APLICAÇÕES DO TEOREMA DOS RESÍDUOS NO CÁLCULO DE INTEGRAIS

Jorsi José da Conceição Cunha Júnior[1]

Jorsi José da Conceição Cunha[2]

Eixo: Matemática Pura

Resumo

A resolução de certas integrais através de métodos tradicionais do cálculo se mostra demasiado exaustivo ou insuficiente, desta forma, este artigo apresenta uma poderosa ferramenta capaz de simplificar estes desenvolvimento, onde abordaremos o Teorema dos Resíduos. Este Teorema, desenvolvido por Cauchy em 1826 enuncia basicamente que a integral de uma função analítica ao longo de uma curva fechada simples que contorna singularidades isolada é controlada pela simples soma dos resíduos. A partir de ilustrações que serão imprescindíveis para o objetivo final, ilustraremos o Teorema dos Resíduos e analisaremos duas aplicações relacionadas as integrais.

Palavras-chave: Funções Analíticas; Cauchy, Singularidade; Teorema dos Resíduos.

.

1. Introdução

A teoria das funções de uma variável complexa é uma extensão natural das funções de uma variável real. Desde seu surgimento, no final do século XVIII, esta teoria tem se mostrado uma das áreas mais frutíferas da matemática e de importância fundamental, tanto na matemática pura como nas áreas aplicadas [1]. No estudo de integrais de funções complexas, o nome resíduo foi introduzido em 1826 por A. L. Cauchy, para expressar a diferença das integrais de uma função sobre dois caminhos com as mesmas extremidades delimitando uma região onde a única singularidade é um pólo da função [2]. Cauchy estabeleceu que as integrais sobre caminhos fechados de funções analíticas num conjunto de pontos isolados onde têm pólos, podem ser calculadas por simples soma de resíduos no então chamado Teorema dos Resíduos. Este teorema tem uma vasta gama de aplicações. O seu desenvolvimento inicial confundiu-se com o próprio

[1] Discente do Curso de Licenciatura de Matemática, Faculdade de Matemática, Universidade Federal do Pará, CUMB – Breves/PA, E-mail: jorsicunhajr2@ufpa.br
[2] Faculdade de Matemática, Universidade Federal do Pará, CUMB – Breves/PA, E-mail: jorsicunha@ufpa.br

desenvolvimento de áreas de aplicação, como cartografia, hidrodinâmica, aerodinâmica, elasticidade, eletrostática, eletromagnetismo e processos de difusão em química e em biologia [3].

O Teorema dos Resíduos é um dos teoremas fundamentais na análise complexa uma vez que pode ser usado para integrar alguns tipos de funções reais que são difíceis, ou mesmo impossíveis, de serem expressa em termos de funções fundamentais, tornando-o um instrumentomuinto util no cálculo de integrais [4]. Através do Teorema dos Resíduos podemos verificar que a integral de uma função analítica de uma variável complexa tomada ao longo de um caminho depende inteiramente do comportamento da função em pontos de descontinuidade dentro o caminho [5], tornando o Cálculo do resíduo fundamental para a teoria das funções complexas.

Desta forma, neste artigo apresentamos um estudo sobre o Teorema dos Resíduos, mostrando primeiramente as condições de Cauchy, necessárias e suficientes para integração de funções analíticas, mostra ainda a definição de funções analíticas e sua integração, e por fim demostra o Teorema dos Resíduos cujo o objetivo de aplicá-lo no cálculo de integrais que envolvem funções trigonométricas.

2. Fundamentação Teórica

Nesta seção, serão apresentadas definições e resultados fundamentais para a compreensão dos métodos utilizados para o cálculo de integrais reais utilizando a Teoria dos Resíduos.

2.1 – Condições de Cauchy-Riemman

Consideremos uma função $f: D \to \mathbb{C}$, onde D é um subconjunto de $\mathbb{C}$. A função $f$diz-se uma função complexa de uma variável complexa, sendo uma correspondência

que associa a cada elemento $z \in D$ um único elemento w no plano complexo (designado por imagem de z por f ou valor de f em z):

$$w = f(z) = f(x + yi) = u(x,y) + v(x,y)i,$$

onde $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são funções reais de duas variáveis reais x e y, designadas por parte real e parte imaginária de $f(z)$, respectivamente.

Proposição 2.1: Se a função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ admite derivadas, então

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

Além disso, a derivada da função f é definida por $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}$

As equações (1) são chamadas condições de Cauchy-Riemann.

Proposição 2.2: Sejam $u = u(x,y)$ e v= $v(x,y)$ funções reais com derivadas parciais de primeira ordem contínuas no ponto (x_0, y_0). Se as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas em $z_0 = x_0 + iy_0$, então $f = u(x,y) + i\,v(x,y)$ será derivável em z_0.

2.2 - Funções analíticas

Uma função f de variável complexa z é dita analítica num ponto z_0 pertencente ao domínio de f, se for derivável em todos os pontos de um disco aberto centrado em z_0. Dizemos que f é analítica, se for analítica em todos os pontos do domínio [6].

Observação: Usa-se também o termo ***holomorfa*** como sinônimo de Função analítica.

Exemplo 1: Verificar se a função $f(z) = x^2 - 2x + 2xyi - y^2 - 2yi$ é analítica.

Solução:Temos $f(z) = x^2 - 2x + 2xyi - y^2 - 2yi = (x^2 - y^2 - 2x) + (2xy - 2y)i$.

Então

$$u = x^2 - y^2 - 2x \text{ e } v = 2xy - 2y.$$

Calculando as derivadas parciais temos,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2 \text{ e } \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \text{ e } -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$$

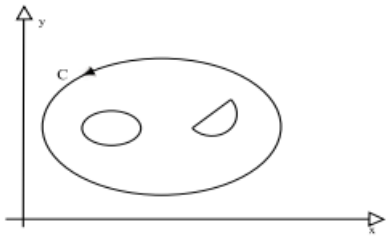
Como as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas em todos os pontos do plano complexo, concluímos que f é derivável em $\mathbb{C}$ e assim f é analítica.

2.3 - Integração de Funções analíticas

Teorema de Cauchy-Goursat: Se $f(z)$ é analítica numa região simplesmente conexa do seu domínio, então

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

para todo caminho fechado C contido no domínio da função [7].



Demonstração: Como $f(z) = u + iv$ e $d(z) = dx + idy$, daí temos:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u + iv)(dx + idy) = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy)$$

Usando o Teorema de Green no plano,

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Temos:

$$\oint_C (udx - vdy) = \iint_S \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

E

$$\oint_C (vdx + udy) = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = \iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

Assim mostramos que $\oint_C f(z)dz = 0$

2.4 - Cálculo dos Resíduos

O cálculo de resíduos permite estender o teorema de Cauchy-Goursat para funções que possuam singularidades isoladas tipo polo no interior da curva C. Seja f uma função complexa de variável complexa. Diz-se que z_0 é um ponto singular de f (ou que f tem no ponto z_0 uma singularidade) se f não é analítica em z_0 (podendo existir em qualquer vizinhança de z_0 pontos onde a função é analítica). Se existe uma vizinhança de z_0 onde f é analítica, exceto no ponto z_0, então o ponto singular z_0 diz-se um ponto singular isolado (ou uma singularidade isolada) [8].

Teorema de Laurent: Seja f uma função analítica numa região angular $r < |z - z_0| < R$. Então para todo z nessa região $f(z)$ é representada por uma série de potências positivas e negativas de $(z - z_0)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

Onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{-n+1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Esse teorema é a forma expandida da famosa série de Laurent de f e é muito útil, pois nos permite estudar singularidades isoladas de funções complexas.

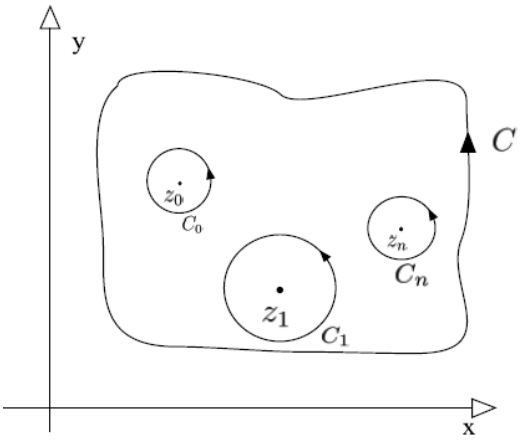
Teorema dos Resíduos: Seja C um caminho fechado tal que uma função f é analítica sobre C e no interior de C exceto num número finito de pontos singulares $z_0, z_1, \dots z_n$ interiores a C [2]. Então

$$\int_C f(z)dz = \pm 2\pi i[Res(z_0) + Res(z_1) + \cdots + Res(z_n)]$$

Onde $(+)$ indica o sentido positivo, ou seja, o sentido anti-horário e $(-)$ indica o sentido negativo, ou seja, o sentido horário. Sendo $Res(z_j) = \lim_{z \to z_j} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{f(z)(z - z_j)^n\}$, com o índice n indica o pólo. Se o pólo é simples $(n - 1)$, duplo $(n = 2)$, triplo $(n = 3)$ e assim por diante.

Demonstração: Para mostra o Teorema, vamos considerar caminhos C_j $(0 \leq j \leq n)$ fechados e orientados positivamente. Os caminhos C_j são traçados em torno de cada ponto singular z_j e inteiramente contidos em C.

Desta forma, os caminhos C_j formam juntamente com o caminho C a fronteira de uma região fechada multiplamente conexa em que f é analítica.



Pelo Teorema de Cauchy-Goursat, temos

$$\int_C f(z)dz - \int_{C_0} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz - \cdots - \int_{C_n} f(z)dz = 0$$

Ou seja,

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz$$

Desde que f é analítica no interior e sobre C_j , exceto no próprio z_j, temos pelo Teorema de Laurent que

$$Res(z_j) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_j} f(z)dz$$

Logo

$$\int_{C_j} f(z)dz = 2\pi i Res(z_j), \qquad 0 \leq j \leq n$$

Portanto

$$\int_C f(z)dz = \pm 2\pi i[Res(z_0) + Res(z_1) + \cdots + Res(z_n)]$$

3 Aspectos Metodológicos

Vamos apresentar alguns exemplos de integrais e utilizar o Teorema dos resíduos em suas resoluções.

4 Descrição e Análise dos Dados

Nesta seção vamos fazer a aplicação do Teorema dos resíduos na resolução e integrais.

Exemplo 01: $I = \int_0^{2\pi} \frac{cos\theta}{3+2cos\theta} d\theta$

Solução: Inicialmente devemos obter a extensão analítica do integrando. Lembrando que um número complexo $z = x + yi = |z|(cos\theta + isen\theta)$, onde $\theta = Arg(z)$, pode ser escrito na forma $z = |z|e^{i\theta}$ e sendo o raio trigonométricos ($|z| = 1$), temos:

$$z = e^{i\theta} \Longrightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \Longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

Considerando ainda que $cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}$, podemos escrever:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{cos\theta}{3 + 2cos\theta} d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z + z^{-1}}{2}}{3 + 2\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{1}{3 + z + z^{-1}} \frac{dz}{iz}$$

$$I = \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{z + z^{-1}}{3z + z^2 + 1} dz$$

Multiplicando a expressão acima por $\frac{z}{z}$ obtemos,

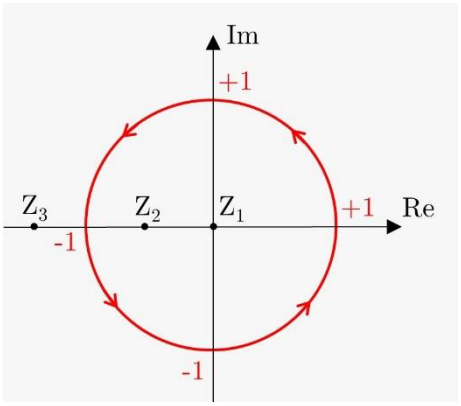
$$I = \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{z^3 + 3z^2 + z} dz$$

O próximo passo agora é calcular os pólos. Para isso tomamos a expressão do denominado do integrando e igualamos a zero,

$$z^3 + 3z^2 + z = 0 \implies z(z^2 + 3z + 1) = 0 \implies \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2} \\ z_3 = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Como $|z_3| > 1$, não serve. Desta forma os únicos pólos dentro do ciclo trigonométricos são z_1 e z_2, neste caso temos pólo simples, ou seja $n = 1$.

Analisando os contornos de integração e aplicando o Teorema dos resíduos, temos



$$I = \frac{1}{2\pi} . 2\pi i[Resi(z_1) + Resi(z_2)] = \pi[Resi(z_1) + Resi(z_2)]$$

Passamos agora a calcular os resíduos $Resi(z_1)$ e $Resi(z_2)$.

$$Resi(z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{f(z)(z - z_1)^n\}$$

Lembrndo que temos pólo simples, então

$$Resi(z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{1}{(1-1)!}\frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}}\{f(z)(z-z_1)^1\} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{0!}\left\{\frac{z^2+1}{z^3+3z^2+z}(z-0)^1\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{z^3+3z^2+z}.z = \lim_{z\to 0}\frac{z(z^2+1)}{(z-0)(z-z_2)(z-z_3)} = \lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{(z-z_2)(z-z_3)} =$$

$$= \frac{1}{z_2 z_3} = \frac{1}{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}.\frac{-3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{4}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{4}{9-3} = 1$$

$$Resi(z_2) = \lim_{z\to z_2}\frac{1}{0!}\left\{\frac{z^2+1}{z^3+3z^2+z}(z-z_2)^1\right\} = \lim_{z\to z_2}\frac{z^2+1}{z^3+3z^2+z}(z-z_2) =$$

$$= \lim_{z\to z_2}\frac{(z^2+1)(z-z_2)}{(z-0)(z-z_2)(z-z_3)} = \lim_{z\to z_2}\frac{(z^2+1)}{z(z-z_3)} = \frac{{z_2}^2+1}{z_2(z_2-z_3)} = \frac{{z_2}^2+1}{{z_2}^2-z_2z_3}$$

$${z_2}^2 = \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5-6\sqrt{5}+9}{4} = \frac{14-6\sqrt{5}}{4} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

$$z_2z_3 = \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{4} = \frac{9-5}{4} = 1$$

Assim,

$$Resi(z_2) = \frac{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}+1}{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}-1} = \frac{\frac{9-3\sqrt{5}}{2}}{\frac{5-3\sqrt{5}}{2}} = \frac{9-3\sqrt{5}}{5-3\sqrt{5}}$$

Portanto

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{cos\theta}{3+2cos\theta}d\theta = \pi\left(1+\frac{9-3\sqrt{5}}{5-3\sqrt{5}}\right) = \pi\left(\frac{14-6\sqrt{5}}{5-3\sqrt{5}}\right)$$

Exemplo 02: $I = \int_0^{\pi}\frac{1}{2-cos\theta}d\theta$

Solução: Inicialmente vamos ampliar o limite de integração da integral. Assim,

$$I = \int_0^{\pi}\frac{1}{2-cos\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2-cos\theta}d\theta$$

Em seguida vamos obter a extensão analítica. Sabendo que

$$cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2} \text{ e } d\theta = \frac{dz}{iz}$$

Temos

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2-cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{1}{2-\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)}\frac{dz}{iz}=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{2}{4-z-z^{-1}}\frac{dz}{iz}$$

$$=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{4z-z^2-1}$$

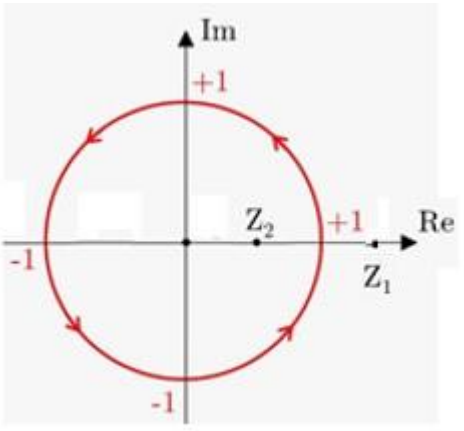
Agora vamos calcular os pólos. Assim temos,

$$4z-z^2-1=0\Longrightarrow z^2-4z+1=0\ \Longrightarrow z=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}\Longrightarrow z=2\pm\sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}z_1=2+\sqrt{3}\\ z_2=2-\sqrt{3}\end{cases}$$

No entanto, $|z_1|=\left[2+\sqrt{3}\right]>1$ não serve, $|z_2|=\left[2-\sqrt{3}\right]<1$ serve, deta forma temos $n=1$.

Analisando os contornos de integração e aplicando o Teorema dos resíduos, temos



$$I=\frac{1}{i}.2\pi i[Resi(z_2)]=2\pi[Resi(z_2)]$$

calculaando o resíduos $Resi(z_2)$. temos

$$Resi(\,z_2)=\lim_{z\to z_1}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{f(z)(z-z_2)^n\}$$

Como temos pólo simples, vem que

$$Resi(\,z_2)=\lim_{z\to z_2}\frac{1}{(1-1)!}\frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}}\{f(z)(z-z_2)^1\}=\lim_{z\to z_2}\frac{1}{0!}\left\{\frac{1}{4z-z^2-1}(z-z_2)^1\right\}=$$

$$= \lim_{z \to z_2} \frac{z - z_2}{(z - z_1)(z - z_2)} = \lim_{z \to z_2} \frac{1}{z - z_1} = \frac{1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{(2 - \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3})} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{6}$$

Portando

$$I = \int_0^{\pi} \frac{1}{2 - cos\theta} d\theta = 2\pi \left(\frac{-\sqrt{3}}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \pi$$

5 Considerações Finais

O trabalho apresentado descreve um método para calcular alguns tipos de integrais reais que, por natureza, são difíceis ou demais trabalhosas de serem calculadas pelas tecnicas tradicionais. Isso não apenas torna o cálculo de certas integrais mais fácil, mas também nos permite avaliar integrais no plano reais com o auxílio do plano complexo. No seu decorrer foi possível explorar assuntos, conceitos e resultados de extrema relevância como Funções Analíticas, Cálculo do Resíduo, bem como a aplicação do Teorema dos Resíduos na resolução de integrais. Teorema do Resíduo é a capacidade de avaliar integrais de contorno de modo que não-analíticos pontos estão dentro do contorno fechado.

6 Referências

[1] OLIVEIRA, G. S., SANTOS, E. R., *Aplicações da Teoria dos Resíduos no Cálculo de Integrais Reais*, **Horizonte Científico, 2017**

[2] DE JESUS, D. V., *Aplicações do Teorema dos Resíduos*, **Santa Catarina, Monografia UFSC, 2007.**

[4] DAI, N., Zhang, Y., *Applying Residue Theorem to Compute Real Definite Integral*, **Journal of Physics: Conference Series**, **2021**.

[5] Ettlinger, H. J., *Cauchy's paper of 1814 on definite integrals,* **The Annals of Mathematics, Vol 23, 2013.**

[6] ZANI**,** S. L., *Funções de uma Variável Complexa,* **USP**, **2011**

[7] RAINWATER, G., *Residue theorems and their applications : computing integrals once thought impossible to evaluate analytically,* **California State University, Monterey Bay,** 2007.

[8] FENG, L., YAO, Z., ZHAI, Z., *The Application of Residue Theorem in The Calculations of Real Integrals***, Highlights in Science, Engineering and Technology, Vol 8,** 2023.