



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS
FACULDADE DE ENGENHARIA

TÍTULO: Análise da Dissipação de Energia em Coluna de Hastes de Bombeio de Poços de Petróleo

Anderson J. A. Ramos¹
Dilberto S. Almeida Júnior²
Alínia R. Santos³
Edson A. Araújo⁴
Pedro T. P. Aum⁵

RESUMO

Os sistemas de bombeio mecânico são métodos de elevação artificial bem conhecidos com grande eficiência na produção de óleo. Porém, o movimento periódico realizado pela coluna torna o sistema suscetível a falhas mecânicas, promovendo paralisações operacionais. Este artigo apresenta uma nova abordagem para a análise vibracional da coluna de hastes do bombeio por meio de um estudo do decaimento de energia. A equação da onda amortecida que representa o movimento oscilatório do sistema de elevação foi resolvida analiticamente, e a energia da solução foi caracterizada pela análise de seu comportamento no espaço e no tempo. Os resultados mostram que a energia é de natureza dissipativa, promovendo a atenuação vibracional em três diferentes formas de decaimento exponencial. Os resultados permitem caracterizar os limites de amortecimento de cada tipo de decaimento exponencial. A abordagem proposta neste trabalho, por meio da análise do decaimento de energia, pode servir de base para o desenvolvimento de novas metodologias capazes de detectar anomalias e condições operacionais ótimas em sistemas de bombeio mecânico.

Palavras-chave: Equação da Onda. Solução Analítica. Dissipação de Energia.

¹Faculdade de Matemática, Universidade Federal do Pará, Salinópolis, PA, Brasil. E-mail: ramos@ufpa.br

²Programa de Doutorado em Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, PA, Brasil; E-mail: dilberto@ufpa.br

³Autora do presente Trabalho de Conclusão de Curso, Faculdade de Engenharia, Universidade Federal do Pará, Salinópolis, PA, Brasil. E-mail: santosalinia@gmail.com

⁴Faculdade de Engenharia, Universidade Federal do Pará, Salinópolis, PA, Brasil. E-mail: edsonaa@ufpa.br

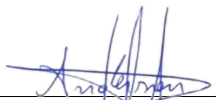
⁵Faculdade de Engenharia, Universidade Federal do Pará, Salinópolis, PA, Brasil. E-mail: pedroaum@ufpa.br

ALÍNIA RODRIGUES DOS SANTOS

ANÁLISE DA DISSIPAÇÃO DE ENERGIA EM COLUNA DE HASTES DE BOMBEIO DE
POÇOS DE PETRÓLEO

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à
Universidade Federal do Pará, como parte dos
requisitos necessários para a obtenção do Grau
em Bacharel em Engenharia de Exploração e
Produção de Petróleo.

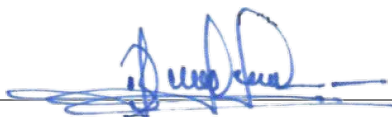
BANCA EXAMINADORA



Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos (Orientador)
Universidade Federal do Pará



Dr. Pedro Tupã Pandava Aum
Universidade Federal do Pará



Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior
Universidade Federal do Pará

Data de submissão: 08/ 12 / 2020

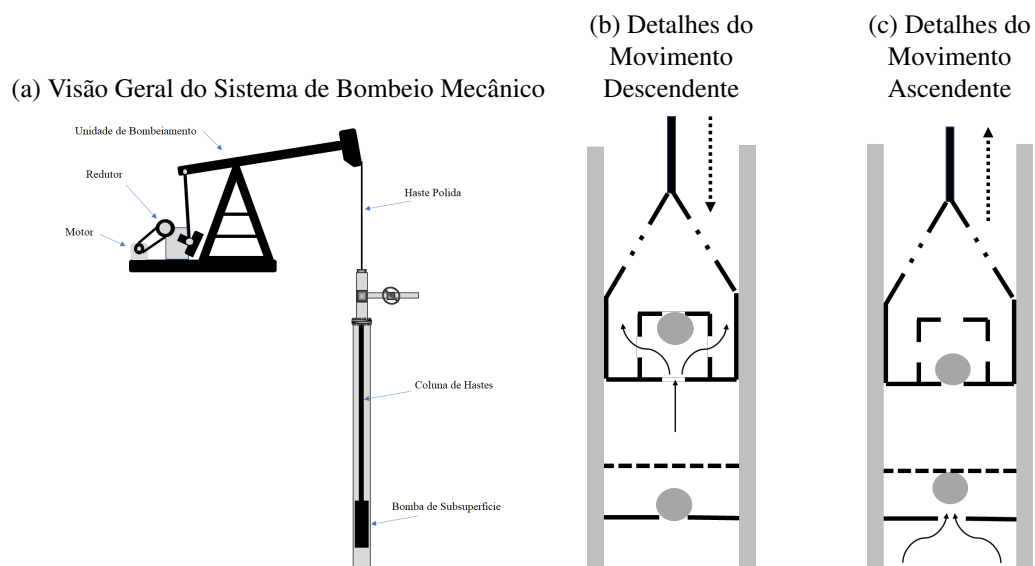
Data de aprovação: 08/ 12 / 2020

Salinópolis/PA, 2020.

1 Introdução

O sistema de bombeio mecânico é um dos métodos de elevação artificial mais difundidos na produção de petróleo em poços terrestres e é amplamente utilizado devido à sua fácil instalação, ampla gama de trabalhos, operacional bem conhecido e com bastante eficácia para promover baixa pressões de fundo de poço [1]. A Figura 1a ilustra as principais partes do sistema de bombeamento mecânico. A coluna de haste é conectada à bomba subterrânea, que cria uma pressão diferencial no fundo do poço, bombeando os fluidos do reservatório para a superfície [2]. As Figuras 1b e 1c mostram os detalhes da posição das válvulas da bomba de subsuperfície durante os movimentos da coluna para baixo (movimento descendente) e para cima (movimento ascendente). Durante o movimento ascendente, o fluido contido no espaço anular entre a coluna e o revestimento força o fechamento da válvula de passeio. Isso reduz a pressão abaixo desta válvula, abrindo a válvula de pé da bomba. Assim, o petróleo flui para dentro da câmara da bomba. Durante o movimento descendente, a compressão dos fluidos promove o fechamento da válvula de pé e a abertura da válvula de passeio. Ainda durante o movimento descendente, as pressões se igualam abrindo a válvula de passeio, retomando-se um novo ciclo.

Figura 1: Sistema de Bombeio mecânico (a) com detalhes da bomba de subsuperfície (b) e (c).



Uma das partes mais críticas do sistema é a coluna de hastes que conecta a unidade de bombeio com a bomba de subsuperfície. Esta coluna é composta por seções, conectadas por juntas de aço forjado. Durante o movimento cíclico a haste está submetida a diferentes esforços e precisa ser projetada para suportar seu próprio peso, o peso da coluna de fluido, o efeito inercial resultante da inversão do movimento da haste e as forças de atrito com o revestimento em poços direcionais. As tensões de compressão e tração causam efeitos vibracionais na haste, atenuados pelo atrito viscoso do fluido e pelas forças elásticas do próprio material [5]. Compreender o comportamento vibracional é de extrema importância para prever problemas operacionais durante o processo de bombeio mecânico. Nesse contexto, Gibbs [7] desenvolveu um modelo matemático, baseado na equação de onda, para descrever o comportamento dinâmico da haste de unidades de bombeio mecânico. Esse foi um dos primeiros trabalhos que realizaram a modelagem nesse tipo de sistema. Anos depois, Doty e Schmidt [4] apresentaram uma evolução do modelo proposto por Gibbs [7] - um sistema de equações diferenciais parciais com um modelo matemático otimizado para descrever o movimento do bombeio mecânico. Este modelo

incorporou a dinâmica da coluna de fluidos presente no anular. Em 1991, Lea [8] propôs uma modificação no termo da equação de Gibbs [7] que representa o atrito. Nos modelos anteriores, a contribuição do atrito Coulombiano é dada pela multiplicação de um coeficiente pela velocidade da coluna. A versão modificada da equação de onda apresentada por Lea provou ser eficiente no cálculo das contribuições de atrito viscoso, especialmente ao bombear fluidos de alta viscosidade. Em 1994, Neves e Boldrini [10] estudaram um modelo simplificado que leva em consideração: a resposta elástica da coluna de bombeio mecânico, o mecanismo de dissipação e a mudança nas tensões operacionais devido aos movimentos periódicos das válvulas da bomba de subsuperfície. O modelo proposto por eles consiste em uma equação de onda com condições de contorno não lineares e descontínuas. Eles chegaram a uma solução aproximada de caráter periódico e dissipativa.

Nos sistemas oscilatórios-dissipativos, o movimento vibracional é amortecido pela força externa não conservativa. Como consequência, observa-se que a energia mecânica decai, e esse comportamento é conhecido como dissipação e é entendido como a falta de energia mecânica do sistema [9, 17, 18].

O atrito modelado pela equação de Gibbs [7] é essencialmente viscoso. O atrito viscoso é o resultado do contato do elemento de massa com o fluido em que está imerso. A resistência hidráulica desse fluido leva à dissipação da energia mecânica do sistema como calor através da energia de atrito entre as camadas internas do fluido.

A quantificação de efeitos do amortecimento pode ser facilmente analisada através do conceito de energia e classificada por sua taxa de variação. Um problema peculiar associado ao comportamento assintótico da solução, em relação ao tipo de atrito, é encontrar as melhores taxas de decaimento, que certamente dependem do coeficiente de amortecimento. Intuitivamente, os autores foram levados a pensar que quanto mais altos os valores de amortecimento, melhor a taxa de decaimento da solução. No entanto, foi verificado através de simulações que tal afirmação não é verdadeira, ou seja, aumentando arbitrariamente o coeficiente de atrito, a taxa de decaimento não melhora e, inversamente, diminui. Esse fenômeno é conhecido como superamortecimento. [3, 12, 15].

Por muitos anos, houve uma conjectura em relação às taxas de decaimento proporcionadas pelos coeficientes de atrito, dependentes da variável espacial. A questão era se a taxa de decaimento para o caso do coeficiente variável era a mesma do caso constante. Ou seja, se a melhor taxa de decaimento da solução é obtida quando o coeficiente de atrito é constante. Essa conjectura ficou conhecida como conjectura de amortecimento constante.

Em 1998, Freitas [6] demonstrou que essa conjectura não era verdadeira, mostrando um contraexemplo de um coeficiente variável, e o decaimento de suas soluções numéricas apresentou uma taxa melhor em relação ao caso do coeficiente constante.

Voltando à questão do superamortecimento, um ponto que o grupo acredita que ainda não foi abordado na literatura diz respeito ao limite mais baixo de energia, quando não decai exponencialmente para zero. Ou seja, existe uma assíntota horizontal que impede o decaimento exponencial da energia para zero.

Os autores sabem que essa assíntota é gerada a partir de um certo valor do coeficiente de amortecimento que caracteriza o atrito colombiano e atinge seu valor máximo quando o coeficiente de atrito tende ao infinito.

A revisão da literatura demonstra que, apesar do amplo conhecimento operacional sobre o sistema de bombeio mecânico, existem poucos trabalhos que tentam analisar os efeitos dos valores de amortecimento do atrito viscoso e seu efeito na vibração das hastes. Portanto, este artigo propõe investigar os efeitos dos valores de amortecimento na dissipação de energia e caracterizar seu comportamento.

Este artigo tem a seguinte estrutura: Seção 2 apresenta o modelo matemático e mostra o decaimento exponencial da energia total usando o método da energia. Na Seção 3, os autores determinam a solução exata e constroem uma caracterização para as taxas totais de decaimento de energia. A Seção 4 apresenta as simulações numéricas que comprovam os resultados apresentados neste trabalho. E finalmente, na Seção 5, os autores comentam brevemente os resultados de nossas investigações.

2 Modelo Matemático

O modelo matemático proposto por Gibbs [7] é governado pela seguinte equação do momento linear

$$(\rho Av)_t = T_x + A\rho g + F, \quad (1)$$

onde ρ é a densidade do material, A é a área da seção transversal, v é a velocidade do elemento diferencial, T é a força de tensão, g é a gravidade e $F = -kv$ com k constante é a força de amortecimento do fluido na haste. De acordo com Romero e Almeida [14] a tensão T é obtida pela Lei de Hooke, considerando u como o deslocamento do elemento diferencial de comprimento Δx , dependendo da posição x no movimento ascendente da haste, a partir do ponto $u(x, t)$ para o ponto $u(x + \Delta x, t)$, *i.e.*,

$$T = EA u_x, \quad (2)$$

onde E é o módulo de Young. Por outro lado, a velocidade v é obtida pela variação da posição u no tempo, isto é, $v = u_t$. Então, temos

$$F = -k u_t, \quad (3)$$

e considerando as equações (1)–(3) e negligenciando a aceleração da gravidade, Gibbs [7] estabeleceu a seguinte equação diferencial parcial

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + \mu u_t = 0. \quad (4)$$

A função $u = u(x, t)$ representa o deslocamento de um ponto x da haste em um instante t , e a é a velocidade do som na haste. O termo $\mu := \pi a \nu / 2L$ é o coeficiente de amortecimento e $\nu > 0$ é o fator de amortecimento adimensional. De acordo com Gibbs [7], escolhendo um valor adequado para ν seria possível simular o atrito de Coulomb ou o atrito viscoso. Em relação às condições de contorno, o autor afirma que a condição mais importante na questão da sucção é aquela que descreve o funcionamento da bomba durante o movimento descendente, mas devido às dificuldades matemáticas no tratamento analítico das condições encontradas na prática, as condições da bomba foram expressas como segue

$$\alpha u(L, t) + \beta u_x(L, t) = P(t), \quad (5)$$

onde os parâmetros α , β e $P(t)$ dependem do tipo de operação a ser simulada. Por outro lado, Wang e Liu [16], ressaltam que as influências da força de inércia do líquido e da força de atrito do pistão-camisa da bomba não são consideradas na condição de contorno (5), mas na prática, essas influências são importantes e devem não ser ignorado. Portanto, para melhor atender a esses parâmetros, as condições de contorno foram melhoradas e fornecidas por

$$\alpha u(L, t) + \beta u_x(L, t) + \gamma u_{tt}(L, t) + \tilde{k} u_t(L, t) = P(t), \quad (6)$$

com γ representa a massa do líquido se a força de inércia do líquido atuar sobre o pistão, caso contrário, é zero, e $\tilde{k}$ é a constante de fricção do pistão-camisa da bomba. Para nossos propósitos neste trabalho, adotamos $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = k = 0$ e $P(t) = 0$ para todos $t \geq 0$. Assim, consideramos a seguinte equação hiperbólica

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + \mu u_t = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (7)$$

com condições de contorno Dirichlet homogênea

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (8)$$

e condições iniciais

$$u(x, t) = u_0(x), \quad u_t(x, t) = u_1(x), \quad 0 < x < L. \quad (9)$$

A energia total associada com o problema (7)–(9) é dada por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L \left(|u_t(x, t)|^2 + a^2 |u_x(x, t)|^2 \right) dx \quad (10)$$

e satisfaz a lei de dissipação de energia

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\mu \int_0^L |u_t(x, t)|^2 dx, \quad \forall t \geq 0. \quad (11)$$

A energia (10) sugere que o problema (7)–(9) é bem definido no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$. Então, para quaisquer dados iniciais $(u_0, u_1)^T \in \mathcal{H}$ existe só uma solução

$$\begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in C^0([0, \infty); H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, \infty); H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)).$$

Embora não seja o foco de nossa investigação, o correto posicionamento do problema pode ser assegurado pela teoria dos semigrupos de operadores lineares [11], adotando $U = (u, u_t)^T$, $U_0 = (u_0, u_1)^T$ e escrevendo o problema de Cauchy

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t), \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (12)$$

onde $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é um operador diferencial com domínio denso em $\mathcal{H}$, dado por

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ \partial_{xx}(\cdot) & -\mu I \end{pmatrix} \quad (13)$$

e I é o operador identidade. Usando o produto interno apropriado em $\mathcal{H}$, *i.e.*,

$$\left\langle (u, v)^T, (\tilde{u}, \tilde{v})^T \right\rangle_{\mathcal{H}} := \int_0^L v \tilde{v} dx + a^2 \int_0^L u_x \tilde{u}_x dx, \quad (14)$$

é fácil ver que $\mathcal{A}$ é dissipativo e além disso, está provado que: (a) $\mathcal{A}$ é fechado e $D(\mathcal{A})$ é densamente definido em $\mathcal{H}$; (b) O conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ contém o $\mathbb{R}^+$ e para cada $\lambda > 0$, $\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1/\lambda$.

De acordo com o teorema de Hille-Yosida [11], essas premissas são suficientes para provar que $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações e consequentemente a solução é bem definida. Além da existência e unicidade da solução, outra propriedade importante que merece ser destacada é a estabilização da energia total, *i.e.*, a propriedade de decaimento exponencialmente para zero, quando $t \rightarrow \infty$. Mas precisamente, estamos afirmando que existem constantes $M > 0$ e $\omega < 0$ tais que

$$E(t) \leq ME(0)e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (15)$$

Além disso, seguindo as observações importantes de Cox e Zuazau [3], definimos a taxa de decaimento como uma função de μ , dada por

$$\omega(\mu) = \inf \left\{ \omega : \exists M(\omega) > 0 \text{ s.t. } E(t) \leq ME(0)e^{\omega t} \right\}, \quad (16)$$

para cada solução de energia finita de (7)–(9). Essas e outras propriedades serão discutidas em mais detalhes na subseção a seguir.

2.1 Propriedades da Energia

Nesta subseção, mostraremos algumas propriedades já bem estabelecidas na literatura sobre a energia total do problema (7)–(9). A primeira é dado pelo seguinte teorema e trata da lei de dissipação.

Teorema 2.1 (Lei de Dissipação). *A energia total $E(t)$ dada por (10) satisfaz a seguinte lei de dissipação*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\mu \int_0^L |u_t|^2 dx. \quad (17)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (7) por u_t e integrando por partes em $[0, L]$ temos

$$\int_0^L u_{tt}u_t dx - a^2 \int_0^L u_{xx}u_t dx + \mu \int_0^L |u_t|^2 dx = 0. \quad (18)$$

Tendo em mente as condições de contorno (8), segue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{a^2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_x|^2 dx + \mu \int_0^L |u_t|^2 dx = 0 \quad (19)$$

e, consequentemente, a prova é estabelecida,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{a^2}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx \right) = -\mu \int_0^L |u_t|^2 dx, \quad \forall t \geq 0. \quad (20)$$

□

O próximo resultado trata do decaimento exponencial da energia total. O método utilizado para comprovar o resultado é conhecido como o método da energia [13], que consiste em construir o funcional Lyapunov $\mathcal{L}(t)$, equivalente à energia $E(t)$ e provar que sua taxa de variação é limitada por uma constante negativa, multiplicada por ela mesma. Para conseguir isso, introduzimos uma função auxiliar dada por

$$\mathcal{F}(t) := \int_0^L u_t u dx + \frac{\mu}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx. \quad (21)$$

Lema 2.1. *Seja u a solução do sistema (7) - (9). Então temos*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) = \int_0^L |u_t|^2 dx - a^2 \int_0^L |u_x|^2 dx, \quad \forall t > 0. \quad (22)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (7) por u e integrando por partes em $[0, L]$ temos

$$\int_0^L u_{tt}u \, dx + a^2 \int_0^L |u_x|^2 \, dx + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u|^2 \, dx = 0. \quad (23)$$

Usando a identidade $u_{tt}u = \frac{\partial}{\partial t}(u_t u) - |u_t|^2$ temos

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^L u_t u \, dx + \frac{\mu}{2} \int_0^L |u_t|^2 \, dx \right) - \int_0^L |u_t|^2 \, dx + a^2 \int_0^L |u_x|^2 \, dx = 0. \quad (24)$$

Portanto, concluímos a prova do lema. □

O teorema a seguir prova o decaimento exponencial da energia total (10), usando o método da energia.

Teorema 2.2 (Decaimento Exponencial). *A energia total $E(t)$ do problema (7)–(9), decai exponencialmente para zero com $t \rightarrow \infty$. Ou seja, existem constantes $M > 0$ e $\omega < 0$ independentes das condições iniciais, tais que*

$$E(t) \leq M E(0) e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (25)$$

Demonstração. Inicialmente, definimos o funcional Lyapunov

$$\mathcal{L}(t) := N E(t) + \mathcal{F}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (26)$$

que é equivalente a energia $E(t)$. Em seguida, derivamos $\mathcal{L}(t)$ em relação ao tempo e usamos a lei de dissipação (17), seguida do Lema 2.1 para obter

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) = -(N\mu - 1) \int_0^L |u_t|^2 dx - a^2 \int_0^L |u_x|^2 dx. \quad (27)$$

Escolhendo N grande o suficiente, i.e., $N > 1/\mu$, concluímos que existe uma constante $N_0 > 0$ tal que,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -N_0 \mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (28)$$

Isso é o suficiente para provar o teorema. □

Observação 2.1. *Embora o decaimento exponencial da energia para zero seja provado sob certas condições, notamos em (10) que $\int_0^L |u_t|^2 dx < 2E(t)$, e portanto, tendo em mente a lei de dissipação (17), notamos a possibilidade de $\dot{E}(t) > -2\mu E(t)$ para todo $t \geq 0$. Isso sugere que, sob certas condições, a energia pode não cair exponencialmente para zero, mas para uma constante positiva, quando $t \rightarrow \infty$. Agora a questão principal é: o que fará com que esse problema perca a estabilidade exponencial para zero? Para elucidar nosso questionamento, antecipamos que o coeficiente de atrito μ desempenha um papel extremamente importante na estabilização exponencial da energia total e isso será discutido na próxima seção.*

3 Solução Exata e Caracterização da Energia Total

Nesta seção, investigamos sob quais condições o problema (7)–(9) viola o decaimento exponencial, mas precisamente sob quais condições o decaimento uniforme da energia para zero não ocorrerá. Para isso, utilizamos o método de separação de variáveis para encontrar a solução exata do problema e em seguida construímos uma caracterização para a energia, isso nos levará a entender melhor a falta de estabilidade exponencial para zero.

Proposição 3.1 (Solução exata). *A solução exata do problema (7)–(9) é dada pelo desenvolvimento da série de Fourier*

$$u(x, t) = e^{-\frac{\pi a \nu}{4L} t} \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k \cosh \left(\frac{\pi a}{4L} \nu \Theta_k(\nu) t \right) + b_k \sinh \left(\frac{\pi a}{4L} \nu \Theta_k(\nu) t \right) \right] \sin \left(\frac{k \pi x}{L} \right), \quad (29)$$

onde $\Theta_k(\nu) := \sqrt{1 - 16k^2/\nu^2}$ e a_k, b_k são os coeficientes de Fourier.

Demonstração. Assumindo o ansatz com a forma

$$u(x, t) = S(t) \varphi(x) \quad (30)$$

e substituindo na Eq. (7), obtemos

$$S''(t) \varphi(x) - a^2 S(t) \varphi''(x) + \mu S'(t) \varphi(x) = 0 \quad (31)$$

consequentemente,

$$a^2 \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{S''(t) + \mu S'(t)}{S(t)} = -\lambda. \quad (32)$$

Para soluções não triviais, usamos $\lambda > 0$. Levando em consideração as condições de contorno (8), obtemos o problema dos autovalores

$$\begin{cases} a^2 \varphi''(x) + \lambda \varphi(x) = 0, \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0. \end{cases} \quad (33)$$

Tendo em mente as condições de contorno homogêneas $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ podemos assumir que os autovetores são dados por $\varphi(x) = \sin(k\pi x/L)$ com autovalores $\lambda = \lambda_k = a^2 k^2 \pi^2 / L^2$. Retornando para (32), denotamos $S = S_k$ com $k \in \mathbb{Z}$ e obtemos a equação diferencial ordinária

$$S_k''(t) + \mu S_k'(t) + \lambda_k S_k(t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (34)$$

Aqui, consideramos $S_k(t) = e^{zt}$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$ e substituímos na equação acima para obter a equação característica

$$z^2 + \mu z + \lambda_k = 0. \quad (35)$$

Resolvendo a equação (35) e tendo em mente que $\mu := \pi a \nu / 2L$, obtemos

$$z_{1,2}(\nu) := z_{1,2} = -\frac{\pi a \nu}{4L} \pm \frac{\pi a \nu}{4L} \Theta_k(\nu), \quad (36)$$

onde $\Theta_k(\nu) := \sqrt{1 - 16k^2/\nu^2}$. Consequentemente, obtemos a solução geral dada por

$$S_k(t) = e^{-\frac{\pi a \nu}{4L} t} \left[a_k \cosh \left(\frac{\pi a}{4L} \nu \Theta_k(\nu) t \right) + b_k \sinh \left(\frac{\pi a}{4L} \nu \Theta_k(\nu) t \right) \right], \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \forall t > 0, \quad (37)$$

onde a_k e b_k são os coeficientes de Fourier. Assim, o resultado é estabelecido. $\square$

Conforme já mencionado no início deste artigo (Seção 1), aumentando arbitrariamente o parâmetro de atrito, a taxa de decaimento exponencial para zero se deteriora com o tempo. Para melhor compreender este fenômeno, é necessário analisar quantitativamente o comportamento da energia total e para isso, precisamos caracterizar a energia total do sistema. Uma maneira de fazer isso é considerar a solução exata, mais precisamente na forma particular

$$u(x, t) = D(e^{z_1(\nu)t} + e^{z_2(\nu)t})\varphi(x), \quad (38)$$

onde $\varphi(x) = \sin(k\pi x/L)$ e $D \in \mathbb{R}_*^+$ é a amplitude. O teorema a seguir, que é o principal resultado desta seção, fornece a caracterização da energia total e mostra seu limite inferior quando não decai exponencialmente para zero ($\nu > 4k$).

Teorema 3.1 (Caracterização da Energia). *A energia total do problema (7)–(9) para uma solução particular na forma $u(x, t) = D(e^{z_1(\nu)t} + e^{z_2(\nu)t})\varphi(x)$ com $z_{1,2}(\nu)$ no qual a solução da equação característica (35), é dada por*

$$E_\nu(t) = \begin{cases} \frac{\pi^2 a^2 \nu^2}{16L} D^2 e^{-\frac{\pi a \nu}{2L} t} \left[\cos\left(\frac{\pi a \nu}{2L} \hat{\Theta}_k(\nu) t\right) + \hat{\Theta}_k(\nu) \sin\left(\frac{\pi a \nu}{2L} \hat{\Theta}_k(\nu) t\right) \right] \\ + \frac{\pi^2 a^2 k^2}{L} D^2 e^{-\frac{\pi a \nu}{2L} t}, \text{ se } \nu < 4k; \\ \frac{\pi^2 a^2 \nu^2}{8L} D^2 e^{-\frac{\pi a \nu}{2L} t}, \text{ se } \nu = 4k; \\ \frac{\pi^2 a^2 \nu^2}{32L} D^2 \left[\Lambda_1(\nu) e^{-\frac{\pi a \nu}{2L} \Lambda_1(\nu) t} + \Lambda_2(\nu) e^{-\frac{\pi a \nu}{2L} \Lambda_2(\nu) t} \right] \\ + \frac{\pi^2 a^2 k^2}{L} D^2 e^{-\frac{\pi a \nu}{2L} t}, \text{ se } \nu > 4k, \end{cases} \quad (39)$$

onde $D > 0$ é a amplitude, $\hat{\Theta}_k(\nu) := \sqrt{16k^2/\nu^2 - 1} e$

$$\Lambda_{1,2}(\nu) := 1 \pm \Theta_k(\nu) \text{ com } \Theta_k(\nu) := \sqrt{1 - 16k^2/\nu^2}. \quad (40)$$

Além disso, se $\nu \rightarrow \infty$, prova que $E_\nu(t)$ converge pra uma assíntota horizontal y , i.e.,

$$E_\nu(t) \searrow y := \frac{a^2 k^2 \pi^2}{4L} D^2, \quad \forall t > 0. \quad (41)$$

Demonstração. Consideramos a solução particular na forma $u(x, t) = D(e^{z_1(\nu)t} + e^{z_2(\nu)t})\varphi(x)$ e substituímos na energia total definida em (10) para obter

$$E_\nu(t) = \frac{LD^2}{4} \left| z_1(\nu) e^{z_1(\nu)t} + z_2(\nu) e^{z_2(\nu)t} \right|^2 + \frac{a^2 k^2 \pi^2}{4L} D^2 \left| e^{z_1(\nu)t} + e^{z_2(\nu)t} \right|^2, \quad (42)$$

onde $z_{1,2}$ é a solução da equação característica (35) dada por,

$$z_{1,2}(\nu) = -\frac{\pi a \nu}{4L} \pm \frac{\pi a \nu}{4L} \Theta_k(\nu), \text{ com } \Theta_k(\nu) := \sqrt{1 - 16k^2/\nu^2}. \quad (43)$$

Agora analisamos os regimes de energia para $\nu \leq 4k$ (atrito viscoso) e para $\nu > 4k$ (atrito Coulombiano).

i) Se $\nu < 4k$, consideramos a solução $z_{1,2} \in \mathbb{C}$ dado em (43) e fazemos as seguintes simplificações

$$\left| z_1 e^{z_1 t} + z_2 e^{z_2 t} \right|^2 = \left| \left(\operatorname{Re}(z_1) + i \operatorname{Im}(z_1) \right) e^{\left(\operatorname{Re}(z_1) + i \operatorname{Im}(z_1) \right) t} + \left(\operatorname{Re}(z_2) + i \operatorname{Im}(z_2) \right) e^{\left(\operatorname{Re}(z_2) + i \operatorname{Im}(z_2) \right) t} \right|^2.$$

Fornecido o $\operatorname{Re}(z_2) = \operatorname{Re}(z_1)$ e $\operatorname{Im}(z_2) = -\operatorname{Im}(z_1)$, temos

$$\begin{aligned} \left| z_1 e^{z_1 t} + z_2 e^{z_2 t} \right|^2 &= e^{2\operatorname{Re}(z_1)t} \left| \operatorname{Re}(z_1) \left(e^{i\operatorname{Im}(z_1)t} + e^{-i\operatorname{Im}(z_1)t} \right) + i\operatorname{Im}(z_1) \left(e^{i\operatorname{Im}(z_1)t} - e^{-i\operatorname{Im}(z_1)t} \right) \right|^2 \\ &= 4e^{2\operatorname{Re}(z_1)t} \left| \operatorname{Re}(z_1) \cos(\operatorname{Im}(z_1)t) - \operatorname{Im}(z_1) \sin(\operatorname{Im}(z_1)t) \right|^2. \end{aligned}$$

Como $\operatorname{Re}(z_1) = -\pi a\nu/4L$ e $\operatorname{Im}(z_1) = \pi a\nu\hat{\Theta}_k(\nu)/4L$, onde $\hat{\Theta}_k(\nu) := \sqrt{16k^2/\nu^2 - 1}$, segue que

$$\left| z_1 e^{z_1 t} + z_2 e^{z_2 t} \right|^2 = \frac{\pi^2 a^2 \nu^2}{4L^2} e^{-\frac{\pi a\nu}{2L}t} \left| \cos\left(\frac{\pi a\nu}{4L}\hat{\Theta}_k(\nu)t\right) + \hat{\Theta}_k(\nu) \sin\left(\frac{\pi a\nu}{4L}\hat{\Theta}_k(\nu)t\right) \right|^2. \quad (44)$$

Similarmente, obtemos

$$\left| e^{z_1 t} + e^{z_2 t} \right|^2 = 4e^{-\frac{\pi a\nu}{2L}t} \cos^2\left(\frac{\pi a\nu}{4L}\hat{\Theta}_k(\nu)t\right). \quad (45)$$

Combinando as equações (42), (44), (45) e ao desenvolver o quadrado da soma, ficamos com

$$\begin{aligned} E_\nu(t) &= \frac{\pi^2 a^2 \nu^2}{16L} D^2 e^{-\frac{\pi a\nu}{2L}t} \left[\cos\left(\frac{\pi a\nu}{2L}\hat{\Theta}_k(\nu)t\right) + \hat{\Theta}_k \sin\left(\frac{\pi a\nu}{2L}\hat{\Theta}_k(\nu)t\right) \right] \\ &+ \frac{\pi^2 a^2 k^2}{L} D^2 e^{-\frac{\pi a\nu}{2L}t}. \end{aligned} \quad (46)$$

ii) Se $\nu = 4k$, o caso é facilmente verificado, basta assumir a solução particular na forma $u(x, t) = 2De^{-(\pi a\nu/4L)t}\varphi(x)$ para obter

$$E_\nu(t) = \frac{\pi^2 a^2 \nu^2}{8L} D^2 e^{-\frac{\pi a\nu}{2L}t}. \quad (47)$$

iii) Se $\nu > 4k$, consideramos a equação (42) e fazemos algumas simplificações análogas para o item *i)* com $z_{1,2} \in \mathbb{R}$. Assim, obtivemos

$$\begin{aligned} E_\nu(t) &= \frac{\pi^2 a^2 \nu^2}{32L} D^2 \left(1 + \Theta_k(\nu) \right) e^{-\frac{\pi a}{2L}\nu(1+\Theta_k(\nu))t} \\ &+ \frac{\pi^2 a^2 \nu^2}{32L} D^2 \left(1 - \Theta_k(\nu) \right) e^{-\frac{\pi a}{2L}\nu(1-\Theta_k(\nu))t} + \frac{\pi^2 a^2 k^2}{L} D^2 e^{-\frac{\pi a\nu}{2L}t}. \end{aligned} \quad (48)$$

Assumindo $\Lambda_{1,2}(\nu) := 1 \pm \Theta_k(\nu)$ temos

$$E_\nu(t) = \frac{\pi^2 a^2 \nu^2}{32L} D^2 \left[\Lambda_1(\nu) e^{-\frac{\pi a}{2L}\nu\Lambda_1(\nu)t} + \Lambda_2(\nu) e^{-\frac{\pi a}{2L}\nu\Lambda_2(\nu)t} \right] + \frac{\pi^2 a^2 k^2}{L} D^2 e^{-\frac{\pi a\nu}{2L}t}. \quad (49)$$

Para concluir, resta provar a convergência dada em (41). Para isto, apenas fazemos $\nu \rightarrow \infty$ na equação (49) para verificar os limites

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu^2 \Lambda_1(\nu) e^{-\frac{\pi a}{2L}\nu\Lambda_1(\nu)t} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu^2 \Lambda_2(\nu) e^{-\frac{\pi a}{2L}\nu\Lambda_2(\nu)t} = 8k^2, \quad \forall t > 0.$$

Consequentemente, será provado que

$$E_\nu(t) \searrow y := \frac{k^2 \pi^2 a^2}{4L} D^2, \quad \forall t > 0. \quad (50)$$

□

Observação 3.1. Com a caracterização da energia total, podemos entender como o coeficiente de atrito $\mu = \pi a \nu / 2L$ pode afetar qualitativamente o comportamento da energia total, causando uma falta de decaimento exponencial para zero (item iii) . Nesse caso, é evidente que a energia não decai exponencialmente para zero, mas para uma assíntota horizontal y . Além disso, a caracterização também nos permitiu identificar a assíntota horizontal e a faixa de valores do coeficiente de amortecimento que diferenciam o atrito viscoso ($\nu < 4k$ e $\nu = 4k$) e Coulombiano ($\nu > 4k$).

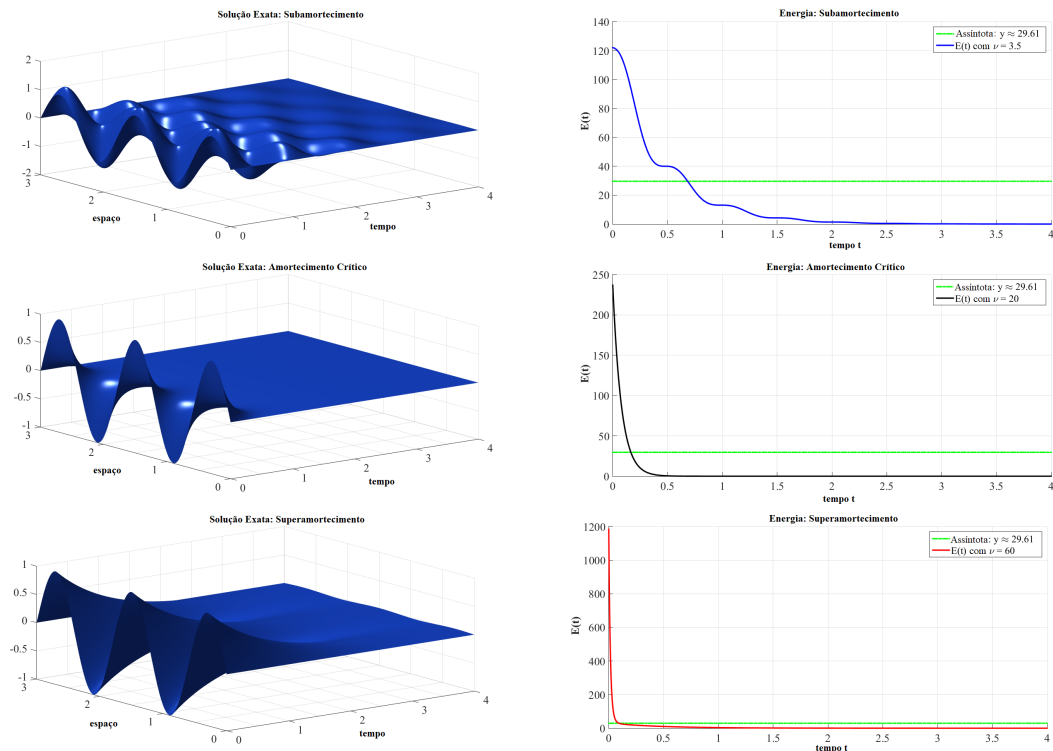
4 Resultados da Simulação

Nesta seção, apresentamos os resultados das simulações feitas a partir da solução exata e da energia total do problema (7)–(9). Para isto, adotamos os seguintes dados: $L = 3$, $a = 1.2$, $k = 5$ e $D = 1$.

4.1 Solução exata e energia total

Aqui nossa intenção é mostrar que os três comportamentos das soluções (subamortecimento, amortecimento crítico e superamortecimento) estão diretamente associados ao coeficiente de atrito. Abaixo (ver Figura 2), apresentamos a solução exata e os gráficos de energia, respectivamente.

Figura 2: Solução exata e energia total do problema (7)–(9). Nesta simulação, usamos $\nu \in \{3.5, 20, 60\}$ para três diferentes casos: subamortecimento, amortecimento crítico e superamortecimento, respectivamente.



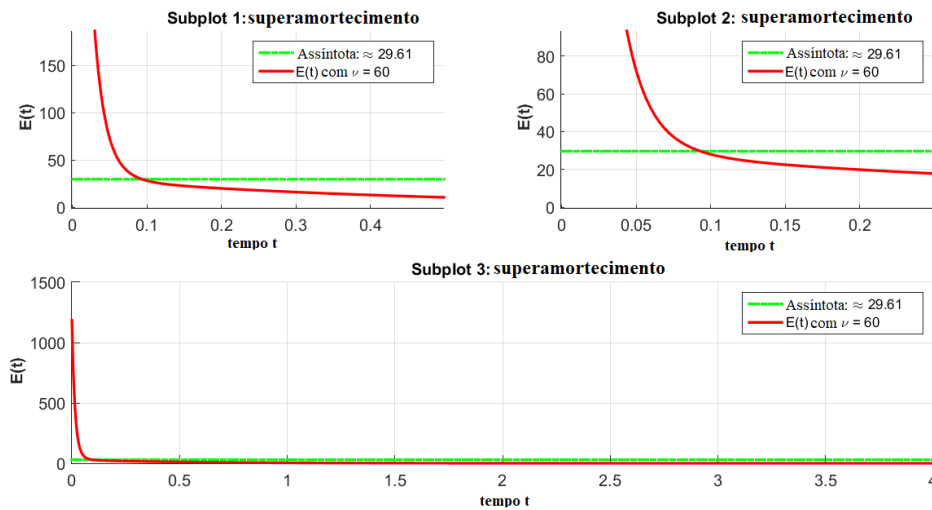
No caso clássico de subamortecimento do movimento harmônico, as oscilações estão presentes na solução, mas suas amplitudes são rapidamente amortecidas para zero ao longo do

tempo pela diminuição exponencial $e^{-\mu t/2}$. Por outro lado, no amortecimento crítico, o decaimento da solução para zero é suficientemente rápido, a ponto de não haver oscilações. No caso do superamortecimento, não há oscilações na solução ao longo do tempo, porém, não decai para zero quando consideramos valores de $\nu > 4k$.

Para melhor visualizar a falta de estabilidade exponencial para zero, plotamos separadamente o gráfico de energia mostrado nas Figuras 3 e 4 para o caso de superamortecimento considerando dois valores particulares: $\nu = 60$ e $\nu = 200$.

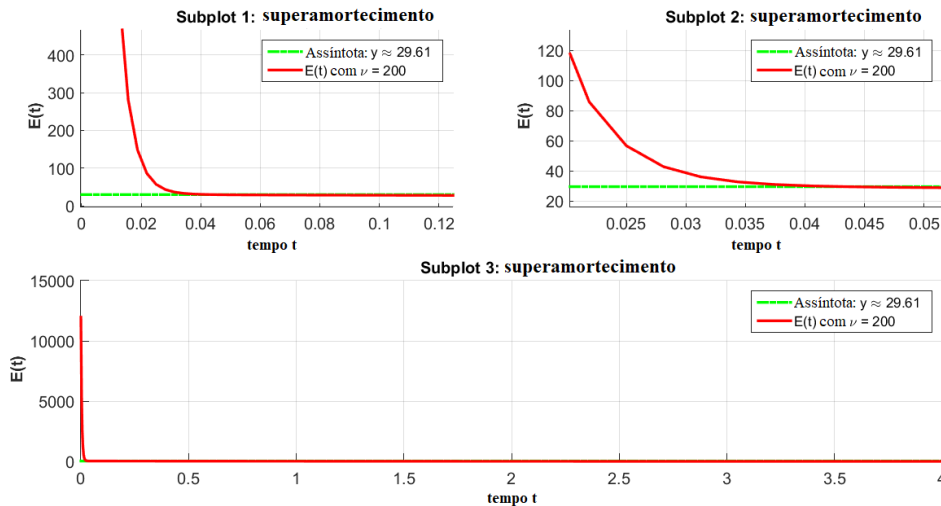
Caso I: Neste caso, consideramos o parâmetro de amortecimento $\nu = 60$ e criamos uma figura dividida em três subplots. Ampliando os subplots 1 e 2 é mostrado que existe uma assíntota horizontal y acima do eixo das abcissas, dificultando o amortecimento exponencial para zero da energia total.

Figura 3: Gráfico da Energia $E(t)$ plotado usando $\nu = 60$.



Caso II: Neste caso, consideramos o parâmetro de amortecimento $\nu = 200$ e também criamos uma figura dividida em três subplots. Ampliando os subplots 1 e 2 para mostrar que a energia se estabiliza na assíntota horizontal y .

Figura 4: Gráfico da Energia $E(t)$ plotado usando $\nu = 200$.



Observação 4.1. Olhando as Figuras 3 e 4, percebemos que conforme o parâmetro ν aumenta para valores maiores que $4k$ ($\nu = 60$ e $\nu = 200$), a energia tende a se estabilizar no limite da assíntota horizontal ($y = a^2 k^2 \pi^2 D^2 / 4L \approx 29,6088$). Este comportamento caracteriza a falta de estabilidade exponencial para zero.

Na Tabela 1, são apresentados os valores de $\omega(\mu_\nu)$ para diferentes valores aumentados de ν .

Tabela 1: Taxas de Decaimento.

	$\nu = 1$	$\nu = 5$	$\nu = 10$	$\nu = 15$	$\nu = 20$	$\nu = 21$	$\nu = 25$	$\nu = 60$
$\omega(\mu_\nu)$	-0.6313	-3.1515	-6.3166	-9.4158	-12.5663	-9.3390	-6.3814	-2.2075

Observa-se que para $0 < \nu \leq 20$ os valores de $\omega(\nu)$ estão diminuindo, enquanto para $20 < \nu < \infty$ os valores de $\omega(\mu_\nu)$ estão aumentando.

De acordo com Cox e Zuazua [3], é possível afirmar que a taxa ótima de decaimento exponencial para os dados simulados é obtida para $\nu = 20$, que é dado por

$$\omega(\mu_\nu) = \inf \left\{ \omega : \exists M(\omega) > 0 \text{ s.t. } E(t) \leq M E(0) e^{\omega t} \right\} \approx -12.5663. \quad (51)$$

Além disso, é possível notar que para valores de $\nu > 20$, a energia total passa a sofrer uma perda de decaimento exponencial para zero. A Tabela 2 apresenta as principais informações sobre o limite inferior de energia total, tipos de atritos e tipos de amortecimento presentes no modelo para diferentes valores de ν .

Tabela 2: Propriedades vs. parâmetros ν . Notamos na primeira linha da tabela que o limite inferior da energia tende para o valor da assíntota $y \approx 29.6088$, na medida em que ν cresce para valores maiores que $4k = 20$.

	$\nu = 3.5$	$\nu = 2 \cdot 10^1$	$\nu = 2 \cdot 10^2$	$\nu = 2 \cdot 10^3$	$\nu = 2 \cdot 10^4$	$\nu = 2 \cdot 10^5$
$\liminf_{t \rightarrow \infty} E(t)$	$1 \cdot 10^{-4}$	0	2.389	$2.302 \cdot 10^1$	$2.887 \cdot 10^1$	$2.953 \cdot 10^1$
Subamortecimento	✓	×	×	×	×	×
Amortecimento Crítico	×	✓	×	×	×	×
Superamortecimento	×	×	✓	✓	✓	✓

Para analisar a Tabela 2, é importante perceber que o coeficiente ν aparece na equação diferencial de origem no termo da contribuição de amortecimento. Então, o aumento deste parâmetro indica que fisicamente há uma maior contribuição das forças dissipativas que atenuam o movimento oscilatório. Isso pode ser observado comparando os resultados com $\nu = 3.5$ e $\nu = 2 \cdot 10^1$. É possível perceber que realmente ocorre o amortecimento do sistema, sendo o mais severo em $\nu = 2 \cdot 10^1$, passando de subamortecimento para amortecimento crítico. Quando o valor de ν é aumentado acima $2 \cdot 10^1$ descobrimos que a energia do sistema tende a um valor constante diferente de zero. Nesse cenário, observa-se que o sistema não possui mais a natureza oscilatória devido à intensidade das forças viscosas.

5 Conclusões

Neste estudo, foram avaliados os tipos de decaimento presentes na equação hiperbólica que descreve o deslocamento vibracional da coluna do sistema de bombeio mecânico para um poço

vertical, variando o valor de amortecimento em relação ao atrito viscoso do modelo. Os resultados mostram que é possível obter um valor limite de atenuação viscoso. Observou-se também que, para determinados coeficientes de atrito, a energia produzida pelo amortecimento promovido pelo fluido no anular da coluna decai para uma assíntota horizontal, atingindo então um valor máximo de atenuação vibracional, indicando a ausência de decaimento exponencial. Esse resultado indica que para o modelo proposto por Gibbs, com base na equação de onda, é possível determinar em que valor de atenuação tem a mudança da natureza viscosa para a coulombiana. Este seria o cenário de um sistema superamortecido onde um fluido altamente viscoso ou um bloqueio mecânico atua promovendo a atenuação vibracional, neste caso evitando que a coluna retorne a sua posição inicial após o processo de flambagem. Vários processos podem impedir o movimento da coluna, como bloqueio de gás e problemas relacionados a garantia de fluxo. Desta forma, a detecção e análise das energias de amortecimento descritas neste artigo são uma ferramenta poderosa para identificar problemas operacionais em poços verticais que podem ser modelados pela equação de Gibbs.

Financiamento

Anderson J. A. Ramos e Alínia R. Santos agradecem ao Pro-doutor/Propesp /UFPA pelo suporte financeiro. Dilberto S. Almeida Júnior agradece ao CNPq pelo suporte financeiro através do projeto "*New guidelines for dissipative Timoshenko type systems at light of the second spectrum*" (Concedido CNPq 310423/2016-3). Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Pará (Fapespa - Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisas), Universidade Federal do Pará pelo apoio financeiro na realização desta pesquisa.

Referências

- [1] Aliev, T., Rzayev, A., Guluyev, G., Alizada, T., Rzayeva, N.: Robust technology and system for management of sucker rod pumping units in oil wells. *Mechanical Systems and Signal Processing* **99**, 47–56 (2018)
- [2] Beale, D., Lee, S.: A mode method for an elastic rod in a fluid pumping system. *Journal of sound and vibration* **179**(1), 97–108 (1995)
- [3] Cox, S., Zuazua, E.: The rate at which energy decays in a damped string. *Communications in partial differential equations* **19**(1-2), 213–243 (1994)
- [4] Doty, D.R., Schmidt, Z., et al.: An improved model for sucker rod pumping. *Society of Petroleum Engineers Journal* **23**(01), 33–41 (1983)
- [5] Duan, D., Geng, Z., Jiang, S., Li, S.: Failure mechanism of sucker rod coupling. *Engineering Failure Analysis* **36**, 166–172 (2014)
- [6] Freitas, P.: Optimizing the rate of decay of solutions of the wave equation using genetic algorithms: a counterexample to the constant damping conjecture. *SIAM journal on control and optimization* **37**(2), 376–387 (1999)
- [7] Gibbs, S., et al.: Predicting the behavior of sucker-rod pumping systems. *Journal of Petroleum Technology* **15**(07), 769–778 (1963)
- [8] Lea, J., et al.: Modeling forces on a beam-pump system during pumping of highly viscous crude. *SPE production engineering* **6**(04), 420–426 (1991)

- [9] Lopez, I., Nijmeijer, H.: Prediction and validation of the energy dissipation of a friction damper. *Journal of Sound and Vibration* **328**(4-5), 396–410 (2009)
- [10] Neves, A.F., Boldrini, J.L.: Periodic motions of sucker rod pumping systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* **22**(7), 797–808 (1994)
- [11] Pazy, A.: *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44. Springer Science & Business Media (2012)
- [12] Rauch, J.: Qualitative behavior of dissipative wave equations on bounded domains. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **62**(1), 77–85 (1976)
- [13] Rivera, J.M.: Energy decay rates in linear thermoelasticity. *Funkc. Ekvacioj* **35**(1), 19–30 (1992)
- [14] Romero, O.J., Almeida, P.: Numerical simulation of the sucker-rod pumping system. *Ingeniería e Investigación* **34**(3), 4–11 (2014)
- [15] Shardakov, I., Wasserman, I.: Numerical modelling of longitudinal vibrations of a sucker rod string. *Journal of Sound and Vibration* **329**(3), 317–327 (2010)
- [16] Wang, D.y., Liu, H.z.: Dynamic modeling and analysis of sucker rod pumping system in a directional well. In: *Mechanism and Machine Science*, pp. 1115–1127. Springer (2017)
- [17] Xing, M., Dong, S.: 1258. a new nonlinear longitudinal vibration model of belt driving system applied in energy saving. *Journal of Vibroengineering* **16**(3) (2014)
- [18] Xing, M., Dong, S., et al.: A new simulation model for a beam-pumping system applied in energy saving and resource-consumption reduction. *SPE Production & Operations* **30**(02), 130–140 (2015)

ANEXO A - Artigo Publicado

Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering (2020) 42:108
<https://doi.org/10.1007/s40430-020-2191-z>

REVIEW



Energy dissipation analysis of oil wells sucker rod string

Anderson J. A. Ramos¹ · Dilberto S. Almeida Júnior² · Alínia R. Santos³ · Edson A. Araújo³ · Pedro T. P. Aum³

Received: 21 November 2018 / Accepted: 13 January 2020
 © The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering 2020

Abstract

Sucker rod pumping systems are well-known artificial lift methods, thereby improving the efficiency of oil production. However, the periodic movement performed by the string makes the system susceptible to mechanical failures, promoting operational shutdowns. This paper presents a new approach to the vibrational analysis of the sucker rod string through a study of energy decay. The damped wave equation representing the oscillatory motion of the sucker rod lift system was solved analytically, and the energy of the solution was characterized by analyzing its behavior in space and time. The results show that the energy has a dissipative nature, promoting the vibrational attenuation in three different exponential decay forms. The results allow to characterize the damping limits of each exponential decay type. The approach proposed in this paper, by energy decay analysis, can serve as base to the development of new methodologies capable to detect anomalies and optimum operational conditions in sucker rod pump system.

Keywords Wave equation · Analytical solution · Energy dissipation

1 Introduction

Sucker rod pumping is one of the most widespread artificial lift methods in onshore oil production, and it is widely used due to its easy installation, wide range of work flows, well-known operational knowledge and effectiveness to promote

low downhole pressures [1]. Figure 1a illustrates the main parts of the sucker rod pumping system. The string column is connected with the subsurface pump which creates a differential pressure at the bottom of the well, pumping the fluids from the reservoir to the surface [2]. Figure 1b and c shows the details of the subsurface pump valves position during the downward (downstroke) and the upward (upstroke) string column movements. During the upstroke, the fluid confined in the annular space between the column and the casing forces the closing of the traveling valve. This reduces the pressure below this valve by opening the pump foot valve. Thus, the oil flows into the pump chamber. During the downstroke, the compression of the fluids closes the foot valve and opens the tubing standing valve. Even during downstroke, the pressures are equalized by opening the tubing standing valve, thus beginning a new cycle.

One of the most critical parts of the system is the rod string that connects the pump unit to the subsurface pump. This column is composed by sections, connected by forged steel joints. During the periodic movement, the rod is subjected to different efforts and need to be designed to support its own weight load, the fluid column weight, inertial effect resulting from the inversion of rod motion and friction forces with the casing in directional wells. The compression and tensile stresses cause vibrational effects in the string, attenuated by the fluid viscous friction and elastic forces of the

Technical Editor: Wallace Moreira Bessa, D.Sc.

✉ Anderson J. A. Ramos
 ramos@ufpa.br
 Dilberto S. Almeida Júnior
 dilberto@ufpa.br
 Alínia R. Santos
 santosalinia@gmail.com
 Edson A. Araújo
 edsonaa@ufpa.br
 Pedro T. P. Aum
 pedroaum@ufpa.br

¹ Faculty of Mathematics, Federal University of Pará, Raimundo Santana Cruz Street, s/n, Salinópolis, PA 68721-000, Brazil

² PhD Program in Mathematics, Federal University of Pará, Augusto Corrêa Street, 01, Belém, PA 66075-110, Brazil

³ Petroleum Engineering, Federal University of Pará, Raimundo Santana Cruz Street, s/n, Salinópolis, PA 68721-000, Brazil

AGRADECIMENTOS

Agradeço

Primeiramente a Deus por ter me ajudado a ser forte e a nunca desistir dos meus sonhos e objetivos durante todos os anos da graduação.

Minha família por terem me apoiado a seguir sempre em frente com força e garra, sendo sempre honesta e determinada. É principalmente para eles que dedico essa conquista de finalizar minha graduação em engenharia. Meus sinceros agradecimentos à Leidmar Rodrigues, Antonio Santos, Antonio Filho, João Neto e também à minha cunhada, Vanessa Gonçalves.

Ao meu professor orientador Dr. Anderson Ramos por ter acreditado em mim desde o início da graduação, sempre paciente e dedicado, me incentivando a sempre dar o meu melhor em todas as pesquisas.

Aos meus amigos que me acompanharam nesta jornada, em especial ao Luiz Fernando Carvalho pelo apoio, companheirismo e incentivo durante estes anos.

E a todos os meus professores do curso pelo conhecimento repassado e apoio, em especial aos professores Dr. Pedro Aum, Dr. Edson Araújo e Dr. Cláudio Lucas.