_2 \cdots x_n x_0 x_1 \cdots x_n \cdots = \overline{x_0 x_1 x_2 \cdots x_n},$$

para $n \geq 0$. Suponha que $x = x_0 x_1 \cdots \in \Sigma_2$, e n é qualquer inteiro positivo. Consideremos o ponto periódico $y = \overline{x_0 x_1 x_2 \cdots x_n}$. Desse modo, desde que os n primeiros termos de x e y são idênticos,

então pela Proposição 6.2.2

$$|x - y| \leq \frac{1}{2^n}.$$

O que implica dizer que os pontos periódicos são densos em Σ_2 . Por fim, retomando a seção 6.2 - Dinâmica Simbólica, vimos que existem órbitas não periódicas em Σ_2 as quais são densas neste conjunto - por exemplo, $s = (010110111010111 \dots)$. Afinal, o fecho da órbita desta seria o próprio Σ_2 .

■

Teorema 8.1.3 $F_4(x) = 4x(1 - x)$ é caótica no intervalo $I = [0, 1]$.

Demonstração.² Seja $g(\theta) = 2\theta$ a aplicação em S^1 . Defina a função auxiliar $h_1 : S^1 \rightarrow [-1, 1]$ como $h_1(\theta) = \cos(\theta)$. Na verdade, h_1 é sobretudo a projeção de S^1 no eixo x . Consideremos também outra aplicação, seja esta $q(x) = 2x^2 - 1$. Desse modo, é verdade que

$$\begin{aligned} h_1(g(\theta)) &= \cos(\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ &= \cos^2(\theta) - 1 + \cos^2(\theta) \\ &= 2\cos^2(\theta) - 1 \\ &= q(h_1(\theta)). \end{aligned}$$

Isto significa que h_1 é uma conjugação de g com q . Consideremos agora $h_2(t) = \frac{1}{2}(1 - t)$. Desse modo podemos concluir também que $F_4(h_2(t)) = h_2(q(t))$, em razão de

$$\begin{aligned} h_2(q(t)) &= h_2(2t^2 - 1) \\ &= \frac{1}{2}(1 - 2t^2 + 1) \\ &= 1 - t^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_4(h_2(t)) &= F_4\left(\frac{1}{2}(1 - t)\right) = 4 \cdot \frac{1}{2}(1 - t) \left(1 - \frac{1}{2}(1 - t)\right) \\ &= 2(1 - t) \frac{1}{2}(1 + t) = 1 - t^2. \end{aligned}$$

²Uma demonstração complementar para as aplicações quadráticas serem caóticas em Cantor invariante quando $\mu > 4$ pode ser encontrada em [22](p.33-37).

E desse modo, podemos conceber o seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 \\
 h_1 \downarrow & & \downarrow h_1 \\
 [-1, 1] & \xrightarrow{q} & [-1, 1] \\
 h_2 \downarrow & & \downarrow h_2 \\
 I & \xrightarrow{F_4} & I.
 \end{array}$$

Porquanto argumentado previamente podemos deduzir que F_4 é topologicamente transitiva, pois se U e V são dois abertos em I , podemos escolher os arcos U^1 e V^1 em S^1 que são projeções U e V por $h_2 \circ h_1$. Uma vez que existe k tal que $g^k(U^1) \cap V^1 \neq \emptyset$, desta forma, temos $F_4^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Quanto à dependência sensível, notemos que qualquer vizinhança U de $x \in I$ é projetado por um U^1 em S^1 . Dada a expansividade de g , existe n tal que $g^n(U^1)$ pode preencher todo o S^1 . Desse modo, pelo homeomorfismo $h_2 \circ h_1$, é correto afirmar que $F_4^n(U)$ cobrirá I . Assim, garante-se a expansividade sobre F_4 , logo existem pontos em U os quais se distanciarão por pelo menos δ de x . Finalmente, densidade dos pontos periódicos para g implica que há um ponto periódico p_g em U^1 . A projeção desse ponto pelo homeomorfismo $h_2 \circ h_1$ em U é p_{F_4} periódico. ■

Corolário 8.1.2 A tenda T_2 é caótica em $[0, 1]$.

Demonstração. Uma vez que T_2 e F_4 são topologicamente conjugadas - rever Observação 7.1.1, a conclusão resulta diretamente do Teorema 8.1.3. ■

Teorema 8.1.4 As aplicações quadráticas $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ são caóticas em Λ quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Demonstração.³ Pelo Teorema 7.1.2 vimos que S conjugua F_μ e σ , isto é, $S \circ F_\mu = \sigma \circ S$. Além disso, é sabido também dado o Teorema 7.1.1 que se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ é um homeomorfismo. Como o Teorema 8.1.2 nos diz que a aplicação shift é caótica em Σ_2 , dada a conjugação topológica S de F_μ e σ , podemos concluir que F_μ também é caótica em Λ quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$. ■

Exemplo 8.1.2 A aplicação $f(x) = 4x^3 - 3x$ é caótica no intervalo $[-1, 1]$.

³Uma argumentação complementar para as aplicações quadráticas serem **fortemente** caóticas em Cantor invariante quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$ pode ser encontrada em [13](p.112-126).

Consideremos a aplicação $g(\theta) = 3\theta$ sobre o S^1 . Seja $h : S^1 \rightarrow [-1, 1]$ a função auxiliar dada por $h(\theta) = \cos(\theta)$. Observe que

$$\begin{aligned} h(g(\theta)) &= \cos(3\theta) = \cos(2\theta)\cos(\theta) - \text{sen}(2\theta)\text{sen}(\theta) \\ &= \cos^3(\theta) - 3\text{sen}^2(\theta)\cos(\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = f(h(\theta)). \end{aligned}$$

Como h é um homeomorfismo, temos que g e f são topologicamente conjugadas. Podemos observar o que ocorre com o seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ [-1, 1] & \xrightarrow{f} & [-1, 1] \end{array}$$

Além disso, por justificativas equivalentes que resultem na caoticidade de 2θ em S^1 , temos que 3θ também é caótica em S^1 . Portanto, a aplicação $f(x) = 4x^3 - 3x$ é caótica no intervalo $[-1, 1]$.

□

A seguir apresentaremos uma contribuição à definição de Caos dada por Devaney. Trata-se sobretudo da essência deste fenômeno de modo que para compreendê-lo agora precisaríamos estudar apenas duas das exigências da Definição 8.1.4. Apresentaremos o Teorema que garante a dependência sensível às condições iniciais como consequência das outras duas exigências do caos de Devaney. Conduzindo por outro lado do compreendido, afinal a dependência sensível denotava ser a condição essencial para se ter caos. A prova que apresentaremos pode ser encontrada também em [4].

A priori, o que corrobora tal compreensão sintética? Sabemos que ao se definir caoticidade de uma aplicação f sobre um espaço métrico X , uma das reflexões diretas será sobre a manutenção das características de $f(X)$ sobre uma conjugação topológica. Desse modo, é válida a reflexão sobre o fato de se: f é caótica; tivermos um diagrama comutativo onde Y é outro espaço métrico; e h é um homeomorfismo, então g é necessariamente caótica?

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

De imediato, pode-se afirmar que características topológicas serão preservadas, à exemplo a transitividade topológica e a existência de pontos periódicos densos. Mas e a dependência sensível? Esta em contrapartida trata-se de uma propriedade que concerne à métrica e que não necessariamente é preservada por conjugações. Mas por outro lado, à luz dos pensamentos de Banks, a transitividade topológica e a existência de pontos periódicos densos asseguram a dependência sensível às condições iniciais. Por fim, verifiquemos tais teses no seguinte teorema.

Teorema 8.1.5 *Se $f : X \rightarrow X$ é topologicamente transitiva e possui pontos periódicos densos, então f possui dependência sensível às condições iniciais.*

Demonstração. A priori, observe que existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo $x \in X$ exista um ponto periódico $q \in X$ cuja órbita $O[q]$ está numa distância de ao menos $\frac{\delta_0}{2}$ para x . Considere dois outros ponto periódico q_1 e q_2 com órbitas $O[q_1]$ e $O[q_2]$ disjuntas. Seja δ_0 a distância entre $O[q_1]$ e $O[q_2]$. Então pela desigualdade triangular, todo ponto $x \in X$ está numa distância de ao menos $\frac{\delta_0}{2}$ para uma das duas órbitas periódicas escolhidas.

Sejam $x \in X$ e V uma vizinhança de x . Chamemos de $B_\delta(x)$ a bola aberta de centro em x e raio δ . Como os pontos periódicos de f são densos, existe um ponto periódico p em $U = V \cap B_\delta(x)$. Seja n o período de p . Como mostramos acima, existe um ponto periódico $q \in X$ cuja órbita $O[q]$ se distancia ao menos δ de x . Defina

$$V := \bigcap_{k=0}^n f^k \left(B_\delta \left(f^k(q) \right) \right).$$

Claramente, V é aberto e não vazio uma vez que $q \in V$. De forma consecutiva, haja visto que f possui a transitividade topológica, existe $y \in U$ e um $j \in \mathbb{N}$ tal que $f^j(y) \in V$. Seja i a parte inteira obtida de $\frac{j+n}{n}$. Então $1 \leq ni - j \leq n$. Por construção,

$$f^{ni}(y) = f^{ni-j} \left(f^j(y) \right) \in f^{ni-j}(V) \subseteq B_\delta \left(f^{ni-j}(q) \right).$$

Agora, $f^{ni}(p) = p$, e desse modo pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} d_X(f^{ni}(y), f^{ni}(p)) &= d_X(f^{ni}(y), p) \\ &\geq d_X(f^{ni-j}(q), x) - d_X(f^{ni-j}(q), f^{ni}(y)) - d_X(x, p), \end{aligned}$$

onde d_X é a métrica sobre X . Assim, como $p \in B_\delta(x)$ e $f^{ni}(y) \in B_\delta(f^{ni-j}(q))$, temos que

$$d_X(f^{ni}(y), f^{ni}(p)) > 4\delta - \delta - \delta - 2\delta.$$

Portanto, pela desigualdade triangular, sempre vale que

$$d_X(f^{ni}(x), f^{ni}(y)) > \delta \text{ ou } d_X(f^{ni}(x), f^{ni}(p)) > \delta.$$

Em ambos os casos, nós encontramos um ponto em V cujo ni -ésimo iterado distancia mais que δ de $f^{ni}(x)$. Garantindo a dependência sensível às condições iniciais. ■

E assim como corolário podemos redefinir o caos de Devaney mediante apenas existência de transitividade topológica e densidade dos pontos periódicos.

Corolário 8.1.3 *Seja X um espaço métrico. Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow X$ é dita caótica em X se f possuir transitividade topológica e densidade dos pontos periódicos em X .*

Demonstração. Consequência direta da Definição 8.1.4 e do Teorema 8.1.5. ■

8.2 Órbita caótica

Nesta seção nos ambientaremos com a seguinte discussão. Considere em uma condição inicial um ponto x_1 que está próximo de um ponto p sobre uma aplicação f . No início da órbita de x_1 , é possível vislumbrar diversos comportamentos resumidos em: estabilidade e instabilidade. Ora quando p é um ponto repulsor observa-se separações ao longo da órbita numa progressão exponencial - isto é, cada iterado é multiplicado por $|f'(p)| > 1$. Mais além, se dissermos que p é um ponto periódico de período n e se $|(f^n)'(p)| \neq 1$, então p é um ponto hiperbólico e $(f^n)'(p)$ é o multiplicador do ponto periódico. E assim desse modo, dizemos que a razão exponencial de separação por iterado é $|f'(p)|$, quando p é hiperbólico repulsor. Por outro lado, lembre que se $|f'(p)| < 1$, então estaremos diante de um ponto atrator. Ou seja, a órbita de x_1 próximo de p pode ser atraída para o que chamamos de bacia. Esta órbita exibirá um comportamento convergente, a

distância entre o ponto da órbita e o "coletor" mudará pelo fator $|f'(p)| < 1$. Desse modo, se a órbita se aproxima do atrator, a pequena distância que este x_i está de p se encolhe.

Uma vez assimilados estes conceitos anteriores (de órbitas repulsoras ou atradoras) já discutidos em outras seções, podemos inferir que uma órbita caótica é essencialmente aquela que sempre continua a experimentar o comportamento instável. Mas este comportamento ocorre quando a órbita está próxima de uma fonte. Ou seja, estando próxima a uma fonte, uma órbita caótica nunca conseguiria encontrar uma bacia de atração e assim se estabilizar. Esta irregularidade é medida pelo que chamamos de parâmetros de Lyapunov, os quais são Número e Expoente - que logo definiremos.

8.2.1 Expoente de Lyapunov

Definição 8.2.1 *Seja f uma aplicação diferenciável da reta. O número de Lyapunov $L(x_1)$ da órbita $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ é definido como*

$$L(x_1) := \lim_{n \rightarrow \infty} (|f'(x_1)| \cdots |f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}} \quad (8.1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |f'(x_i)|}, \quad (8.2)$$

claro, se esse limite existir.

Definição 8.2.2 *O Expoente de Lyapunov $h(x_1)$ da órbita $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ é definido como*

$$h(x_1) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot [\ln |f'(x_1)| + \cdots + \ln |f'(x_n)|] \quad (8.3)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\ln |f'(x_i)|}{n}, \quad (8.4)$$

isto, se esse limite existir.

Observação 8.2.1 *Veja que h existe se, e somente se, L existe e não é nulo, bem como é verdade que $\ln L = h$. Números e expoentes de Lyapunov não estão definidos para algumas órbitas. Particularmente, uma órbita contendo um ponto x_i com $f'(x_i) = 0$, resultará na não existência do expoente de Lyapunov.*

Assim, estudar o Expoente de Lyapunov é estudar o desenvolvimento da teoria da estabilidade em dinâmica, e consecutivamente, entender a discussão da evolução dos sistemas e seus comportamentos. Conhecer o valor $L(x_1)$ significa poder interpretar a natureza divergente, dissipativa ou conservativa de um sistema dinâmico. Além disso, vale frisar que o Expoente de Lyapunov descreve a velocidade com a qual dois pontos próximos se aproximam ou afastam.

Tentaremos obter novamente o Expoente de Lyapunov da definição acima de maneira analítica. Veja que se pensarmos em uma aplicação f na reta e escrevermos $x_{n+1} = f(x_n)$, ao se escolher dois pontos iniciais a_0 e b_0 , com $a_0 < b_0$ sem perda de generalidade, temos que a distância entre eles será $\Delta = b_0 - a_0$. Após uma iteração de a_0 e b_0 a nova distância, no sentido orbital, entre estes é $\Delta_1 = |b_1 - a_1|$. Considere $h = h(a_0, n)$ tal que $\frac{\Delta_1}{\Delta} = e^h$. Desta forma

$$\begin{cases} \Delta_1 = f(b_0) - f(a_0) = f(a_0 + \Delta) - f(a_0) \\ \Delta_1 = e^h \cdot \Delta \end{cases}$$

Assim, $|f(a_0 + \Delta) - f(a_0)| = e^h \cdot |\Delta|$. Ao se repetir o processo n vezes, recursivamente obteremos $\Delta_n = |f^n(a_0 + \Delta) - f^n(a_0)| = e^{hn} \cdot |\Delta|$. Desse modo,

$$\ln |f^n(a_0 + \Delta) - f^n(a_0)| = \ln e^{hn} + \ln |\Delta|, \quad (8.5)$$

$$\ln \frac{|f^n(a_0 + \Delta) - f^n(a_0)|}{|\Delta|} = hn. \quad (8.6)$$

Daí,

$$h = \frac{1}{n} \ln \frac{|f^n(a_0 + \Delta) - f^n(a_0)|}{|\Delta|}.$$

Observe que se $\Delta \rightarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$, obteremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(a_0 + \Delta) - f^n(a_0)}{\Delta} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(a_0)}{da_0} \right|.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \frac{df^n(a_0)}{da_0} &= (f^n)'(a_0) = \frac{df(a_{n-1})}{da_0} \dots \frac{df(a_1)}{da_0} \cdot \frac{df(a_0)}{da_0} \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{df(a_i)}{da_0}. \end{aligned}$$

Podemos concluir que

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(a_0)}{da_0} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} \frac{df(a_i)}{da_0} \right| \quad (8.7)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(a_i)|. \quad (8.8)$$

Esta última igualdade obtida chamamos de Expoente de Lyapunov da órbita $O[a_0]$ ao longo da aplicação f .

Segue da definição que o número de Lyapunov de um ponto fixo x_1 para uma aplicação unidimensional f é $|f'(x_1)|$, ou equivalentemente, o expoente de Lyapunov da órbita é $h = \ln |f'(x_1)|$. Se x_1 é um ponto periódico de período k , então é verdade que o expoente de Lyapunov é

$$h(x_1) = \frac{\ln |f'(x_1)| + \ln |f'(x_2)| + \cdots + \ln |f'(x_k)|}{k}.$$

Infere-se que, para uma órbita periódica, o número de Lyapunov $e^{h(x_1)}$ descreve a expansão média local próxima a um ponto da órbita mediante iterações.

Observação 8.2.2 *Números e expoentes de Lyapunov são sobretudo médias. Note que o número de Lyapunov é a média geométrica dos módulos das derivadas calculadas nos n iterados de x_1 . Mas também, o expoente de Lyapunov é a média aritmética do logaritmo natural do módulo das derivadas calculadas nos n iterados de x_1 .*

Proposição 8.2.1 *Seja f uma aplicação sobre a reta real. O expoente de Lyapunov da órbita $O[x_1]$ periódica de período k é $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln |f'(x_i)|$.*

Demonstração. Pela Definição 8.2.1 $L(x_1)$ é

$$L(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \prod_{i=1}^n f'(x_i) \right|^{\frac{1}{n}}.$$

Se tomarmos n inteiro tal que $n = m \cdot k$, então para $1 \leq i \leq k$ cada derivada $f'(x_i)$ no

produtório aparece m vezes. Desse modo, podemos dizer que

$$\begin{aligned} L(x_1) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \prod_{i=1}^k f'(x_i)^m \right|^{\frac{1}{mk}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \prod_{i=1}^k f'(x_i) \right|^{\frac{1}{k}} \\ &= \left| \prod_{i=1}^k f'(x_i) \right|^{\frac{1}{k}}. \end{aligned}$$

Como $h = \ln L$, segue que

$$\begin{aligned} h(x_1) &= \ln \left| \prod_{i=1}^k f'(x_i) \right|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} \ln \left| \prod_{i=1}^k f'(x_i) \right| \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln |f'(x_i)|. \end{aligned}$$

■

Proposição 8.2.2 *Se o expoente de Lyapunov da órbita de x_1 sobre a aplicação f é h , então o expoente de Lyapunov da órbita de x_1 sobre a aplicação f^k é hk , para $k \in \mathbb{Z}_+$.*

Demonstração. Consideremos $\{x_1, x_2, \dots\}$ a órbita de x_1 ao longo de f . Desse modo, $\{x_1, x_{k+1}, x_{2k+1}, \dots\}$ é a órbita de x_1 ao longo de f^k . O número de Lyapunov L_k do último conjunto órbita é por definição

$$L_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \prod_{i=0}^n (f^k)'(x_{ik+1}) \right|^{\frac{1}{n}}.$$

Mediante aplicações recursivas da regra da cadeia, observamos que

$$(f^k)'(x_{ik+1}) = f'(f^{k-1}(x_{ik+1}))(f^{k-1}(x_{ik+1}))' = \prod_{j=0}^{k-1} f'(x_{ik+1+j}).$$

De forma consecutiva podemos escrever L_k como

$$\begin{aligned} L_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \prod_{i=0}^n \prod_{j=0}^{k-1} f'(x_{ik+1+j}) \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \prod_{i=1}^{k(n+1)} f'(x_i) \right|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left| \prod_{i=1}^{k(n+1)} f'(x_i) \right|^{\frac{1}{k(1+\frac{1}{n})n}} \right)^{k(1+\frac{1}{n})} = L^k, \end{aligned}$$

onde L é o número de Lyapunov da órbita de x_1 sobre f . Desse modo, como $h = \ln L$, se h e h_k são os expoentes de Lyapunov de x_1 sobre f e f^k , respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} h_k &= \ln L_k = \ln L^k \\ &= k \ln L = hk. \end{aligned}$$

■

Definição 8.2.3 *Seja f um difeomorfismo. Uma órbita $O[x_1] = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ é dita assintoticamente periódica se convergir a uma órbita periódica quando $n \rightarrow \infty$. Isso significa que existe uma órbita periódica $\{y_1, y_2, \dots, y_k, y_1\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$.*

Observação 8.2.3 *Órbitas as quais obedecem seqüências de Cauchy são exemplos diretos de órbitas assintóticas. Dado que uma destas órbitas é periódica então a outra deverá ser no mínimo assintoticamente periódica.*

Observação 8.2.4 *Qualquer órbita que é atraída para uma bacia é assintoticamente periódica.*

Exemplo 8.2.1 *Se $x_1 = \frac{1}{2}$, então $O[x_1]$ é assintoticamente periódica para T_2 e F_4 . Veja que para as duas aplicações, após dois iterados a órbita coincide com o ponto fixo $x = 0$.*

Observação 8.2.5 *Veja que no exemplo anterior a órbita recaiu precisamente sobre uma órbita periódica. Nestes casos, será interessante compreender a definição de órbitas assintoticamente periódicas como eventualmente periódicas.*

Teorema 8.2.1 *Seja f uma aplicação da reta. Se a órbita $O[x_1]$ de f : satisfizer $f'(x_i) \neq 0$ para todo i e for assintoticamente periódica à órbita periódica $\{y_1, y_2, \dots\}$ então as duas órbitas possuem os mesmos expoentes de Lyapunov, isto claro, supondo a existência destes limites.*

Demonstração. Lembremos do seguinte, compreendemos que uma série s pode ser decomposta como limite de somas parciais s_n , nos permitindo associar a série e sua decomposição como $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Uma vez compreendido isto, é verdade também que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i = s. \quad (8.9)$$

Consideremos por ora interpretar nosso resultado para $i = 1$. Imersos às hipóteses, temos que a órbita $O[y_1] = \{y_1\}$, isto é, y_1 será um ponto fixo. Desse modo, uma vez que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y_1$, então como f é um difeomorfismo é verdade que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = f' \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = f'(y_1).$$

Além disso, como $\ln |x|$ é contínua para $x > 0$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln |f'(x_n)| = \ln \left| \lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) \right| = \ln |f'(y_1)|. \quad (8.10)$$

As equações (8.9) e (8.10) nos permitem concluir que

$$\begin{aligned} h(x_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)| \\ &= \ln |f'(y_1)| = h(y_1). \end{aligned}$$

Façamos agora nossas interpretações para $i > 1$. Nesse contexto, y_1 não é necessariamente um ponto fixo. Por outro lado, o ponto y_1 é fixo para f^k . Logo, a órbita de x_1 é assintoticamente periódica sobre f^k convergindo à órbita de y_1 . Pelo que desenvolvemos anteriormente, podemos concluir que o expoente de Lyapunov da órbita de x_1 sobre f^k é $\ln |(f^k)'(y_1)|$. Portanto, o expoente de Lyapunov da órbita de x_1 sobre f é $\frac{1}{n} \cdot \ln |(f^k)'(y_1)| = h(y_1)$.

■

8.2.2 Órbita Caótica

Após definir o expoente de Lyapunov h de uma órbita como a média aritmética do logaritmo natural do módulos das derivadas calculadas nos n iterados de x_1 - sobretudo como expansões médias de \ln por iterados, podemos desenvolver interpretações sobre h em casos especiais, por exemplo, para um ponto fixo ou órbita periódica. E nestes determinados casos podemos expressar h em termos das derivadas, ponderar sobre a convergência de órbitas a outra órbita periódica e verificar que estas possuem o mesmo expoente de Lyapunov. Veremos a seguir nesta subseção casos de dinâmicas de órbitas interessantes, quando nossos determinados casos especiais não envolvem órbitas assintoticamente periódicas.

Definição 8.2.4 *Sejam f um difeomorfismos em \mathbb{R} e $O[x_1]$ uma órbita limitada de f . Diremos que $O[x_1]$ é uma órbita caótica se: $O[x_1]$ não for assintoticamente periódica e se o expoente de Lyapunov é maior que zero, $h(x_1) > 0$.*

Exemplo 8.2.2 *A aplicação Baker de parâmetro $\mu = 2$, B_2 , possui expoente de Lyapunov positivo nos pontos diferenciáveis - e, portanto as órbitas desses são caóticas. Tal aplicação não é contínua, e portanto não diferenciável em $x = \frac{1}{2}$. Restringindo nossa atenção às órbitas que não recaem sobre $x = \frac{1}{2}$, podemos observar que*

$$\begin{aligned} h(x_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |B_2'(x_i)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |2| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n) \ln |2|}{n} = \ln |2|. \end{aligned}$$

Portanto, todo $x \neq \frac{1}{2}$, ou melhor, toda órbita de $x_1 \in [0, 1]$ ao longo de B_2 que diverge do ponto $\frac{1}{2}$ e não é assintoticamente periódica é uma órbita caótica. Além disso, se $x_i \neq \frac{1}{2}$ para todo i , então $h(x_1) = \ln 2$.

Exemplo 8.2.3 *Sejam q um número irracional e $f(x) = (x + q)(\text{mod } 1)$ uma rotação irracional. Embora, f não seja contínua em um intervalo, já sabemos que está é em S^1 . Observe que f apenas rotaciona cada ponto por um ângulo fixo e portanto, é contínua. Do Teorema 4.2.2 concluímos*

que f não possui órbitas periódicas, e portanto não possui também órbitas assintoticamente periódicas. Além disso, pelo Teorema 4.2.3 todas as órbitas de f são densas no S^1 . No entanto, ainda assim não existem órbitas caóticas, uma vez que o expoente de Lyapunov de qualquer órbita é 0 - afinal, $\ln |f'(x_i)| = \ln 1 = 0$. Veja que

$$\begin{aligned} h(x_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |1| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{n} = 0. \end{aligned}$$

Observação 8.2.6 No exemplo anterior vimos um caso de órbita limitada a qual não era assintoticamente periódica. Quando estivermos diante desta situação e a aplicação não possuir a dependência sensível às condições iniciais diremos que esta órbita é quase-periódica.

Exemplo 8.2.4 Nas seções anteriores vimos justificativas para dizer que a aplicação tenda de parâmetro $\mu = 2$ aplicada em Λ é caótica. Neste momento, uma vez que $|T_2'(x)| = 2$ para todo $x \neq \frac{1}{2}$, é direto concluir que o expoente de Lyapunov de qualquer órbita que não recaia sobre o ponto $\frac{1}{2}$ é $\ln 2$. Desse modo, qualquer órbita que fuja do ponto $\frac{1}{2}$ e não é assintoticamente periódica é portanto caótica. Além disso, qualquer órbita assintoticamente periódica é na verdade periódica. Veja que se uma órbita é periódica então esta possui um itinerário que se repete. No caso de $T_2(\Lambda)$ (aliás, como Λ é não enumerável) há infinitos itinerários que não se repetem os quais correspondem a órbitas caóticas distintas. Desse modo, T_2 possui infinitas órbitas caóticas. É válido lembrar também que, uma vez que a derivada de $T_2^k(x)$ é 2^k , então todas as órbitas periódicas são fontes e estas não atraem nenhuma órbita.

Retomemos algumas estruturas desenvolvidas neste capítulo para exprimir o expoente de Lyapunov das órbitas da aplicação da família quadrática de parâmetro $\mu = 4$, a F_4 . Mais especificamente, estudaremos as projeções entre as órbitas de F_4 com T_2 .

A priori, considere uma órbita $O[x_1]$ ao longo de T_2 , tome também $x_i \neq 0$ para todo i . Retome a Observação 7.1.1. Dada a conjugação topológica C de F_4 e T_2 nos é fornecido uma órbita $O[C(x_1)]$ de F_4 correspondente a órbita $O[x_1]$ ao longo de T_2 . Mediante aplicações da regra da

cadeia, podemos inferir sobre as derivadas $F'_4(C(x_i))$, e desse modo então encontrar seu expoente de Lyapunov.

Ademais, como $C'(T_2(x))T'(x) = F'_4(C(x))C'(x)$. Pelo Teorema 7.1.4,

$$\begin{aligned} T'_2(x_k) \cdots T'_2(x_1) &= \frac{F'_4(C(x_k))C'(x_k)}{C'(x_{k+1})} \cdots \frac{F'_4(C(x_1))C'(x_1)}{C'(x_2)} \frac{F'_4(C(x_0))C'(x_0)}{C'(x_1)} \\ &= F'_4(C(x_k)) \cdots F'_4(C(x_0)) \frac{C'(x_0)}{C'(x_{k+1})}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \ln |T'_2(x_k) \cdots T'_2(x_1)| &= \sum_{i=1}^k \ln |T'_2(x_i)| \\ &= \ln |C'(x_0)| - \ln |C'(x_{k+1})| + \sum_{i=1}^k \ln |F'_4(C(x_i))|. \end{aligned}$$

Ao se dividir $\ln |C'(x_0)|$, uma constante, por k e tender k pro ∞ , obtemos que $\frac{\ln |C'(x_0)|}{k} \rightarrow 0$. Consideremos sobre a órbita $C(x_i)$ que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |C'(x_{k+1})|}{k} \rightarrow 0.$$

Neste contexto, é verdade que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln |T'_2(x_i)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln |F'_4(C(x_i))|.$$

Por conseguinte, isso significa que os expoentes de Lyapunov das órbitas correspondentes de T_2 e F_4 são idênticos.

Teorema 8.2.2 *A aplicação quadrática F_4 tem órbitas caóticas.*

Demonstração. Mediante conjugação topológica de F_4 com T_2 , podemos determinar os pontos periódicos da aplicação quadrática. Inclusive o conjunto dos pontos periódicos de F_4 é contável. Retome o Teorema 7.1.3. Já sabemos que todos os pontos periódicos de F_4 são repulsores e, portanto, não há nenhuma órbita além das periódicas e eventualmente periódicas. Isto é, não há

órbitas assintoticamente periódicas. Como o expoente de Lyapunov de F_4 é idêntico ao de T_2 , $\ln 2 > 0$, temos que F_4 possui órbitas caóticas.

■

CAPÍTULO 9

CONSIDERAÇÕES

Este trabalho está voltado para a pesquisa em Matemática vislumbrando a contribuição para o conhecimento e entendimento sobre a fundamentação teórica dos Sistemas Dinâmicos, essencialmente, em baixa dimensão com ênfase em Análise Real, Topologia e explanações de diversas decorrências matemáticas - como Teoremas, Proposições e Problemas.

No entanto, houve bastante dificuldade para discorrer após três anos de pesquisa, uma vez que diversas instabilidades emocionais e psicológicas foram enfrentadas neste ínterim. O que dificultou o prosseguimento contínuo do estudo. Isso posto, de modo ansioso, perto da conclusão, a teoria sempre demonstrava necessitar de mais detalhes, exposições e resultados. Embora, o orientador tenha se feito presente de forma cuidadosa durante a experiência desenvolvida neste trabalho.

Por outro lado, imerso nesse contingente buscamos intrinsecamente ao desenvolvimento deste trabalho mantermos a coesão e a estabilidade a todo instante para sua produção. Destarte, a fim de esclarecer satisfatoriamente o que fora apresentado, demandou-se a aquisição de diversas referências as quais tornariam-se essenciais ao estudo do objeto-tema, bem como a estabilidade lógica, indutiva e interpretativa acerca dos teoremas, proposições, corolários e exemplos.

Esta pesquisa vislumbra que a comunidade acadêmica (discentes) amplie seus conhecimen-

tos sobre a Teoria dos Sistemas Dinâmicos com uma introdução acessível, referenciando noções iniciais de dinâmica e caoticidade. Assim como promove entendimento sobre como as propriedades acerca de tópicos mais complexos podem ser interpretadas, desenvolvidas e demonstradas. Por fim, espera-se que este material venha refletir positivamente na compreensão sobre a Teoria dos Sistemas Dinâmicos na Graduação e práticas discente e docente.

Não obstante à conclusão, este seguinte trabalho é finalizado ainda durante a pandemia da COVID-19. Graças aos esforços de inúmeros agentes, especialmente, Deus e Ciência esta monografia pôde ser concluída.

Ao leitor, saúde e à sua família também!

REFERÊNCIAS

- [1] ABDENUR, F.; FRANÇA, L. F. N. **Hiperbolicidade, Estabilidade e Caos em Dimensão Um**. Rio de Janeiro: Publicações Matemáticas, 2007.
- [2] ALLIGOOD, K.; SAUER, T.; YORKE, J. A. **Chaos: an introduction to dynamical systems**. Nova York: Springer-Verlag, 1996.
- [3] ALVES, M. T. **O conjunto de Cantor**. Monografia (Graduado em Matemática) - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina. Santa Catarina, p. 42. 2008. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/119561>. Último acesso em: 30 de ago. de 2021.
- [4] BANKS, J; BROOKS, J; CAIRNS, G; DAVIS, G & STACEY, P. **On Devaney's Definition of Chaos**. The American Mathematical Monthly, Vol. 99, No. 4 (Apr., 1992), pp. 332-334. Disponível em: http://www.im.ufrj.br/~gelfert/cursos/2019-1-SisDin/Banks_Brooks_Cairns_Davis_Stacey_92.pdf. Último acesso em: 02 de set. 2021.
- [5] BARREIRA, L; VALLS, C. **Teoria dos Sistemas Dinâmicos: Uma Introdução**. São Paulo: Editora Livraria Física, 2012.
- [6] CASTRO JR., A. de. **Curso de teoria da medida**. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [7] DEVANEY, R. L. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**. 2. ed. Addison-Wesley, Menlo Park California: Westview Press, 2003.
- [8] _____, R. L. **Chaos, Fractal, and Dynamics: Computer Experiments in Mathematics**. Menlo Park California: Addison-Wesley, 1989.
- [9] _____, R. L. **Complex dynamical systems: the mathematics behind the Mandelbrot and Julia sets**. Proceedings of symposia in applied mathematics. vol. 49. Ohio: American Mathematical Society, 1994.

- [10] _____, R. L. **Brief Vita: Robert L. Devaney.** p. 1, 2019. Disponível em: <http://math.bu.edu/people/bob/brief-vita.html>. Último acesso em: 31 de ago. de 2021.
- [11] FIGUEIREDO, D. G. de. **Análise I.** 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.
- [12] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**, vol. 1. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- [13] GULICK, D. **Encounters with Chaos.** New York: McGraw-Hill, 1992.
- [14] HOLMGREN, R. **A First Course in Discrete Dynamical Systems.** 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1996.
- [15] ISNARD, C. **Introdução à medida e integração.** 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- [16] LIMA, E. L. **Elementos de topologia geral.** 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.
- [17] _____, E. L. **Curso de Análise**, Vol. 1, 13. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [18] LIMA, R. F. de. **Topologia e Análise do Espaço R^n .** Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [19] NASCIMENTO, M. L. do. **Semana do Infinito: alusiva a I Semana do Infinito da FACMAT.** Belém: EditAedi/UFPA, 2018.
- [20] NERI, C. M.; CABRAL, M. A. P.. **Curso de Análise Real**, V2.4, 2. ed. Rio de Janeiro: c2011.
- [21] PLAKHOTNYK, M. **Topological conjugation of one dimensional maps.** Tese (Pós-Doutorado em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. Universidade de São Paulo. São Paulo, p. 199, 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1603.06905>. Último acesso em: 30 de ago. de 2021.
- [22] ROBINSON, C. **Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos.** Boca Raton: FL: CRS Press, 1995.
- [23] _____, C. **An Introduction to Dynamical Systems Continuous and Discrete.** Person Prentice Hall, p. 652, 2004.
- [24] RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis.** New York: McGraw-Hill Science, 3rd edition, 1976.
- [25] SERRA, C. P.; KARAS, E. W. **Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos.** Curitiba: Champagnat, 1997.
- [26] VIDA Matemática #3: Índia, A Divindade dos Números. Direção de Kim Hyung-Joon. Intéprete: Nam Myong-Nyol. Roteiro: Kim Mi-ran. Tradução: Rádio e Televisão de Portugal - RTP2. Goyang: Educational Broadcasting System - EBS, 2012. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=LLrJVgZS2VQ&list=PLJTPYbWF7UmuXlWJR-bril9Hz0eheN0Br&index=3>. Último acesso em: 31 de ago. de 2021.