



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE FÍSICA

LUIZ FELIPE GARÇA RODRIGUES

DEFLEXÕES AO REDOR DE BURACOS ACÚSTICOS CANÔNICOS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

BELÉM-PA
DEZEMBRO DE 2019



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE FÍSICA

ATA DA APRESENTAÇÃO E DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO –
TCC

Ata da sessão de apresentação e defesa de Trabalho de Conclusão de Curso para concessão de grau de Licenciado Pleno em Física, realizado às 15:00h do dia 16 de Dezembro de 2019, no Auditório do Laboratório de Física - Pesquisa, cuja orientação teve início em 01 de Março de 2019 sendo intitulada: "**DEFLEXÕES AO REDOR DE BURACOS ACÚSTICOS CANÔNICOS**", contendo 48 páginas, que foi apresentado durante 30 minutos pelo discente **Luiz Felipe Garça Rodrigues**, matrícula Nº **201508140027** diante da banca examinadora aprovada pela Faculdade de Física do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará, assim constituída: Prof. Dr. *Ednilton Santos de Oliveira* (Orientador - UFPA), Prof. Dr. *André Carlos Lehum* (FACFIS - UFPA), e Prof. Dr. *Marcelo Costa de Lima* (FACFIS - UFPA). Em seguida o mesmo foi submetido à arguição, tendo demonstrado conhecimentos no tema objeto da proposta de TCC, favorecendo à banca examinadora apresentar contribuições para melhoras no desenvolvimento e decidir pelo conceito EXCELENTE do mesmo, bem como conceder o prazo máximo de 15 dias para serem efetuadas as modificações sugeridas pela banca, se for o caso, e em seguida a mesma será assinada por todos os membros. Para constar foram lavrados os termos da presente ata que lida e aprovada recebe a assinatura dos integrantes da banca examinadora e da DISCENTE.

ORIENTADOR: *Ednilton Santos de Oliveira*

EXAMINADOR 1: *[Assinatura]*

EXAMINADOR 2: *Marcelo Costa de Lima*

DISCENTE: *Luiz Felipe Garça Rodrigues*

LUIZ FELIPE GARÇA RODRIGUES

"DEFLEXÕES AO REDOR DE BURACOS ACÚSTICOS CANÔNICOS"

Monografia apresentada como requisito para obtenção do título de Licenciado Pleno em Física pela Faculdade de Física do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal Pará, submetida à apreciação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Orientador:



Prof. Dr.. Ednilton Santos de Oliveira
(FACFIS- ICEN – UFPA)

Examinador 1:



Prof. Dr. André Carlos Lehum
(FACFIS – ICEN – UFPA)

Examinador 2:



Prof. Dr. Marcelo Costa de Lima
(FACFIS – ICEN– UFPA)

Belém, 16 de Dezembro de 2019.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Ednilton Santos de Oliveira, por orientar-me desde a Iniciação Científica até este estágio final da graduação. Sou muito grato por todo conhecimento e experiência repassada e pelos conselhos que serão importantes daqui para frente.

À minha bisavó Arcelina, que me criou como um filho e me ajudou de todas as formas possíveis. Sem o suporte dela, talvez essa graduação não fosse possível. Também aos meus avós Wilson e Iná, que me apoiaram sempre que necessário.

Aos meus tios João, Wilson Jr, Marielza e Silvia, que também foram fundamentais em fornecer-me toda ajuda necessária para manter-me no curso.

À Universidade Federal do Pará (UFPA) pela oportunidade de cursar a graduação em Física.

Aos professores do curso de Física, responsáveis por grande parcela do conhecimento que adquiri ao longo desses últimos anos.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro durante a Iniciação Científica.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física (PPGF) pelo espaço no Laboratório de Física Experimental e Computacional (LFEC).

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará por conceder-me a oportunidade de realizar os estágios da graduação.

Aos meus amigos da graduação, em especial ao Nemer, João Paulo, Alex, Carinaldo, Marcílio que estiveram comigo durante essa etapa.

À Escola Municipal de Ensino Fundamental Deputado Nilson Célio Sampaio, onde estudei os primeiros anos do fundamental.

À Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Desembargador Osvaldo Brito de Farias, onde concluí os ensinamentos fundamental e médio.

A todos os meus professores do ensino básico ao médio que contribuíram para minha formação.

A todos os meus amigos e familiares que me apoiaram e me proporcionaram bons momentos.

Por fim, a Deus e a todos que contribuíram direta ou indiretamente para que eu concluísse mais esse ciclo.

RESUMO

RODRIGUES, L. F. G., *Deflexões ao redor de buracos acústicos canônicos*. 2019. 51p. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Física) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

Os buracos negros são uma consequência extraordinária da teoria da relatividade geral, previstos inicialmente pela solução de Schwarzschild, a primeira das equações de Einstein. Estes objetos são capazes de desviar consideravelmente a trajetória da luz, e até aprisioná-la, devido à forte interação gravitacional. Todavia, eles são objetos que estão longe de alcance para um estudo detalhado, de forma que modelos análogos acústicos de gravitação foram propostos pelo físico William George Unruh com o objetivo de analisar algumas propriedades de buracos negros em sistemas fluido-dinâmicos. Neste trabalho, é apresentado o estudo do *buraco acústico canônico* - análogo acústico ao buraco negro de Schwarzschild -, dando ênfase à *deflexão* de ondas sonoras causada por ele de modo a comparar com a *deflexão* da luz causada por um buraco negro de Schwarzschild. A partir das *equações da geodésica*, é analisado o comportamento da trajetória de fótons que trafegavam longe de um buraco negro e aplica-se o mesmo processo ao estudo de ondas sonoras passando longe de um *buraco acústico canônico*. Verificam-se que os ângulos de *deflexão* em ambos os casos dependem do parâmetro de impacto, além do raio do horizonte de eventos (do buraco negro ou acústico). Entretanto, o desvio na trajetória das ondas sonoras pelo buraco acústico é menor que o desvio da luz pelo buraco negro. Conclui-se que essa diferença nos desvios decorre do fato de que as geometrias são diferentes em cada caso, apesar de terem estrutura semelhante. Isso acontece porque os dois sistemas são fundamentalmente distintos.

Palavras-chave: BURACO ACÚSTICO CANÔNICO; DEFLEXÃO; EQUAÇÕES DA GEODÉSICA.

ABSTRACT

RODRIGUES, L. F. G., *Deflections around canonical acoustic holes*. 2019. 51p.
Undergraduate Monograph (Full Degree in Physics) - Federal University of Pará, Belém,
2019.

Black holes are an extraordinary consequence of the theory of general relativity, first predicted by Schwarzschild's solution, the first of Einstein's equations. These objects are able to considerably deviate the light path and even trap it due to their strong gravitational interaction. However, they are objects that are far out of reach for detailed study, so that acoustic analog models of gravitation have been proposed by the physicist William George Unruh in order to analyze some properties of black holes in fluid-dynamic systems. In this monograph, the study of the *canonical acoustic hole* - acoustic analogue to Schwarzschild's black hole - is presented, focusing in the *deflection* of sound waves caused by it in order to compare with the light *deflection* caused by a Schwarzschild black hole. From the *geodesic equations*, the trajectory behavior of photons traveling far from a black hole is analyzed and the same process is applied to the study of sound waves passing far from a *canonical acoustic hole*. *Deflection* angles in both cases are found to depend on the impact parameter, in addition to the event horizon radius (of the black or acoustic hole). However, the deviation in the sound wave path by the acoustic hole is smaller than the deviation of light by the black hole. It is concluded that this difference in the deviations stems from the fact that the geometries are different from each other, despite having a similar structure. This is a consequence of the fact that both systems are fundamentally distinct.

Keywords: CANONICAL ACOUSTIC HOLE; DEFLECTION; GEODETIC EQUATIONS.

Sumário

1	Introdução	8
2	Ferramental Matemático da Relatividade Geral	11
2.1	Variedades	11
2.1.1	Transformações de coordenadas	12
2.1.2	Convenção de soma	13
2.2	Cálculo Vetorial Sobre Variedades	14
2.2.1	Espaço tangente e vetores de base	14
2.2.2	Vetores de base e transformação de coordenadas	15
2.2.3	Relação da conexão e a métrica	16
2.2.4	Derivada covariante de um vetor	18
2.2.5	Derivada intrínseca de um vetor ao longo de uma curva	20
2.2.6	Transporte paralelo	22
2.2.7	Curvas nulas, curvas não-nulas e parâmetros afins	23
2.2.8	Geodésicas	24
2.2.9	Procedimento lagrangiano para geodésicas	25
2.3	Cálculo Tensorial Sobre Variedades	26
2.3.1	Tensor métrico	26
2.3.2	Tensores como objetos geométricos	27
2.3.3	Tensores e transformações de coordenadas	28
2.3.4	O teorema do quociente	29
2.3.5	Derivada covariante de um tensor	30
3	O Princípio da Equivalência e a Curvatura do Espaço-Tempo	34
3.1	O Princípio da Equivalência	34
3.2	A Gravidade como Curvatura do Espaço-Tempo	34
3.3	O Tensor de Curvatura	35
4	O Buraco Acústico Canônico	38
4.1	Geodésicas	39
4.2	Deflexões	42
4.2.1	Deflexão da luz	43
4.2.2	Deflexão de ondas sonoras	45
5	Conclusão	49

Capítulo 1

Introdução

Pouco antes da passagem do século XIX para o século XX, a grande maioria dos cientistas da época acreditava que a física já era uma ciência completa, sem nada mais de significativo a ser descoberto. Contudo, com a publicação de um artigo intitulado **Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento** [1], no ano de 1905, o físico alemão Albert Einstein veio mudar radicalmente essa visão, mostrando como a natureza ainda tinha muitos mistérios a serem desvendados. A partir de dois postulados, Einstein revolucionou significativamente a ciência, apresentando assim sua **teoria da relatividade restrita**.

O primeiro postulado dessa teoria afirma que **as leis da física são invariantes para referenciais inerciais**, ou seja, as leis que usamos para descrever os fenômenos naturais não se alteram quando mudamos de referencial inercial. O segundo postulado nos diz que **a velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c em todos os referenciais inerciais**, de forma que a velocidade da luz é uma constante física que mantém sempre o mesmo valor, não importando o referencial inercial [2]. A partir disso, Einstein verificou que a mecânica clássica de Newton passava a falhar em situações que envolviam velocidades muito altas, de modo que foi necessário reformular matematicamente certas leis.

A relatividade restrita, contudo, não abordava os fenômenos gravitacionais e se limitava apenas ao espaço-tempo plano de Minkowski. Dessa forma, Einstein publicou, em 1915, sua **teoria da relatividade geral**, tendo como base o princípio da equivalência, a qual considerava as influências gravitacionais devido à presença de corpos massivos. Como consequência disso, passou-se a tratar o espaço-tempo como curvo. Isto se deve ao fato de que **a interação gravitacional é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo devido à presença de matéria/energia** [3], como foi proposto por ele em sua generalização da teoria relativística.

O papel de descrever a relação entre a curvatura do espaço-tempo e a presença de matéria/energia é feito pelas equações de Einstein. Contudo, ele não acreditava que suas equações pudessem ter qualquer solução exata, encontrando apenas uma solução aproximada para as mesmas. Todavia, foi provado o contrário no ano seguinte, em 1916, quando Karl Schwarzschild, físico e astrônomo alemão, conseguiu determinar a primeira solução exata das equações de Einstein. A solução encontrada por ele aplicava-se ao espaço vazio ao redor de uma massa estática e esfericamente simétrica, que recebeu o nome de **geometria de Schwarzschild**, em sua homenagem. Entretanto, essa solução conduziu a um resultado totalmente novo: quando um objeto massivo¹ sofria um colapso gravitacional, sua matéria poderia se concentrar em uma região cada vez menor, de modo a chegar a um tamanho limite, que foi chamado de **raio de Schwarzschild**. Uma estrela estática com um raio menor que este limite torna-se um **buraco negro de Schwarzschild**, que é uma região de espaço-tempo onde a intensidade da atração gravitacional é tão alta que nem mesmo a luz é capaz de vencê-la [3].

O buraco negro de Schwarzschild possui uma região chamada horizonte de eventos, que tem uma velocidade de escape superior à da luz² e no centro dessa região existe um ponto, chamado de **singularidade**. A singularidade é como se fosse um “furo” no espaço-tempo, um sorvedouro de matéria e energia, que suga tudo que entre em seu horizonte. Assim, qualquer objeto que adentra o horizonte de eventos, inclusive a luz, não consegue escapar dele e simplesmente é guiado à singularidade.

O estudo dos buracos negros, então, evoluiu gradativamente com o passar das décadas. Todavia, realizar experimentações para isso é praticamente inviável em alguns casos, dada nossa tecnologia e limitações, de modo que isso motivou a proposição de modelos semelhantes e mais viáveis de verificar experimentalmente. Assim, em 1981, o físico canadense William George Unruh propôs a área de análogos acústicos gravitacionais [4]. Dentro dessa área é prevista a existência dos **buracos acústicos canônicos** [5], que são os equivalentes acústicos dos buracos negros de Schwarzschild.

Neste trabalho, analisamos a dinâmica de geodésicas para determinar as deflexões ao redor de buracos acústicos canônicos. Nosso objetivo é expor como aplicar as equações da geodésica a um sistema que seja muito semelhante ao modelo do buraco negro de Schwarzschild, de modo a correlacioná-los e verificar o comportamento das geodésicas em ambos os casos. Vale destacar que neste texto não pretendemos demonstrar como se obtém a métrica do buraco acústico canônico, mas, conhecida a métrica, analisar o comportamento de geodésicas nesta geometria. No capítulo 2, realizamos uma abordagem detalhada sobre a matemática da relatividade geral, com atenção especial às equações da geodésica. No capítulo 3, apresentamos o princípio da equivalência e a ideia sobre a curvatura do espaço-tempo, além de como mensurá-la. No capítulo 4, descrevemos

¹Tal como uma estrela.

²Por isso esses objetos são chamados de buracos negros, pois nem mesmo a luz escapa deles.

o buraco acústico canônico e apresentamos os cálculos das deflexões, tanto para a luz quanto para o som, de modo a comparar ambos os resultados. Por fim, no capítulo 5, concluímos comparando os resultados obtidos para os casos de deflexão, destacando suas similaridades e diferenças, além de sua importância.

Capítulo 2

Ferramental Matemático da Relatividade Geral

Neste capítulo vamos abordar de forma sucinta a estrutura matemática necessária ao estudo da relatividade geral, verificando os principais aspectos e resultados.

2.1 Variedades

A partir do estudo da teoria da relatividade restrita, foi possível constatar que o nosso modelo físico de mundo é tal como uma variedade quadridimensional contínua, conhecida como *espaço-tempo*, no qual vigora a *geometria de Minkowski*. Este é um exemplo de *variedade* [3]. A partir de agora, iremos analisar detalhadamente suas propriedades gerais, concentrando nosso estudo em variedades *Riemannianas*, essenciais na relatividade geral para representar o espaço-tempo curvo.

Podemos definir uma variedade como sendo **qualquer conjunto que possa ser continuamente parametrizado**. Em outras palavras, ela nada mais é que o **strato** no qual os eventos ocorrem. É importante ressaltar que o número de parâmetros independentes nos fornecem a dimensão da variedade, de modo que os próprios parâmetros são as coordenadas dela. Um exemplo pode ser dado pelo espaço de fase de uma partícula, na mecânica clássica, que pode ser parametrizado por três coordenadas de posição (q_1, q_2, q_3) e três coordenadas de momento (p_1, p_2, p_3) , de modo que é formado um espaço de seis dimensões [3].

A forma mais primitiva de uma variedade é representada, simplesmente, por uma coleção *amorfa* de pontos. No entanto, a maioria das variedades que utilizamos na física são do tipo **diferenciais**, que são contínuas e diferenciáveis sob as seguintes condições:

- Uma variedade é contínua se, na vizinhança de todos os pontos P , existem outros pontos cujas coordenadas diferem infinitesimalmente das coordenadas de P ;

- Uma variedade é diferenciável se for possível definir um campo escalar em cada ponto dela, no qual esse campo pode ser diferenciado em toda parte.

Quando realizamos a associação dos pontos de uma variedade com os valores de seus respectivos parâmetros, podemos pensar nisso como um *mapeamento* de seus pontos em pontos do espaço \mathbb{R}^n . Dessa forma, isso nos diz que, “localmente”, uma variedade parece o espaço Euclidiano correspondente, de modo que ela é “suave” e tem um certo número de coordenadas [3].

2.1.1 Transformações de coordenadas

Quando se deseja determinar um ponto em uma variedade, utilizamos um sistema de N coordenadas, sabendo que a escolha dessas coordenadas é arbitrária. Neste caso, o que importa não é como classificamos os pontos, mas eles propriamente ditos, assim como seu comportamento geométrico.

Portanto, podemos tratar os pontos em uma variedade de outra forma realizando uma simples transformação $x^a \rightarrow x'^a$, que será expressa por N equações do tipo:

$$x'^a = x'^a(x^1, x^2, \dots, x^N) \quad (a = 1, 2, \dots, N), \quad (2.1)$$

que fornece cada nova coordenada com sendo uma função das coordenadas antigas. Assim, podemos observar que uma transformação de coordenadas nada mais é que atribuir as novas coordenadas (x'^1, \dots, x'^N) para um ponto cujas coordenadas anteriormente eram (x^1, \dots, x^N) .

Agora vamos considerar que as funções presentes na equação (2.1) são de valor único, contínuas e diferenciáveis sobre os intervalos nos quais se encontram seus argumentos. Dessa forma, diferenciando cada expressão na equação (2.1) com relação a cada uma das antigas coordenadas x^b , devemos obter $N \times N$ derivadas parciais do tipo $(\partial x'^a / \partial x^b)$. Estas derivadas podem ser arranjadas em uma **matriz de transformação** de ordem $N \times N$, de modo que obtemos:

$$\left[\frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial x'^1}{\partial x^N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x'^N}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial x'^N}{\partial x^N} \end{pmatrix},$$

na qual as linhas são determinadas pelo índice no numerador da derivada parcial e as colunas são indicadas pelo índice no denominador. É importante ressaltar que os elementos da matriz de transformação são funções das coordenadas, de modo que seus valores numéricos são, geralmente, distintos quando avaliados em diferentes pontos. De qualquer maneira, o determinante dessa matriz, que chamamos de **Jacobiano** da transformação, é dado por:

$$J = \det \left[\frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \right].$$

Caso $J \neq 0$ em algum intervalo de coordenadas x^b , segue que nesta região é possível, a princípio, solucionar as equações (2.1) para as coordenadas originais x^b , de modo a obter as equações de **transformação inversa**:

$$x^a = x^a(x'^1, x'^2, \dots, x'^N) \quad (a = 1, 2, \dots, N).$$

Por outro lado, também podemos obter a matriz da transformação inversa, que é dada como:

$$\left[\frac{\partial x^a}{\partial x'^b} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x'^N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^N}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial x^N}{\partial x'^N} \end{pmatrix},$$

e também o Jacobiano da transformação inversa, expresso por:

$$J' = \det \left[\frac{\partial x^a}{\partial x'^b} \right].$$

2.1.2 Convenção de soma

Podemos observar que diversas vezes as equações podem ficar um pouco carregadas com a presença de muito termos. Entretanto, é possível simplificar as notações adotando a **convenção de soma de Einstein**, que é definida da seguinte forma: *toda vez que um índice aparecer duas vezes, uma como subscrito e outra como sobrescrito, então isso implica que há uma soma sobre os índices de 1 a N, a dimensão da variedade*. Assim, se tivermos a seguinte soma:

$$dx'^a = \sum_{b=1}^N \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b,$$

ela pode ser escrita simplesmente como:

$$dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b.$$

O índice a que aparece em cada lado desta equação é denominado um índice **livre**, o qual pode assumir qualquer valor de 1 a N . Ainda, se um sobrescrito aparece no denominador de uma derivada parcial, devemos considerá-lo como subscrito, e vice-versa. Dessa forma, o índice b que está no lado direito da equação aparece uma vez como subscrito e outra como sobrescrito, de modo que há uma soma de 1 a N sobre ele. Quando um índice é submetido a uma soma desse tipo, denominamos ele como índice **mudo**, pois o mesmo pode ser trocado por qualquer outro índice que não esteja sendo utilizado, de

modo que não há qualquer alteração nos resultados finais. Assim, poderíamos escrever:

$$\frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} dx^c.$$

Vale ressaltar que o uso da convenção de soma exige que um índice não deve aparecer mais de duas vezes e também que qualquer índice que esteja repetido deve se manifestar uma vez como sobrescrito e outra como subscrito.

2.2 Cálculo Vetorial Sobre Variedades

Agora iremos abordar os pontos mais importantes sobre as operações vetoriais que podemos aplicar sobre as variedades, analisando sucintamente e destacando os detalhes mais essenciais.

2.2.1 Espaço tangente e vetores de base

Um campo vetorial que está definido sobre uma variedade, atribui um único vetor para cada ponto P nela. Neste ponto, podemos definir o que chamamos de **vetor local**. Este segue todas as regras usuais da álgebra dos vetores da geometria (pseudo-)Euclidiana. O **espaço tangente** T_P é formado pelo conjunto de todos os vetores locais em um ponto P arbitrário.

Vale ressaltar que em cada ponto P de uma variedade, um vetor estará definido no espaço tangente a esse ponto. Esse vetor, sendo uma entidade geométrica, é independente do sistema de coordenadas usado na variedade. De qualquer forma, em cada ponto podemos definir um conjunto de **vetores de base** \mathbf{e}_a para o espaço tangente T_P . Assim, qualquer vetor pode ser expresso como uma combinação linear desses vetores de base, com a exigência de que sejam linearmente independentes. Portanto, o campo vetorial $\mathbf{v}(x)$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{v}(x) = v^a(x) \mathbf{e}_a,$$

em que $v^a(x)$ são as **componentes contravariantes** do campo $\mathbf{v}(x)$ na base \mathbf{e}_a . Por outro lado, podemos definir um outro conjunto de vetores de base, conhecidos como **vetores de base dual** $\mathbf{e}^a(x)$. Em qualquer ponto P os vetores de base se relacionam por:

$$\mathbf{e}^a(x) \cdot \mathbf{e}_b(x) = \delta_b^a, \tag{2.2}$$

na qual \mathbf{e}^a e \mathbf{e}_b formam sistemas de vetores *recíprocos*. É importante destacar que os vetores de base dual também estão no espaço tangente ao ponto P , de modo que formam

uma base alternativa para o mesmo. Assim, o mesmo campo vetorial $\mathbf{v}(x)$ também pode ser expresso como:

$$\mathbf{v}(x) = v_a(x)\mathbf{e}^a(x),$$

em que $v_a(x)$ são as **componentes covariantes** de $\mathbf{v}(x)$ na base $\mathbf{e}^a(x)$. Dessa forma, agora podemos analisar como se comportam esses vetores de base sob uma mudança de coordenadas.

2.2.2 Vetores de base e transformação de coordenadas

Vamos considerar uma transformação de coordenadas do tipo $x^a \rightarrow x'^a$ sobre uma variedade. Existe uma relação simples entre os vetores de base coordenada \mathbf{e}_a e os \mathbf{e}'_a , que estão associados aos sistemas de coordenadas x^a e x'^a , respectivamente. Tal relação pode ser encontrada se considerarmos o vetor deslocamento infinitesimal ds entre dois pontos próximos P e Q . Vale lembrar que este deslocamento não depende do sistema de coordenadas em uso, de modo que:

$$ds = dx^a \mathbf{e}_a = dx'^a \mathbf{e}'_a.$$

É importante ressaltar que o comprimento do vetor deslocamento, denotado por ds , é o **intervalo**¹ infinitesimal entre dois pontos vizinhos P e Q .

Observe que $dx^a = (\partial x^a / \partial x'^b) dx'^b$, de modo que em qualquer ponto P os dois conjuntos de vetores de base coordenada se relacionam por:

$$\mathbf{e}'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \mathbf{e}_b, \quad (2.3)$$

do qual a derivada parcial é avaliada no ponto P . Por outro lado, para os vetores de base dual, temos que:

$$\mathbf{e}'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \mathbf{e}^b. \quad (2.4)$$

Utilizando as equações (2.3) e (2.4), podemos determinar como as componentes de um vetor geral \mathbf{v} mudam sob uma determinada transformação de coordenadas. Como o vetor é uma entidade geométrica independente do sistema de coordenadas, então:

$$\mathbf{v} = v^a \mathbf{e}_a = v'^a \mathbf{e}'_a.$$

Assim, podemos mostrar que as novas componentes covariantes do vetor são:

¹Isto será importante para entender sobre curvas nulas e não-nulas, que serão apresentadas na subseção (2.2.6).

$$v'_a = \mathbf{e}'_a \cdot \mathbf{v},$$

$$v'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \mathbf{e}_b \cdot \mathbf{v},$$

$$v'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} v_b.$$

Por outro lado, partindo do mesmo processo, as novas componentes contravariantes devem ser dadas por:

$$v'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} v^b.$$

2.2.3 Relação da conexão e a métrica

Primeiramente, tomando qualquer sistema de coordenadas arbitrário x^a sobre a variedade, vamos considerar os vetores de base \mathbf{e}_a em dois pontos próximos P e Q , ambos com coordenadas x^a e $x^a + \delta x^a$, respectivamente. Os vetores de base no ponto Q deverão diferir infinitesimalmente destes em P , de modo que:

$$\mathbf{e}_a(Q) = \mathbf{e}_a(P) + \delta \mathbf{e}_a.$$

A derivada parcial dos vetores de base é dada por $\delta \mathbf{e}_a / \delta x^c$, no limite $\delta x^c \rightarrow 0$. Entretanto, geralmente o vetor resultante não está no espaço tangente à variedade, no ponto P . Sendo assim, vamos definir a derivada, na variedade, dos vetores de base coordenada projetando no espaço tangente em P , de modo que:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_a}{\partial x^c} \equiv \left(\lim_{\delta x^c \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{e}_a}{\delta x^c} \right)_{\parallel T_P}. \quad (2.5)$$

Dessa forma, podemos expandir esta derivada vetorial em termos dos vetores de base $\mathbf{e}_a(P)$ no ponto P . Assim, temos:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_a}{\partial x^c} = \Gamma^b_{ac} \mathbf{e}_b, \quad (2.6)$$

na qual os N^3 coeficientes Γ^b_{ac} são conhecidos como a **conexão afim** ou **símbolo de Christoffel**, no ponto P . Aplicando o produto escalar da equação (2.6) com os vetores de base dual \mathbf{e}^b e usando a relação de reciprocidade na equação (2.2), a conexão afim também pode ser reescrita como²:

²Aqui denotamos a derivada parcial com relação a x^c apenas por ∂_c e iremos adotar isso daqui em diante.

$$\Gamma^b_{ac} = \mathbf{e}^b \cdot \partial_c \mathbf{e}_a. \quad (2.7)$$

Em uma variedade Riemanniana geral, os termos da conexão afim Γ^b_{ac} e Γ^b_{ca} não são iguais. Isso ocorre porque em uma variedade mais geral, os coeficientes da conexão afim compõem o **tensor de torção**, expresso por:

$$T^b_{ac} = \Gamma^b_{ac} - \Gamma^b_{ca}. \quad (2.8)$$

A torção nos mostra a existência de uma anti-simetria da conexão afim nos seus dois últimos índices.

Para fins de praticidade, vamos considerar variedades que são *sem torção*, de modo que o tensor de torção³, em qualquer sistema de coordenadas, é dado por:

$$T^b_{ac} = 0.$$

Sendo assim, podemos assumir que a conexão afim é simétrica em seus dois últimos índices, ou seja:

$$\Gamma^b_{ac} = \Gamma^b_{ca}. \quad (2.9)$$

Assim, esta equação é satisfeita para uma variedade que é sem torção. Por conta deste fato, existe uma relação entre a conexão afim Γ^b_{ac} e as funções métricas g_{ab} . Para determinar essa relação, vamos tomar a definição da métrica:

$$g_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b.$$

Diferenciando esta equação com relação a x^c , obtemos:

$$\partial_c g_{ab} = (\partial_c \mathbf{e}_a) \cdot \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_a \cdot (\partial_c \mathbf{e}_b),$$

$$\partial_c g_{ab} = \Gamma^d_{ac} \mathbf{e}_d \cdot \mathbf{e}_b + \Gamma^d_{bc} \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_d,$$

de modo que:

$$\partial_c g_{ab} = \Gamma^d_{ac} g_{db} + \Gamma^d_{bc} g_{ad}. \quad (2.10)$$

Realizando uma permutação cíclica dos índices a , b e c , obtemos as seguintes expressões equivalentes:

$$\partial_b g_{ca} = \Gamma^d_{cb} g_{da} + \Gamma^d_{ab} g_{cd},$$

³Na seção (2.3), os tensores e suas operações serão abordados detalhadamente.

$$\partial_a g_{bc} = \Gamma_{ba}^d g_{dc} + \Gamma_{ca}^d g_{bd}.$$

Tomando estas três expressões, podemos combiná-las e formar o seguinte resultado:

$$\partial_c g_{ab} + \partial_b g_{ca} - \partial_a g_{bc} = \Gamma_{ac}^d g_{db} + \Gamma_{bc}^d g_{ad} + \Gamma_{cb}^d g_{da} + \Gamma_{ab}^d g_{cd} - \Gamma_{ba}^d g_{dc} - \Gamma_{ca}^d g_{bd}.$$

Contraindo esta expressão com g^{ea} e lembrando da relação de reciprocidade, dada por $g^{ea} g_{ad} = \delta_d^e$, obtemos então:

$$g^{ea} (\partial_c g_{ab} + \partial_b g_{ca} - \partial_a g_{bc}) = g^{ea} (\Gamma_{ac}^d g_{db} + \Gamma_{bc}^d g_{ad} + \Gamma_{cb}^d g_{da} + \Gamma_{ab}^d g_{cd} - \Gamma_{ba}^d g_{dc} - \Gamma_{ca}^d g_{bd}),$$

$$g^{ea} (\partial_c g_{ab} + \partial_b g_{ca} - \partial_a g_{bc}) = \Gamma_{bc}^d \delta_d^e + \Gamma_{cb}^d \delta_d^e,$$

$$g^{ea} (\partial_b g_{ac} + \partial_c g_{ba} - \partial_a g_{cb}) = \Gamma_{bc}^d \delta_d^e + \Gamma_{bc}^d \delta_d^e,$$

$$g^{ae} (\partial_b g_{ec} + \partial_c g_{be} - \partial_e g_{cb}) = \Gamma_{bc}^d \delta_d^e + \Gamma_{bc}^d \delta_d^e,$$

$$g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{cb}) = 2\Gamma_{bc}^d,$$

portanto:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{cb}). \quad (2.11)$$

O resultado obtido no lado direito desta equação é conhecido como *conexão métrica*, frequentemente denotada pelo símbolo $\{^a_{bc}\}$ ⁴. A partir da equação (2.11), podemos determinar a conexão em qualquer ponto de uma variedade. Para isso, basta conhecer a métrica, em qualquer sistema de coordenadas.

2.2.4 Derivada covariante de um vetor

Vamos assumir que um campo vetorial $\mathbf{v}(x)$ é definido sobre qualquer região de uma variedade. Agora desejamos determinar a derivada deste campo vetorial com relação às coordenadas que estão aplicadas à variedade. Primeiro, devemos começar escrevendo o campo vetorial em termos de suas componentes covariantes:

⁴Como estamos trabalhando em uma variedade sem torção, as conexões afim e métrica são equivalentes, de modo que chamaremos apenas de *conexão* daqui em diante.

$$\mathbf{v} = v_a \mathbf{e}^a,$$

de modo que:

$$\partial_b \mathbf{v} = (\partial_b v_a) \mathbf{e}^a + v_a (\partial_b \mathbf{e}^a). \quad (2.12)$$

É importante ressaltar que o segundo termo do lado direito da equação aparece porque os vetores de base variam com a posição, em um sistema de coordenadas arbitrário, de modo que não podemos negligenciá-los. Utilizando o resultado:

$$\partial_b \mathbf{e}^a = -\Gamma^a_{cb} \mathbf{e}^c.$$

Podemos reescrever a equação (2.12) como:

$$\partial_b \mathbf{v} = (\partial_b v_a) \mathbf{e}^a - v_a \Gamma^a_{cb} \mathbf{e}^c.$$

Vale destacar que a e c são índices mudos no último termo do lado direito da expressão acima, de modo que podemos trocá-los. Assim, temos que:

$$\partial_b \mathbf{v} = (\partial_b v_a) \mathbf{e}^a - v_c \Gamma^c_{ab} \mathbf{e}^a,$$

$$\partial_b \mathbf{v} = (\partial_b v_a - v_c \Gamma^c_{ab}) \mathbf{e}^a.$$

O motivo de ter trocado os índices mudos, é que agora podemos fatorar \mathbf{e}^a . Dessa forma, para qualquer ponto P , possuímos uma equação para determinar a derivada do campo vetorial em relação às coordenadas, **em termos dos vetores de base do sistema de coordenadas no ponto P**. O resultado entre parênteses é conhecido como a **derivada covariante** das componentes covariantes vetoriais, a qual é denotada por:

$$\nabla_b v_a = \partial_b v_a - \Gamma^c_{ab} v_c. \quad (2.13)$$

Portanto, a derivada do campo vetorial \mathbf{v} pode ser representada simplesmente como:

$$\partial_b \mathbf{v} = (\nabla_b v_a) \mathbf{e}^a.$$

Procedendo de modo similar, podemos também determinar a derivada covariante das componentes contravariantes do campo vetorial \mathbf{v} . Sendo assim, temos:

$$\partial_b \mathbf{v} = (\partial_b v^a + v^c \Gamma^a_{cb}) \mathbf{e}_a,$$

de modo que:

$$\nabla_b v^a = \partial_b v^a + \Gamma^a_{cb} v^c. \quad (2.14)$$

Portanto, a derivada do campo vetorial, em termos das componentes contravariantes, é dada compactamente por:

$$\partial_b \mathbf{v} = (\nabla_b v^a) \mathbf{e}_a.$$

Comparando as equações (2.13) e (2.14), podemos observar alguns detalhes similares e algumas diferenças. Uma diferença importante é com relação ao sinal do segundo termo no lado direito das equações, que é positivo para as componentes contravariantes e negativo para as componentes covariantes.

2.2.5 Derivada intrínseca de um vetor ao longo de uma curva

Geralmente, os campos vetoriais são dados como funções das coordenadas x^a , que estão definidas sobre alguma parte da variedade. Entretanto, podemos ter o caso de um campo vetorial que esteja definido somente em algum subespaço da variedade, que pode ser exemplificado por um campo $\mathbf{v}(u)$ definido apenas ao longo de uma curva $x^a(u)$ que está na variedade. Sendo assim, vamos agora determinar a derivada de um campo vetorial com relação ao parâmetro u ao longo dessa curva.

Primeiramente, vamos definir um campo vetorial, em qualquer ponto, ao longo de uma curva \mathcal{C} :

$$\mathbf{v}(u) = v_a(u) \mathbf{e}^a(u), \quad (2.15)$$

do qual os $\mathbf{e}^a(u)$ são os vetores de base coordenada no ponto sobre a curva, que corresponde ao valor do parâmetro u . Dessa forma, a derivada deste campo \mathbf{v} ao longo da curva \mathcal{C} é dada por:

$$\frac{d\mathbf{v}}{du} = \frac{dv_a}{du} \mathbf{e}^a + v_a \frac{d\mathbf{e}^a}{du},$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{du} = \frac{dv_a}{du} \mathbf{e}^a + v_a \frac{\partial \mathbf{e}^a}{\partial x^c} \frac{dx^c}{du},$$

em que aplicamos a regra da cadeia no último termo do lado direito da equação. Vale ressaltar que este procedimento é válido, pois os vetores de base \mathbf{e}^a estão definidos fora da curva \mathcal{C} . Agora, podemos escrever as derivadas dos vetores de base em termos da conexão, de modo que:

$$\frac{d\mathbf{v}}{du} = \frac{dv_a}{du} \mathbf{e}^a - v_a \Gamma^a_{bc} \mathbf{e}^b \frac{dx^c}{du},$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{du} = \frac{dv_a}{du} \mathbf{e}^a - \Gamma^a_{bc} v_a \frac{dx^c}{du} \mathbf{e}^b.$$

Trocando os índices mudos a e b no último termo do lado direito da equação, obtemos:

$$\frac{d\mathbf{v}}{du} = \frac{dv_a}{du} \mathbf{e}^a - \Gamma^b_{ac} v_b \frac{dx^c}{du} \mathbf{e}^a.$$

Portanto:

$$\frac{d\mathbf{v}}{du} = \left(\frac{dv_a}{du} - \Gamma^b_{ac} v_b \frac{dx^c}{du} \right) \mathbf{e}^a \equiv \frac{Dv_a}{Du} \mathbf{e}^a. \quad (2.16)$$

O termo que se encontra entre parênteses é denominado a derivada **intrínseca** das componentes covariantes v_a ao longo da curva \mathcal{C} , que é denotada simplesmente por Dv_a/Du .

Assim, podemos utilizar o mesmo procedimento para determinar a derivada intrínseca das componentes contravariantes v^a do campo, de modo que:

$$\frac{Dv^a}{Du} = \frac{dv^a}{du} + \Gamma^a_{bc} v^b \frac{dx^c}{du}. \quad (2.17)$$

Agora que obtemos estes resultados, podemos realizar a diferenciação das componentes v_a com relação às coordenadas x^a . Dessa forma, escrevendo:

$$\frac{dv_a}{du} = \frac{\partial v_a}{\partial x^c} \frac{dx^c}{du},$$

e substituindo esta expressão na equação (2.16), temos:

$$\frac{Dv_a}{Du} = \frac{\partial v_a}{\partial x^c} \frac{dx^c}{du} - \Gamma^b_{ac} v_b \frac{dx^c}{du},$$

$$\frac{Dv_a}{Du} = \left(\frac{\partial v_a}{\partial x^c} - \Gamma^b_{ac} v_b \right) \frac{dx^c}{du},$$

do qual podemos identificar o termo entre parênteses como sendo a derivada covariante. Assim, para as componentes covariantes, obtemos que:

$$\frac{Dv_a}{Du} = (\nabla_c v_a) \frac{dx^c}{du}. \quad (2.18)$$

Realizando o mesmo procedimento para as componentes contravariantes, temos:

$$\frac{Dv^a}{Du} = (\nabla_c v^a) \frac{dx^c}{du}. \quad (2.19)$$

2.2.6 Transporte paralelo

Novamente, vamos considerar alguma curva \mathcal{C} na variedade, parametrizada por um sistema de coordenadas geral $x^a(u)$. Também vamos considerar um ponto inicial \mathcal{O} na curva, com parâmetro u_0 , onde o vetor \mathbf{v} está definido. Agora vamos pensar no *transporte* do campo \mathbf{v} ao longo da curva, de modo que temos:

$$\frac{d\mathbf{v}}{du} = \mathbf{0}, \quad (2.20)$$

sendo esta expressão satisfeita em cada ponto dado ao longo da curva. Dessa forma, o que temos é um **campo de vetores paralelos em cada ponto ao longo da curva \mathcal{C}** , do qual este campo é gerado pelo **transporte paralelo** de \mathbf{v} .

É possível interpretar geometricamente o transporte paralelo de um vetor \mathbf{v} em uma variedade (pseudo-)Euclidiana como sendo um transporte sem qualquer mudança de direção ou comprimento. Isso pode ser ilustrado para uma curva \mathcal{C} em uma variedade Euclidiana bidimensional, como mostra a figura 2.1.

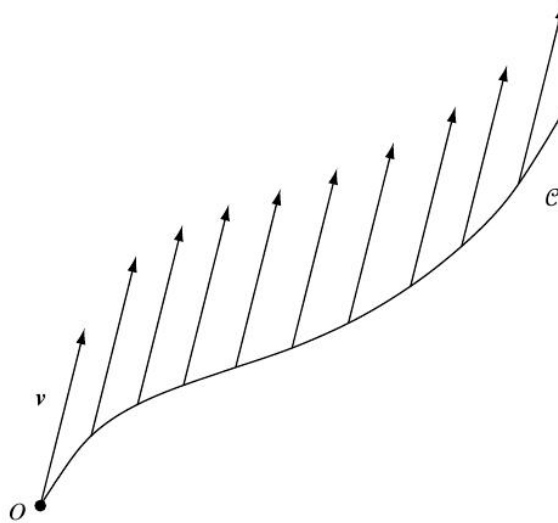


Figura 2.1: Transporte paralelo do vetor \mathbf{v} [3].

Se estamos trabalhando com coordenadas x^a que são Cartesianas, então é direto saber que as *componentes* v_a do campo vetorial satisfazem:

$$\frac{dv_a}{du} = 0. \quad (2.21)$$

Por outro lado, em um sistema de coordenadas arbitrário no plano, vale ressaltar que a equação (2.21) deixa de ser válida, de modo que ela deve ser generalizada para:

$$\frac{Dv_a}{Du} \equiv \frac{dv_a}{du} - \Gamma^b_{ac} v_b \frac{dx^c}{du} = 0. \quad (2.22)$$

2.2.7 Curvas nulas, curvas não-nulas e parâmetros afins

Quando trabalhamos com variedades (pseudo-)Riemannianas, é essencial distinguir entre curvas que são nulas e não-nulas. Definindo de forma simples, **as curvas nulas são aquelas no qual o intervalo ds entre quaisquer dois pontos próximos tem forma nula**. Por outro lado, **as curvas não-nulas têm o intervalo ds entre dois pontos próximos diferente de zero**. Outro modo de distinguir entre os dois tipos de curvas é a partir dos vetores tangentes, que nos leva a uma classe de parâmetros privilegiados, que são conhecidos como **parâmetros afins**, os quais servem para definir as curvas.

Vamos considerar uma curva $x^a(u)$, definida em uma variedade geral. Como sabemos, o vetor tangente \mathbf{t} à curva, em algum ponto P , é definido pela equação:

$$\mathbf{t} = \lim_{\delta u \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta u}.$$

Dessa forma, tomando um sistema de coordenadas qualquer, podemos escrever o seguinte: $\delta \mathbf{s} = \mathbf{e}_a \delta x^a$, do qual os \mathbf{e}_a são os vetores de base coordenada no ponto P . Daí, temos que:

$$\mathbf{t} = \frac{dx^a}{du} \mathbf{e}_a. \quad (2.23)$$

Daqui, podemos verificar que o comprimento do vetor tangente \mathbf{t} é dado por:

$$|\mathbf{t}| = |g_{ab} t^a t^b|^{1/2},$$

$$|\mathbf{t}| = \left| g_{ab} \frac{dx^a}{du} \frac{dx^b}{du} \right|^{1/2},$$

$$|\mathbf{t}| = \frac{|g_{ab} dx^a dx^b|^{1/2}}{du},$$

portanto:

$$|\mathbf{t}| = \left| \frac{ds}{du} \right|, \quad (2.24)$$

na qual ds é o intervalo, medido ao longo da curva, que corresponde ao intervalo de parâmetro du ao longo da mesma. Para uma curva não-nula, o vetor tangente em todo ponto não é do tipo-nulo, de modo que $|\mathbf{t}| \neq 0$. Neste caso, o comprimento do vetor tangente depende do parâmetro u , de forma que ele pode variar ao longo da curva. Por outro lado, se a curva for parametrizada em termos de um parâmetro u , que se relaciona à distância s por uma expressão $u = as + b$, do qual a e b são constantes e $a \neq 0$, então o comprimento do vetor tangente deve ser constante ao longo da curva. Por conta desse fato, u é chamado de parâmetro **afim** ao longo da curva.

Para uma curva nula, contudo, o vetor tangente é do tipo-nulo, portanto $|\mathbf{t}| = 0$. Sendo assim, a distância ds entre quaisquer dois pontos é zero sobre este tipo de curva. Consequentemente, como s não varia ao longo da curva, não podemos usá-lo como parâmetro. Entretanto, isso nos dá liberdade de tomar qualquer outro parâmetro escalar u não-nulo, que pode variar ao longo da curva. De qualquer forma, mesmo para curvas nulas é possível definir uma classe de parâmetros afins.

2.2.8 Geodésicas

Temos que uma **geodésica** no espaço Euclidiano é simplesmente uma linha reta, a qual tem duas propriedades de definição equivalentes. Primeiro, o vetor tangente dela aponta sempre na mesma direção ao longo da curva; segundo, ela é a curva de comprimento mais curto entre dois pontos quaisquer nesse espaço. Sendo assim, podemos generalizar estas propriedades para definir geodésicas em variedades mais gerais.

Vamos começar considerando uma geodésica como uma curva $x^a(u)$, descrita em termos de algum parâmetro u pela direção do seu vetor tangente $\mathbf{t}(u)$. As equações que são satisfeitas pelas funções $x^a(u)$ são determinadas pelo seguinte requisito (ao longo da curva):

$$\frac{d\mathbf{t}}{du} = \lambda(u)\mathbf{t}, \quad (2.25)$$

em que $\lambda(u)$ é função de u .

Em uma base coordenada, as componentes t^a do vetor tangente devem satisfazer a seguinte equação:

$$\frac{Dt^a}{Du} = \frac{dt^a}{du} + \Gamma^a_{bc} t^b \frac{dx^c}{du} = \lambda(u)t^a.$$

Como as componentes do vetor tangente são dadas por $t^a = dx^a/du$, temos que as equações satisfeitas por uma geodésica são:

$$\frac{d}{du} \left(\frac{dx^a}{du} \right) + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{du} \frac{dx^c}{du} = \lambda(u) \frac{dx^a}{du}.$$

Portanto:

$$\frac{d^2x^a}{du^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{du} \frac{dx^c}{du} = \lambda(u) \frac{dx^a}{du}. \quad (2.26)$$

A equação (2.26) é válida tanto para geodésicas nulas quanto não-nulas, parametrizadas em termos de um parâmetro geral u . Entretanto, se a curva é parametrizada de modo que o termo $\lambda(u)$ desapareça, então u é um parâmetro privilegiado, o parâmetro afim.

Vemos que na equação (2.25), a parametrização é uma na qual o vetor tangente é o mesmo em todos os pontos ao longo da curva, isto é, o mesmo é transportado paralela-

mente, de forma que:

$$\frac{d\mathbf{t}}{du} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{Dt^a}{Du} = 0. \quad (2.27)$$

Sendo assim, as equações que são satisfeitas por uma geodésica parametrizada devem ser:

$$\frac{d^2x^a}{du^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{du} \frac{dx^c}{du} = 0. \quad (2.28)$$

A **equação da geodésica**, equação (2.28), é um dos resultados mais importantes para o estudo do movimento de partículas abordado na relatividade geral.

2.2.9 Procedimento lagrangiano para geodésicas

Para obter as equações paramétricas $x^a = x^a(u)$ de uma geodésica parametrizada afinadamente, temos que solucionar o sistema de equações diferenciais na equação (2.28). Tendo em vista que as equações que definem a conexão Γ^a_{bc} , equação (2.11), já são bastante complicadas, seria arduamente trabalhoso encontrar as equações paramétricas correspondentes. Entretanto, existe um procedimento variacional que é capaz de gerar as equações de uma geodésica parametrizada, nulas e não-nulas. Este procedimento também é muito prático pois gera os coeficientes da conexão.

Assim, em uma variedade (pseudo-)Riemanniana, podemos encontrar as equações para uma geodésica parametrizada definindo o seguinte “Lagrangiano”:

$$L = g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b,$$

do qual $\dot{x}^a \equiv dx^a/du$. Substituindo este Lagrangiano nas equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0,$$

encontramos que as equações da geodésica são:

$$\ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc} \dot{x}^b \dot{x}^c = 0. \quad (2.29)$$

Dessa forma, as equações de Euler-Lagrange fornecem um método útil para geração das equações da geodésica e os coeficientes da conexão. Em comparação com o método apresentado na seção (2.2.7), o procedimento lagrangiano é mais prático. Todavia, é instrutivo abordar o processo tradicional, pois a partir dele podemos ter um bom entendimento sobre todos os conceitos que foram abordados nesta seção sobre o cálculo vetorial.

2.3 Cálculo Tensorial Sobre Variedades

Na seção anterior, abordamos o cálculo aplicado sobre os campos vetoriais. Agora vamos dar um passo além e analisar uma situação mais geral, que são as operações aplicadas a campos tensoriais. Definindo de modo simples, **um tensor pode ser expresso como um mapa linear de um número de vetores à números reais**. Em outras palavras, tensores são entidades que possuem como argumentos os vetores, resultando em números reais.

Dessa forma, os tensores podem ser classificados por ordem, onde essa ordem é determinada pelo número de vetores que ele tem como argumento. Assim, um escalar é um tensor de ordem zero, já que não tem nenhum vetor por argumento. O próprio vetor é um tensor de 1ª ordem, e assim por diante. Agora vamos abordar os principais resultados desse estudo sobre os tensores.

2.3.1 Tensor métrico

O tensor mais importante que podemos definir sobre uma variedade é o **tensor métrico** \mathbf{g} . Este simplesmente define um mapa linear de dois vetores em um número, que é seu produto interno, de modo que:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.30)$$

Podemos observar que \mathbf{g} é um tensor simétrico de 2ª ordem, do qual suas componentes covariantes e contravariantes, em uma base, são dadas por:

$$g_{ab} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b \quad \text{e} \quad g^{ab} = \mathbf{g}(\mathbf{e}^a, \mathbf{e}^b) = \mathbf{e}^a \cdot \mathbf{e}^b.$$

Por outro lado, as componentes mistas do tensor métrico são expressas como:

$$\mathbf{g}(\mathbf{e}^b, \mathbf{e}_a) = \mathbf{g}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}^b) = \delta_a^b,$$

do qual esta última igualdade é devida à relação de reciprocidade entre os vetores de base e suas bases duais.

Agora vamos tomar a seguinte aplicação do tensor métrico:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (v^a \mathbf{e}_a) \cdot (u^b \mathbf{e}_b),$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b) v^a u^b,$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = g_{ab} v^a u^b.$$

Um caso particular é:

$$ds^2 = ds \cdot ds,$$

em que $ds = \mathbf{e}_a dx^a$. Assim:

$$ds^2 = (dx^a \mathbf{e}_a) \cdot (dx^b \mathbf{e}_b),$$

$$ds^2 = (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b) dx^a dx^b,$$

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b.$$

2.3.2 Tensores como objetos geométricos

Sabemos que um tensor de 1ª ordem pode ser identificado como um vetor. Assim, dado um vetor \mathbf{t} , suas componentes covariantes e contravariantes, em alguma base, podem ser dadas por:

$$\mathbf{t}(\mathbf{e}_a) = t_a \quad \text{e} \quad \mathbf{t}(\mathbf{e}^a) = t^a.$$

A construção de um vetor \mathbf{t} como objeto geométrico pode ser feita a partir da combinação linear de vetores de base, de modo que:

$$\mathbf{t} = t^a \mathbf{e}_a = t_a \mathbf{e}^a. \quad (2.31)$$

Dessa forma, tensores de ordem superior também podem ser considerados como entidades geométricas. Logo, em uma base particular, um tensor qualquer pode ser expressado como uma combinação linear de uma dada **base tensorial**, que é feita a partir dos vetores de base e suas bases duais.

Vamos considerar o produto tensorial dos vetores de base ($\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b$) em algum sistema de coordenadas. Podemos expressar as componentes contravariantes deste tensor de 2ª ordem de forma bem simples, de modo que:

$$(\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b)(\mathbf{e}^c, \mathbf{e}^d) = \mathbf{e}_a(\mathbf{e}^c) \mathbf{e}_b(\mathbf{e}^d) = \delta_a^c \delta_b^d.$$

Agora vamos tomar um tensor \mathbf{t} de 2ª ordem cujas componentes contravariantes são t^{ab} . Vamos também considerar a quantidade $t^{ab}(\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b)$. Vemos que esta é uma soma de tensores de 2ª ordem, do qual resulta ainda em um tensor de 2ª ordem. Considerando a ação deste tensor sobre dois vetores de base, temos que:

$$t^{ab}(\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b)(\mathbf{e}^c, \mathbf{e}^d) = t^{ab} \delta_a^c \delta_b^d = t^{cd},$$

em que os t^{cd} são as componentes contravariantes do tensor \mathbf{t} .

Dessa forma, similar ao vetor na equação (2.31), podemos escrever o tensor \mathbf{t} (de 2ª ordem) como uma combinação linear dos tensores de base, tal que:

$$\mathbf{t} = t^{ab}(\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b).$$

A partir de diferentes bases tensoriais, obtidas de diversas combinações dos vetores de base e suas duais, podemos expressar o tensor \mathbf{t} de várias formas. Vale ressaltar que esta ideia pode ser facilmente estendida a tensores de ordem superior.

2.3.3 Tensores e transformações de coordenadas

Como discutido anteriormente, abordamos o fato de considerar os tensores como objetos geométricos. Essa análise tem como consequência a discussão do comportamento das componentes tensoriais quando submetidas a uma transformação de coordenadas $x^a \rightarrow x'^a$ no variedade, caso que estudaremos agora. Como sabemos, existe uma relação entre os vetores de base \mathbf{e}_a e \mathbf{e}'_a associados aos sistemas de coordenadas x^a e x'^a , respectivamente. Tal relação é dada por:

$$\mathbf{e}'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \mathbf{e}_b, \quad (2.32)$$

em que avaliamos a derivada parcial no ponto P . Existe uma relação semelhante para os vetores de base dual, que é:

$$\mathbf{e}'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \mathbf{e}^b. \quad (2.33)$$

De posse das equações (2.32) e (2.33), podemos determinar como devem se comportar as componentes de um tensor geral quando estão sob uma transformação de coordenadas.

Dado um vetor \mathbf{t} , suas componentes contravariantes em uma nova base são dadas por:

$$t'^a = \mathbf{t}(\mathbf{e}'^a) = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \mathbf{t}(\mathbf{e}^b) = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} t^b.$$

Por outro lado, as componentes covariantes devem ser:

$$t'_a = \mathbf{t}(\mathbf{e}'_a) = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \mathbf{t}(\mathbf{e}_b) = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} t_b.$$

Essas propriedades de transformação também são válidas para tensores de ordem superior. Sendo assim, caso \mathbf{t} seja um tensor de 2ª ordem, temos que:

$$t'_{ab} = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} t_{cd},$$

$$t'^{ab} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} t^{cd},$$

$$t'^a{}_b = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} t^c{}_d,$$

$$t'^a{}_b = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} t^c{}_d,$$

do qual temos as componentes covariantes, contravariantes e mistas (dois tipos), respectivamente. É importante ressaltar que estas componentes descrevem o *mesmo* tensor em termos de diferentes bases coordenadas. Dessa forma:

$$\mathbf{t} = t^{ab}(\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b) = t'^{ab}(\mathbf{e}'_a \otimes \mathbf{e}'_b).$$

Vale destacar que quando transformamos as componentes de um tensor arbitrário, cada sobrescrito herda uma **matriz** de transformação do tipo $\partial x'^a/\partial x^c$, enquanto que cada subscrito herda uma do tipo $\partial x^c/\partial x'^a$. Assim, para que um conjunto de quantidades sejam componentes tensoriais, a exigência básica é que tais quantidades se transformem de acordo com o modo acima sob uma mudança de coordenadas.

2.3.4 O teorema do quociente

Nem todas as quantidades que contêm índices são componentes tensoriais. Os coeficientes da conexão são um exemplo claro disso, pois os mesmos não obedecem à lei de transformação mostrada na subseção anterior (2.3.3). E como foi dito anteriormente, o requisito básico para que um conjunto de quantidades seja identificado como as componentes de um tensor é que tal conjunto obedeça à lei de transformação apresentada acima.

O **teorema do quociente**, contudo, fornece uma maneira de estabelecer tal exigência em um caso específico, sem a necessidade de se demonstrar que a lei de transformação se mantém. Esse teorema nos diz que *se um dado conjunto de quantidades quando contraído com um tensor vem a produzir outro tensor, então o conjunto original de quantidades é também um tensor*.

Agora vamos exemplificar uma ilustração desse teorema. Tomando uma variedade N dimensional, vamos supor que em cada sistema de coordenadas, sobre um ponto P , existem N^3 números $t^a{}_{bc}$ associados. Temos que para um conjunto de componentes vetoriais contravariantes v^a , os N^2 números $t^a{}_{bc}v^c$ se transformam como componentes de um tensor de 2ª ordem, sob uma mudança de coordenadas. Dessa forma, isso nos diz que:

$$t'^a{}_{bc}v'^c = \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial x^e}{\partial x'^b} t^d{}_{ef}v^f, \quad (2.34)$$

do qual os t^a_{bc} são os N^3 números correspondentes associados ao novo sistema de coordenadas *com linha*. Sendo assim, podemos concluir que *os t^a_{bc} são componentes de um tensor de 3ª ordem*. Podemos ver que $v^f = (\partial x^f / \partial x'^c) v'^c$, de modo que a equação (2.34) nos fornece:

$$t^a_{bc} v'^c = \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial x^e}{\partial x'^b} t^d_{ef} \frac{\partial x^f}{\partial x'^c} v'^c,$$

do qual, após um arranjo, temos:

$$\left(t^a_{bc} - \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial x^e}{\partial x'^b} \frac{\partial x^f}{\partial x'^c} t^d_{ef} \right) v'^c = 0.$$

Esta expressão deve se manter para componentes vetoriais v'^c arbitrárias, de modo que o termo entre parênteses deve desaparecer identicamente. Portanto, temos:

$$t^a_{bc} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial x^e}{\partial x'^b} \frac{\partial x^f}{\partial x'^c} t^d_{ef},$$

na qual concluímos que os t^a_{bc} devem ser componentes de um tensor de 3ª ordem.

Dessa forma, caso um conjunto de números possua características tensoriais, quando alguns de seus índices são *eliminados* pelo somatório com as componentes de um tensor qualquer, então os números do conjunto original são componentes de um tensor.

2.3.5 Derivada covariante de um tensor

Temos que a diferenciação das componentes de um tensor geral, que não seja um escalar, geralmente não resulta nas componentes de um outro tensor. Para evitar esse tipo de dificuldade, podemos introduzir a derivada covariante de um vetor:

$$\nabla_b v^a = \partial_b v^a + \Gamma^a_{cb} v^c,$$

onde podemos escrever $\partial_b \mathbf{v} = (\nabla_b v^a) \mathbf{e}_a$. A partir das propriedades de transformação da conexão, podemos mostrar que $\nabla_b v^a$ são as componentes de um tensor de 2ª ordem. Vamos denotar este tensor por $\nabla \mathbf{v}$, que formalmente é o produto tensorial do operador diferencial ∇ com o vetor \mathbf{v} ⁵. Assim, em uma dada base, podemos escrever $\nabla = \mathbf{e}^a \partial_a$, de modo que temos:

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{e}^a \partial_a \otimes v^b \mathbf{e}_b = \mathbf{e}^a \otimes \partial_a (v^b \mathbf{e}_b) = (\nabla_a v^b) \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}_b.$$

Por outro lado, $\nabla_b v_a$ formam as componentes covariantes deste tensor, do qual:

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{e}^a \partial_a \otimes v_b \mathbf{e}^b = \mathbf{e}^a \otimes \partial_a (v_b \mathbf{e}^b) = (\nabla_a v_b) \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b.$$

⁵Neste caso, omitimos o símbolo \otimes em produtos tensoriais que envolvam ∇ .

É fácil mostrar que $\nabla_b v^a$ e $\nabla_b v_a$ satisfazem as exigências das leis de transformação para serem componentes tensoriais.

Também podemos estender a ideia da derivada covariante para tensores de ordem superior. Vamos considerar um tensor \mathbf{t} de 2ª ordem e calcular sua derivada covariante, com componentes contravariantes $\nabla_c t^{ab}$. Então, expressando \mathbf{t} em termos dessas componentes, temos:

$$\partial_c \mathbf{t} = \partial_c (t^{ab} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b),$$

$$\partial_c \mathbf{t} = (\partial_c t^{ab}) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b + t^{ab} (\partial_c \mathbf{e}_a) \otimes \mathbf{e}_b + t^{ab} \mathbf{e}_a \otimes (\partial_c \mathbf{e}_b).$$

Agora, podemos reescrever as derivadas dos vetores de base em termos dos coeficientes da conexão, do qual obtemos:

$$\partial_c \mathbf{t} = (\partial_c t^{ab}) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b + t^{ab} \Gamma_{ac}^d \mathbf{e}_d \otimes \mathbf{e}_b + t^{ab} \mathbf{e}_a \otimes \Gamma_{bc}^d \mathbf{e}_d.$$

Trocando os índices mudos a e d no segundo termo do lado direito da expressão acima e também os índices b e d no terceiro termo, obtemos que:

$$\partial_c \mathbf{t} = (\partial_c t^{ab}) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b + t^{db} \Gamma_{dc}^a \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b + t^{ad} \mathbf{e}_a \otimes \Gamma_{dc}^b \mathbf{e}_b,$$

$$\partial_c \mathbf{t} = (\partial_c t^{ab} + \Gamma_{dc}^a t^{db} + \Gamma_{dc}^b t^{ad}) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b,$$

em que o termo contido entre os parênteses é identificado como a derivada covariante:

$$\nabla_c t^{ab} = \partial_c t^{ab} + \Gamma_{dc}^a t^{db} + \Gamma_{dc}^b t^{ad}. \quad (2.35)$$

Utilizando a equação (2.35), a derivada covariante de tensor \mathbf{t} , em relação a x^c , pode ser expressa em termos de suas componentes contravariantes como segue:

$$\partial_c \mathbf{t} = (\nabla_c t^{ab}) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b.$$

Procedendo de maneira similar, podemos obter também as componentes covariantes e mistas para a derivada covariante do tensor \mathbf{t} . Sendo assim, para as componentes covariantes deste tensor, temos o seguinte:

$$\partial_c \mathbf{t} = \partial_c (t_{ab} \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b),$$

$$\partial_c \mathbf{t} = (\partial_c t_{ab}) \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b + t_{ab} (\partial_c \mathbf{e}^a) \otimes \mathbf{e}^b + t_{ab} \mathbf{e}^a \otimes (\partial_c \mathbf{e}^b),$$

$$\partial_c \mathbf{t} = (\partial_c t_{ab}) \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b - t_{ab} \Gamma_{dc}^a \mathbf{e}^d \otimes \mathbf{e}^b - t_{ab} \mathbf{e}^a \otimes \Gamma_{dc}^b \mathbf{e}^d,$$

$$\partial_c \mathbf{t} = (\partial_c t_{ab}) \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b - t_{db} \Gamma_{ac}^d \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b - t_{ad} \mathbf{e}^a \otimes \Gamma_{bc}^d \mathbf{e}^b,$$

$$\partial_c \mathbf{t} = (\partial_c t_{ab} - \Gamma_{ac}^d t_{db} - \Gamma_{bc}^d t_{ad}) \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b,$$

de modo que a derivada covariante das componentes covariantes do tensor \mathbf{t} é dada por:

$$\nabla_c t_{ab} = \partial_c t_{ab} - \Gamma_{ac}^d t_{db} - \Gamma_{bc}^d t_{ad}. \quad (2.36)$$

Dessa forma:

$$\partial_c \mathbf{t} = (\nabla_c t_{ab}) \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b.$$

Por fim, para as componentes mistas, temos que:

$$\partial_c \mathbf{t} = \partial_c (t^a_b \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}^b),$$

$$\partial_c \mathbf{t} = (\partial_c t^a_b) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}^b + t^a_b (\partial_c \mathbf{e}_a) \otimes \mathbf{e}^b + t^a_b \mathbf{e}_a \otimes (\partial_c \mathbf{e}^b),$$

$$\partial_c \mathbf{t} = (\partial_c t^a_b) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}^b + t^a_b \Gamma_{ac}^d \mathbf{e}_d \otimes \mathbf{e}^b - t^a_b \mathbf{e}_a \otimes \Gamma_{dc}^b \mathbf{e}^d,$$

$$\partial_c \mathbf{t} = (\partial_c t^a_b) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}^b + t^d_b \Gamma_{dc}^a \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}^b - t^a_d \mathbf{e}_a \otimes \Gamma_{bc}^d \mathbf{e}^b,$$

$$\partial_c \mathbf{t} = (\partial_c t^a_b + \Gamma_{dc}^a t^d_b - \Gamma_{bc}^d t^a_d) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}^b,$$

do qual a derivada covariante das componentes mistas é:

$$\nabla_c t^a_b = \partial_c t^a_b + \Gamma_{dc}^a t^d_b - \Gamma_{bc}^d t^a_d. \quad (2.37)$$

Portanto, temos:

$$\partial_c \mathbf{t} = (\nabla_c t^a_b) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}^b.$$

Assim, coletando os resultados obtidos nas equações (2.35), (2.36) e (2.37), obtemos finalmente:

$$\nabla_c t^{ab} = \partial_c t^{ab} + \Gamma_{dc}^a t^{db} + \Gamma_{dc}^b t^{ad},$$

$$\nabla_c t_{ab} = \partial_c t_{ab} - \Gamma_{ac}^d t_{db} - \Gamma_{bc}^d t_{ad},$$

$$\nabla_c t^a_b = \partial_c t^a_b + \Gamma_{dc}^a t^d_b - \Gamma_{bc}^d t^a_d.$$

É importante destacar que as posições dos índices nestas expressões são bem sistemáticas. Observe que o último índice em cada coeficiente da conexão corresponde ao da derivada covariante, enquanto que os índices remanescentes podem ser arranjados de outros modos. Note que para cada índice contravariante no lado esquerdo da equação, é adicionado um termo no lado direito com um símbolo de Christoffel com o sinal de **mais**. Por outro lado, para cada índice covariante é adicionado um termo de Christoffel com o sinal de **menos**. Vale destacar que este procedimento é facilmente estendido a tensores de ordem superior.

Um resultado particularmente importante é sobre a derivada covariante do tensor métrico \mathbf{g} , que é identicamente nula em todos os pontos de uma variedade Riemanniana, ou seja:

$$\nabla \mathbf{g} = 0.$$

De modo alternativo, podemos expressar isto em termos das componentes covariantes e contravariantes como sendo:

$$\nabla_c g_{ab} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla_c g^{ab} = 0. \quad (2.38)$$

Este resultado tem uma consequência bastante importante, que simplifica consideravelmente as manipulações tensoriais. Sendo assim, *podemos facilmente trocar a ordem de levantar ou abaixar um índice e executar uma diferenciação covariante de modo que isso não deve afetar o resultado*. Como exemplo, vamos considerar as componentes contravariantes t^{ab} de um tensor de 2ª ordem. Assim, tomando a equação (2.38), temos:

$$\nabla_c t^{ab} = \nabla_c (g^{bd} t^a_d),$$

$$\nabla_c t^{ab} = (\nabla_c g^{bd}) t^a_d + g^{bd} (\nabla_c t^a_d),$$

$$\nabla_c t^{ab} = g^{bd} (\nabla_c t^a_d).$$

Vale destacar que a derivada covariante também segue a regra do produto de uma derivada *comum*.

Capítulo 3

O Princípio da Equivalência e a Curvatura do Espaço-Tempo

3.1 O Princípio da Equivalência

Devido ao fato da igualdade entre as massas inercial e gravitacional de uma partícula, Einstein propôs o famoso experimento do *elevador*. Vamos considerar um observador que está em um elevador caindo livremente. Quaisquer objetos largados do repouso, relativo à cabine do elevador, permanecem flutuando *sem peso* na mesma; um projétil lançado de um lado ao outro do elevador parece se mover em uma linha reta, ao invés da trajetória parabólica. Esses acontecimentos decorrem do fato de que a aceleração de qualquer partícula relativa ao elevador é zero, ou seja, a partícula e a cabine do elevador possuem a *mesma* aceleração relativa à Terra, resultado da equivalência entre as massas inercial e gravitacional.

Dessa forma, o princípio da equivalência nos diz o seguinte: **em um laboratório (não-rotativo) que está caindo livremente, ocupando uma pequena região do espaço-tempo, as leis da física são aquelas da relatividade especial**¹.

3.2 A Gravidade como Curvatura do Espaço-Tempo

Todos esses fatos levaram Einstein a propor uma ideia que resultou em uma descrição relativística da gravidade e agregou naturalmente o princípio da equivalência. Dessa forma, ele propôs que **a gravidade não deve mais ser considerada como uma força, mas em vez disso deve ser tratada como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, sendo esta curvatura induzida pela presença de matéria/energia.**

¹Esta é uma declaração do princípio da equivalência *forte*, visto que ele se refere a todas as leis da física. Todavia, existe também o princípio da equivalência *fraco*, que se refere apenas às trajetórias de partículas caindo livremente.

Já que a gravidade deve ser considerada como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, então a equação de movimento de uma partícula, que se move apenas sob influência da gravidade, deve ser como a de uma partícula *livre* no espaço-tempo curvo, de modo que:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{0},$$

do qual \mathbf{p} é o quadrimomento da partícula e τ é o tempo próprio medido ao longo da linha de mundo dela. Assim, concluímos que *a linha de mundo de uma partícula caindo livremente sob influência da gravidade é uma geodésica no espaço-tempo curvo.*

Por outro lado, o princípio da equivalência restringe a possível geometria do espaço-tempo curvo a do tipo pseudo-Riemanniano. Temos que a interpretação matemática do princípio da equivalência é que ele exige que em qualquer evento P devemos ser capazes de definir um sistema de coordenadas X^μ de modo que, na vizinhança local de P , o elemento de linha do espaço-tempo seja:

$$ds^2 \approx \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu, \quad (3.1)$$

na qual $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica correspondente ao espaço-tempo de Minkowski, dada por:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de modo que a igualdade na equação (3.1) se mantém no evento P . Então, para uma variedade pseudo-Riemanniana, que é curva e quadridimensional, em algum sistema de coordenadas arbitrário x^μ , o elemento de linha toma a forma geral dada por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

sendo $g_{\mu\nu}$ a métrica correspondente à geometria a ser encontrada.

3.3 O Tensor de Curvatura

Agora, como podemos mensurar a curvatura de uma variedade? Uma solução para essa questão é considerar uma mudança na ordem da diferenciação covariante. Todavia, a ordem é importante na hora de diferenciar, pois geralmente uma mudança nessa ordem pode acarretar em uma diferença no resultado. Para campo escalares isso não é problema, visto que neste caso a derivada covariante é igual à derivada parcial. Mas agora, vamos considerar um campo vetorial arbitrário definido sobre uma variedade cujas componentes

covariantes são v_a . A derivada covariante desse campo é dada por:

$$\nabla_b v_a = \partial_b v_a - \Gamma_{ab}^d v_d.$$

Realizando uma segunda diferenciação covariante, obtemos que:

$$\nabla_c \nabla_b v_a = \partial_c (\nabla_b v_a) - \Gamma_{ac}^e \nabla_b v_e - \Gamma_{bc}^e \nabla_e v_a,$$

$$\nabla_c \nabla_b v_a = \partial_c (\partial_b v_a - \Gamma_{ab}^d v_d) - \Gamma_{ac}^e (\partial_b v_e - \Gamma_{eb}^d v_d) - \Gamma_{bc}^e (\partial_e v_a - \Gamma_{ae}^d v_d),$$

$$\nabla_c \nabla_b v_a = \partial_c \partial_b v_a - (\partial_c \Gamma_{ab}^d) v_d - \Gamma_{ab}^d \partial_c v_d - \Gamma_{ac}^e (\partial_b v_e - \Gamma_{eb}^d v_d) - \Gamma_{bc}^e (\partial_e v_a - \Gamma_{ae}^d v_d),$$

do qual sabemos que $\nabla_b v_a$ é um tensor de 2ª ordem. Fazendo uma troca entre os índices b e c , podemos obter uma expressão correspondente para $\nabla_b \nabla_c v_a$, dada por:

$$\nabla_b \nabla_c v_a = \partial_b \partial_c v_a - (\partial_b \Gamma_{ac}^d) v_d - \Gamma_{ac}^d \partial_b v_d - \Gamma_{ab}^e (\partial_c v_e - \Gamma_{ec}^d v_d) - \Gamma_{cb}^e (\partial_e v_a - \Gamma_{ae}^d v_d),$$

e assim, subtraindo as duas expressões acima, obtemos que:

$$\nabla_c \nabla_b v_a - \nabla_b \nabla_c v_a = -\partial_c \Gamma_{ab}^d v_d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d v_d + \partial_b \Gamma_{ac}^d v_d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d v_d.$$

Rearranjando os termos, temos finalmente:

$$\nabla_c \nabla_b v_a - \nabla_b \nabla_c v_a = (\partial_b \Gamma_{ac}^d - \partial_c \Gamma_{ab}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d) v_d.$$

Podemos reescrever este resultado como:

$$\nabla_c \nabla_b v_a - \nabla_b \nabla_c v_a = R_{abc}^d v_d, \quad (3.2)$$

em que:

$$R_{abc}^d \equiv \partial_b \Gamma_{ac}^d - \partial_c \Gamma_{ab}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d. \quad (3.3)$$

Agora, para saber se as N^4 quantidades do objeto R_{abc}^d se comportam como as componentes de um tensor sob uma transformação de coordenadas, será necessário um árduo trabalho algébrico. Felizmente, o teorema do quociente nos fornece um caminho mais simples e prático. Sabemos que o lado esquerdo da equação (3.2) é um tensor, para os vetores arbitrários v_a , de modo que a contração de R_{abc}^d com v_d também é um tensor. Visto que R_{abc}^d não depende das componentes v_a , pelo teorema do quociente podemos

concluir que os R^d_{abc} são, de fato, componentes de um tensor \mathbf{R} de 4ª ordem. Este tensor é conhecido como o **tensor de curvatura** ou **tensor de Riemann**, sendo a equação (3.3) a sua representação em termos do tensor métrico g_{ab} e de suas primeira e segunda derivadas.

Agora vamos estabelecer como o tensor definido na equação (3.3) se relaciona à curvatura de uma variedade. Em uma porção *plana* de uma variedade, devemos tomar coordenadas de modo que o elemento de linha, através da região, assuma a forma:

$$ds^2 = \epsilon_1(dX^1)^2 + \epsilon_2(dX^2)^2 + \dots + \epsilon_N(dX^N)^2. \quad (3.4)$$

Nessas coordenadas, temos que os vetores de base não variam, de modo que Γ^a_{bc} e suas derivadas são zero. Assim:

$$R^d_{abc} = 0.$$

Vale ressaltar que esta é uma relação tensorial, de forma que ela deve se manter em qualquer sistema de coordenadas. Destacamos também que, se $R^d_{abc} = 0$ em todo ponto em uma região de uma variedade, então podemos mostrar que existe a possibilidade de inserir um sistema de coordenadas no qual o elemento de linha tome a forma dada na equação (3.4), de modo que podemos concluir que essa região é *plana*. Portanto, o fato do tensor de curvatura ser nulo é uma condição necessária e suficiente para provar que uma dada região de uma variedade é plana.

Capítulo 4

O Buraco Acústico Canônico

Agora vamos estudar com detalhes alguns aspectos do **buraco acústico canônico** e analisar suas principais propriedades, tal como a deflexão de ondas sonoras. Um buraco acústico se forma em uma região de fluido onde nenhum som é capaz de sair. Por conta dessa característica, ele também pode ser chamado de **buraco mudo**¹. Temos que o buraco acústico é limitado por um horizonte de eventos aparente, que é uma superfície na qual a velocidade do fluxo é superior à velocidade do som no fluido. A analogia destes sistemas com buracos negros foi proposta em 1981 pelo físico canadense William George Unruh [4], que conseguiu desenvolver um modo de correlacionar certas propriedades de buracos negros à dinâmica dos fluidos [6].

Vamos nos restringir ao simples modelo de um buraco mudo esfericamente simétrico², conhecido como buraco acústico canônico. Para isso, devemos adotar algumas condições, que são um fluido barotrópico, inviscido e com fluxo irrotacional. Dessa forma, vamos tomar um fluxo constante esfericamente simétrico de um fluido incompressível, no qual haja uma fonte ou sorvedouro na origem $r = 0$. Devido à conservação do fluido, existe uma velocidade radial:

$$v_r = \pm c_s^2 (r_h^2 / r^2), \quad (4.1)$$

em que c_s é a velocidade do som no fluido e r_h é o raio onde a velocidade do fluxo ultrapassa a velocidade do som no fluido [5, 6]. Assim, a geometria efetiva para esse modelo é dada por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

na qual temos:

$$ds^2 = c_s^2 d\bar{t}^2 - \left(dr^2 \pm c_s^2 \frac{r_h^2}{r^2} d\bar{t}^2 \right) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.2)$$

¹Em analogia ao **buraco negro**, do qual nem a luz consegue escapar.

²Similar ao **buraco negro de Schwarzschild**, que é um modelo estático e esfericamente simétrico.

É importante destacar que o sinal (+) entre os parênteses do segundo termo do lado direito da equação está relacionado a uma fonte, enquanto o sinal (−) é designado para um sorvedouro. Todavia, a partir de agora vamos considerar apenas o sinal (−), pois estamos estudando um modelo análogo ao de um buraco negro. Como foi ressaltado na introdução, neste trabalho não iremos demonstrar como se chega à métrica do buraco acústico canônico. Para um melhor entendimento do assunto, indicamos ao leitor a referência [5]. Naquele artigo é apresentado pela primeira vez o modelo do buraco acústico canônico, como se desenvolve sua métrica e outras propriedades que não estão descritas no presente texto.

Agora vamos introduzir uma coordenada temporal alternativa, expressa por:

$$dt = d\bar{t} - \frac{r_h^2}{r^2} \left[c_s \left(1 - \frac{r_h^4}{r^4} \right)^{-1} \right] dr,$$

de modo que a métrica pode ser escrita na seguinte forma diagonal:

$$ds^2 = c_s^2 \left(1 - \frac{r_h^4}{r^4} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_h^4}{r^4} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.3)$$

Observe que o parâmetro de tempo t deve divergir quando $r \rightarrow r_h$. A partir de agora vamos analisar como as equações da geodésica devem se comportar de acordo com esse modelo.

4.1 Geodésicas

Primeiramente, vamos analisar como é o comportamento de geodésicas na geometria de Schwarzschild, visto que o modelo acústico adotado é um análogo a essa geometria. Temos que o elemento de linha de Schwarzschild é dado por³

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.4)$$

Caso sejam conhecidos os coeficientes da conexão $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ desta métrica, podemos escrever as equações da geodésica para essa geometria, de modo que:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\sigma} = 0,$$

do qual σ é algum parâmetro afim ao longo da geodésica dada por $x^\mu(\sigma)$. De toda forma, para determinar as equações da geodésica, iremos adotar o procedimento *Lagrangiano*, de acordo com o que foi descrito na subseção (2.2.8). Tomando a equação (4.4), o Lagrangiano será dado por:

³Vale destacar que denotamos $\mu = GM/c^2$.

$$L = c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2), \quad (4.5)$$

sendo o ponto acima de cada coordenada a representação de sua derivada em relação ao parâmetro afim. Dessa forma, podemos obter as equações da geodésica substituindo o lagrangiano da equação (4.5) nas equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0.$$

Utilizando esta equação e executando os devidos cálculos, encontramos que as equações da geodésica são:

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \dot{t} = k, \quad (4.6)$$

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} \ddot{r} + \frac{\mu c^2}{r^2} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-2} \frac{\mu}{r^2} \dot{r}^2 - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) = 0, \quad (4.7)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0, \quad (4.8)$$

$$r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = h. \quad (4.9)$$

Observe que nas equações (4.6) e (4.9), respectivamente, as quantidades k e h são constantes de movimento. Elas podem ser determinadas imediatamente, visto que L não vem a ser uma função explícita de t ou ϕ .

Também podemos notar que a equação (4.8) é facilmente satisfeita por $\theta = \pi/2$, pois como resultado da simetria esférica da geometria de Schwarzschild, é possível restringir nossa atenção a movimentos apenas no *plano equatorial* que é dado por $\theta = \pi/2$, sem perda de generalidade. Dessa forma, as equações (4.6), (4.7) e (4.9) tomam a forma:

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \dot{t} = k, \quad (4.10)$$

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} \ddot{r} + \frac{\mu c^2}{r^2} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-2} \frac{\mu}{r^2} \dot{r}^2 - r \dot{\phi}^2 = 0, \quad (4.11)$$

$$r^2 \dot{\phi} = h. \quad (4.12)$$

Todas essas equações são válidas tanto para geodésicas nulas quanto não-nulas, parametrizadas.

Agora vamos analisar como se comporta a trajetória de um fóton nessa geometria, para efeito de comparação com o nosso modelo acústico. Sabemos que a linha de mundo

de um fóton é uma geodésica nula, de modo que não é possível usar o tempo próprio τ como parâmetro afim, e assim temos que usar algum outro parâmetro σ ao longo da geodésica.

Vamos considerar o movimento no plano equatorial, de modo que as expressões de movimento serão dadas pelas equações da geodésica (4.10) e (4.12). Por outro lado, vamos substituir a equação para r (4.11) pela condição $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$. Sendo assim, temos que:

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)\dot{t} = k, \quad (4.13)$$

$$c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = 0, \quad (4.14)$$

$$r^2\dot{\phi} = h. \quad (4.15)$$

No caso da trajetória de fótons, vamos obter uma equação apropriada substituindo as equações (4.13) e (4.15) na equação (4.14), de modo que:

$$c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \left[k \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} \right]^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2 \left(\frac{h}{r^2}\right)^2 = 0,$$

$$c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-2} k^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2 \frac{h^2}{r^4} = 0,$$

$$c^2 k^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2} = 0,$$

$$(c^2 k^2 - \dot{r}^2) \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} = \frac{h^2}{r^2},$$

$$c^2 k^2 - \dot{r}^2 = \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right).$$

Portanto, temos que:

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) = c^2 k^2. \quad (4.16)$$

Agora, substituindo $h = r^2\dot{\phi}$ na equação (4.16), usando o seguinte fato:

$$\frac{dr}{d\sigma} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\sigma} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\phi},$$

executando a substituição $u = 1/r$ e diferenciando com relação a ϕ (além de usar que $\mu = GM/c^2$), obtemos:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3GM}{c^2}u^2. \quad (4.17)$$

A partir desta equação vamos analisar o comportamento da órbita da luz quando passa muito distante de objetos muito massivos. Observaremos que neste caso acontece um pequeno desvio na trajetória do fóton. Na próxima seção, sobre deflexões, analisaremos detalhadamente essa situação.

Agora vamos estudar o caso acústico, no qual o som será nosso objeto de pesquisa. Neste caso, vamos ter que as ondas sonoras deverão sofrer um leve desvio em suas trajetórias ao passarem a grandes distâncias do horizonte de um buraco mudo. Sendo assim, primeiro iremos considerar uma classe de geometrias descritas a partir do elemento de linha:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_h^n}{r^n}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_h^n}{r^n}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.18)$$

do qual c pode ser a velocidade da luz ou a velocidade do som (no fluido) dependendo do sistema analisado. Neste caso, $n = 1$ corresponde ao buraco negro de Schwarzschild, que é uma solução do vácuo das equações de Einstein, enquanto $n = 4$ está associado ao buraco acústico canônico, que vem da solução das equações de fluido.

Neste caso mais geral, as trajetórias de geodésicas espalhadas são obtidas a partir da equação orbital dada por:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - u^2 + r_h^n u^{n+2}, \quad (4.19)$$

obtida pelo mesmo procedimento utilizado para se chegar à equação (4.17), do qual sabemos que $u = 1/r$ e b é o parâmetro de impacto. Diferenciando esta equação, obtemos que:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{n+2}{2}r_h^n u^{n+1}. \quad (4.20)$$

A partir desta equação, analisaremos o caso da deflexão de ondas sonoras por um buraco acústico canônico, que é o principal objetivo deste trabalho.

4.2 Deflexões

Nesta seção, vamos analisar detalhadamente a deflexão de uma onda sonora causada por um buraco acústico canônico. Entretanto, iremos primeiro abordar a deflexão da luz, causada por um buraco negro de Schwarzschild, por exemplo, para que haja uma comparação sobre os resultados em cada um dos modelos.

4.2.1 Deflexão da luz

Na completa ausência de campos gravitacionais⁴, raios luminosos descrevem trajetórias retas. Entretanto, é possível observar uma pequena deflexão na trajetória deles quando trafegam sob efeito gravitacional de objetos massivos distantes, tal como uma estrela ou mesmo um buraco negro. Sendo assim, vamos utilizar uma técnica de aproximação para investigar esse comportamento para fótons que viajam a uma grande distância desses objetos, mas que seja suficiente para causar deflexão. A equação de movimento para um fóton, na geometria de Schwarzschild, é dada pela expressão (4.17). Na ausência de matéria, que seria o caso da luz viajando em uma região sem qualquer corpo massivo por perto, temos que o lado direito da equação (4.17) é identicamente nulo, de modo que:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0,$$

que é satisfeita pela seguinte solução:

$$u = \frac{\sin \phi}{b}, \quad (4.21)$$

a qual corresponde a uma trajetória em linha reta cujo parâmetro de impacto é b . Agora, para o caso da luz passando longe de um corpo massivo, devemos tratar a solução dada na equação (4.21) como a solução de ordem zero para a equação de movimento do fóton. De qualquer forma, a solução geral-relativística deve ser dada por:

$$u = \frac{\sin \phi}{b} + \Delta u,$$

na qual Δu é uma pequena perturbação⁵, devido à fraca interação com o corpo massivo. Substituindo esta expressão na equação (4.17), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\phi^2} \left[\frac{\sin \phi}{b} + \Delta u \right] + \frac{\sin \phi}{b} + \Delta u &= \frac{3GM}{c^2} \left[\frac{\sin \phi}{b} + \Delta u \right]^2, \\ -\frac{\sin \phi}{b} + \frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \frac{\sin \phi}{b} + \Delta u &= \frac{3GM}{c^2} \left[\frac{\sin^2 \phi}{b^2} + \frac{2 \sin \phi}{b} \Delta u + \Delta u^2 \right]. \end{aligned}$$

Como Δu já é uma pequena perturbação, se for elevada ao quadrado, torna-se menor ainda, de modo que descartamos o último termo entre colchetes no lado direito da equação. Por outro lado, o segundo termo entre colchetes também pode ser negligenciado, visto que se o parâmetro de impacto for grande, o produto com Δu torna tal termo menor ainda, sendo desprezível em relação aos demais. Sendo assim, obtemos que:

⁴Além de reflexão, refração, dispersão e outras interferências óticas.

⁵Para trajetórias próximas do buraco negro, obter soluções analíticas é uma tarefa bastante complexa e em geral são aplicados métodos numéricos.

$$\frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = \frac{3GM}{c^2 b^2} \sin^2 \phi.$$

Esta equação é satisfeita pela integral particular:

$$\Delta u = \frac{3GM}{2c^2 b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi \right). \quad (4.22)$$

Adicionando este resultado na solução original, temos que:

$$u = \frac{\sin \phi}{b} + \frac{3GM}{2c^2 b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi \right). \quad (4.23)$$

Agora vamos considerar o limite no qual $r \rightarrow \infty$, ou seja, em que $u \rightarrow 0$, que pode ocorrer para os casos em que $\phi_1 \ll 1$ e também $\phi_2 = \pi + \theta$, onde $\theta \ll 1$. Veremos primeiro o caso em torno de $\phi_1 \ll 1$. Para uma pequena deflexão, com um ângulo pequeno, podemos tomar as seguintes aproximações:

$$\sin \phi \approx \phi \text{ e } \cos 2\phi \approx 1,$$

de modo que a equação (4.23) resulta em:

$$0 = \frac{\phi}{b} + \frac{3GM}{2c^2 b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \right),$$

$$0 = \frac{\phi}{b} + \frac{3GM}{2c^2 b^2} \frac{4}{3},$$

$$\frac{\phi}{b} = -\frac{2GM}{c^2 b^2}.$$

Portanto, o ângulo inicial do raio luminoso é dado por:

$$\phi = \phi_1 = -\frac{2GM}{c^2 b}. \quad (4.24)$$

Agora vamos analisar o caso em torno de $\phi = \pi + \theta$. Assim, temos da equação (4.23):

$$u = \frac{\sin(\pi + \theta)}{b} + \frac{3GM}{2c^2 b^2} \left[1 + \frac{1}{3} \cos 2(\pi + \theta) \right],$$

do qual podemos tomar as seguintes aproximações, caso $\theta \ll 1$:

$$\sin(\pi + \theta) \approx -\theta \text{ e } \cos 2(\pi + \theta) \approx 1,$$

de modo que:

$$0 = -\frac{\theta}{b} + \frac{3GM}{2c^2 b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \right),$$

$$0 = -\frac{\theta}{b} + \frac{3GM}{2c^2b^2} \frac{4}{3},$$

$$0 = -\theta + \frac{2GM}{c^2b}.$$

Sendo assim:

$$\theta = \frac{2GM}{c^2b}.$$

Dessa forma, o ângulo final do raio luminoso é:

$$\phi_2 = \pi + \theta = \pi + \frac{2GM}{c^2b}. \quad (4.25)$$

Temos que o ângulo varrido pela trajetória do fóton é dado por:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1,$$

$$\Delta\phi = \pi + \frac{2GM}{c^2b} - \left(-\frac{2GM}{c^2b}\right),$$

de modo que:

$$\Delta\phi = \pi + \frac{4GM}{c^2b}. \quad (4.26)$$

Assim, o desvio a partir da reta, a qual varreria o ângulo π , será:

$$\Theta(b) = \Delta\phi - \pi,$$

sendo:

$$\Theta(b) = \frac{4GM}{c^2b}. \quad (4.27)$$

É importante destacar que este ângulo de desvio da trajetória da luz foi utilizado para comprovar a teoria da relatividade geral em 1919 [7].

4.2.2 Deflexão de ondas sonoras

Agora vamos analisar detalhadamente a deflexão de ondas sonoras, causada pela presença de um buraco acústico canônico. Nosso ponto de partida é a equação (4.20). É importante ressaltar que desejamos encontrar uma solução aproximada para a deflexão, aplicada a situações em que as ondas sonoras estão relativamente longe do buraco acústico [8]. Dessa forma, devemos propor a seguinte solução:

$$u = \frac{\sin \phi}{b} + \Delta u, \quad (4.28)$$

do qual Δu é uma pequena perturbação. Assim, substituindo esta expressão na equação diferencial (4.20), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{\sin \phi}{b} + \Delta u \right) + \frac{\sin \phi}{b} + \Delta u &= \frac{n+2}{2} r_h^n \left(\frac{\sin \phi}{b} + \Delta u \right)^{n+1}, \\ -\frac{\sin \phi}{b} + \frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \frac{\sin \phi}{b} + \Delta u &= \frac{n+2}{2} r_h^n \left(\frac{\sin \phi}{b} + \Delta u \right)^{n+1}, \\ \frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u &= \frac{n+2}{2} r_h^n \left(\frac{\sin \phi}{b} + \Delta u \right)^{n+1}. \\ \frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u &= \frac{n+2}{2} r_h^n \left(\frac{\sin \phi}{b} \right)^{n+1} \left[1 + \left(\frac{\sin \phi}{b} \right)^{-1} \Delta u \right]^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Para solucionar esta equação, primeiro vamos tomar o termo que está elevado a $(n+1)$ e realizar uma expansão sobre ele até a 1ª ordem. Assim:

$$\left(\frac{\sin \phi}{b} \right)^{n+1} \left[1 + \left(\frac{\sin \phi}{b} \right)^{-1} \Delta u \right]^{n+1} = \left(\frac{\sin \phi}{b} \right)^{n+1} \left[1 + (n+1) \left(\frac{\sin \phi}{b} \right)^{-1} \Delta u \right].$$

Substituindo esta expansão na equação (4.29), obtemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u &= \frac{n+2}{2} r_h^n \left(\frac{\sin \phi}{b} \right)^{n+1} \left[1 + (n+1) \left(\frac{\sin \phi}{b} \right)^{-1} \Delta u \right], \\ \frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u &= \frac{n+2}{2} r_h^n \left[\left(\frac{\sin \phi}{b} \right)^{n+1} + (n+1) \left(\frac{\sin \phi}{b} \right)^n \Delta u \right]. \end{aligned}$$

Vale ressaltar que o parâmetro de impacto b é um valor grande, de modo que ele faz com que o termo $(\sin \phi/b)^n$ seja muito pequeno. Por conta disso, podemos negligenciar o segundo termo dentro dos colchetes, resultando finalmente:

$$\frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = \frac{n+2}{2} r_h^n \left(\frac{\sin \phi}{b} \right)^{n+1}. \quad (4.30)$$

É importante ressaltar que foi desenvolvida esta expressão com n genérico para destacar as manipulações matemáticas realizadas para obter a equação (4.30). Para o caso de deflexões por um buraco acústico canônico, devemos assumir $n = 4$, de modo que a equação (4.30) torna-se:

$$\frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = 3r_h^4 \left(\frac{\sin \phi}{b} \right)^5. \quad (4.31)$$

A solução particular para esta equação⁶ é dada por:

$$\Delta u = -\frac{r_h^4(\sin 5\phi - 15 \sin 3\phi - 80 \sin \phi + 120\phi \cos \phi)}{128b^5}, \quad (4.32)$$

em que a solução geral (4.28) fica como:

$$u = \frac{\sin \phi}{b} - \frac{r_h^4(\sin 5\phi - 15 \sin 3\phi - 80 \sin \phi + 120\phi \cos \phi)}{128b^5}. \quad (4.33)$$

Neste caso, para as geodésicas nesse espaço-tempo, temos que $u \rightarrow 0$ quando $\phi_1 \ll 1$ ou $\phi_2 = \pi + \theta$, com $\theta \ll 1$ [8]. Primeiro, assumindo o caso $\phi_1 \ll 1$, temos que:

$$0 = \frac{\phi}{b} - \frac{r_h^4(5\phi - 45\phi - 80\phi + 120\phi)}{128b^5},$$

$$0 = \frac{\phi}{b},$$

de modo que:

$$\phi = \phi_1 = 0. \quad (4.34)$$

Isso nos mostra que não há desvio no ângulo inicial da trajetória da onda sonora. Por outro lado, assumindo $\phi_2 = \pi + \theta$, temos que:

$$0 = \frac{\sin(\pi + \theta)}{b} - \frac{r_h^4[\sin 5(\pi + \theta) - 15 \sin 3(\pi + \theta) - 80 \sin(\pi + \theta) + 120(\pi + \theta) \cos(\pi + \theta)]}{128b^5},$$

$$0 = -\frac{\theta}{b} - \frac{r_h^4(-5\theta + 45\theta + 80\theta - 120\pi - 120\theta)}{128b^5},$$

$$0 = -\frac{\theta}{b} + \frac{120\pi r_h^4}{128b^5},$$

de modo que:

$$\theta = \frac{15\pi r_h^4}{16b^4}.$$

Dessa forma, o ângulo final da trajetória das ondas é dado por:

$$\phi_2 = \pi + \theta = \pi + \frac{15\pi r_h^4}{16b^4}. \quad (4.35)$$

⁶Solução obtida com o auxílio do software MAXIMA.

Assim, o ângulo varrido pela trajetória é:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1,$$

$$\Delta\phi = \pi + \frac{15\pi r_h^4}{16b^4} - 0 = \pi + \frac{15\pi r_h^4}{16b^4}.$$

Portanto, a deflexão total a partir da linha reta é:

$$\Theta(b) = \Delta\phi - \pi = \frac{15\pi r_h^4}{16b^4}. \quad (4.36)$$

Assim, podemos comparar ambos os casos, o de Schwarzschild e o acústico. Observamos do resultado para a deflexão da luz na equação (4.27) que o ângulo decai com o inverso de b , enquanto que no caso acústico o desvio da trajetória decai com o inverso de b^4 . Essa distinção se deve ao fato de que estamos trabalhando com geometrias diferentes. Mesmo que a estrutura matemática das geometrias sejam semelhantes, ainda há diferenças entre elas, revelando o fato crucial de que são sistemas de naturezas diferentes.

Capítulo 5

Conclusão

O buraco negro de Schwarzschild é do tipo estático e esfericamente simétrico; o modelo mais simples que existe. Apesar disto, esta solução foi utilizada para descrever o desvio de raios luminosos no contexto da teoria relativística. A deflexão da luz constitui um fenômeno muito importante, pois foi um dos primeiros testes experimentais da relatividade geral, pouco tempo após sua publicação, realizado em 1919.

De modo semelhante, Visser propôs o buraco acústico canônico (ou buraco mudo), que consiste em uma região de fluido esfericamente simétrica, dentro da qual a velocidade do fluxo é superior à velocidade do som no fluido. Isso o torna capaz de absorver qualquer onda sonora que entre em seu horizonte de eventos. Assim, similarmente ao buraco negro, o buraco acústico é capaz de defletir a trajetória de ondas sonoras que trafeguem a uma grande distância dele. A simplicidade deste modelo o torna interessante para entender até que ponto vai sua analogia a buracos negros da relatividade geral.

Na equação (4.27) conseguimos obter a deflexão total da trajetória de luz ao redor de um buraco negro de Schwarzschild. Por outro lado, na expressão (4.36), determinamos o ângulo de deflexão total para o caso de ondas sonoras ao redor de um buraco acústico canônico. Podemos observar que os dois resultados são muito semelhantes e ambos dependem do parâmetro de impacto, além do raio do horizonte de eventos. Entretanto, ambos os resultados não são iguais, pois mesmo dependendo do parâmetro de impacto, a taxa de decaimento do ângulo de deflexão é diferente nos dois casos, sendo o desvio da trajetória menor no caso do buraco acústico canônico. Como foi ressaltado, essa distinção ocorre porque são duas geometrias diferentes e isso advém do fato de que são sistemas distintos.

O presente estudo foi importante para compreender o limite dos análogos acústicos. Podemos utilizar um objeto de estudo semelhante (buraco acústico canônico) mas que não será exatamente igual ao buraco negro de Schwarzschild, visto que este e o modelo acústico são sistemas fundamentalmente distintos.

Os buracos negros são uma consequência formidável da teoria da relatividade geral, mas como sabemos, esses astros estão longe e difíceis de serem estudados profundamente. Assim, os modelos análogos, propostos por Unruh, proporcionam um meio mais viável de estudar alguns fenômenos previstos pela relatividade geral, visto que o comportamento de buracos acústicos muito se assemelha ao de buracos negros.

Referências Bibliográficas

- [1] EINSTEIN, A., *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Annalen der Physik, **18**, p.639-641, 1905.
- [2] RESNICK, R., *Introduction to Special Relativity*. 1^a ed. New York: John Wiley & Sons, 1968.
- [3] HOBSON, M. P., EFSTATHIOU, G. P., LASENBY, A. N., *General Relativity - An Introduction for Physicists*. New York: Cambridge University Press, 2006.
- [4] UNRUH, W. G., *Experimental Black-Hole Evaporation?*. Physical Review Letters, **46**, 1351, 1981.
- [5] VISSER, M., *Acoustic black holes: horizons, ergospheres and Hawking radiation*. Classical and Quantum Gravity, **15**, 1767, 1998.
- [6] DOLAN, S. R.; DE OLIVEIRA, E. S.; CRISPINO, L. C. B., *Scattering of sound waves by a canonical acoustic hole*. Physical Review D, **79**, 064014, 2009.
- [7] DYSON, F. W.; EDDINGTON, A. S.; DAVIDSON, C., *A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations made at the Total Eclipse of May 29, 1919*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **220**, p.291-333, 1920.
- [8] DE OLIVEIRA, E. S., *Espalhamento e absorção de campos bosônicos por buracos negros estáticos e análogos*. 2009. 88p. Tese (Doutorado em Física) - Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.