



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**



**AVALIAÇÃO DA RESISTÊNCIA À FLEXÃO DE CONSOLOS DE  
CONCRETO ARMADO ATRAVÉS DOS MÉTODOS DE ELEMENTOS  
FINITOS E DE BIELAS E TIRANTES**

**Erick da Silva Rocha**

**Belém - PA  
Setembro/2025**

**ERICK DA SILVA ROCHA**

**AVALIAÇÃO DA RESISTÊNCIA À FLEXÃO DE CONSOLOS DE  
CONCRETO ARMADO ATRAVÉS DOS MÉTODOS DE ELEMENTOS  
FINITOS E DE BIELAS E TIRANTES**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado a Faculdade de  
Engenharia Civil do Instituto de  
Tecnologia da Universidade Federal  
do Pará, como parte dos requisitos  
para obtenção do título de Bacharel  
em Engenharia Civil.

**Orientador: Maurício de Pina Ferreira**

**Belém  
Setembro/2025**

**ERICK DA SILVA ROCHA**

**AVALIAÇÃO DA RESISTÊNCIA À FLEXÃO DE CONSOLOS DE  
CONCRETO ARMADO ATRAVÉS DOS MÉTODOS DE ELEMENTOS  
FINITOS E DE BIELAS E TIRANTES**

Belém, 16 de setembro de 2025

Prof. Maurício de Pina Ferreira  
Dr. pela Universidade de Brasília  
Orientador

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Maurício de Pina Ferreira (UFPA)**  
Dr. pela Universidade de Brasília

**Prof. Ritermayer Monteiro Teixeira (UFPA)**  
Dr. pela Universidade de São Paulo

**Prof. Mayara Gonçalves Costa (UFPA)**  
Ma. pela Universidade Federal do Pará

CONCEITO FINAL: \_\_\_\_\_

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, pois foi ele quem me sustentou até aqui, e me ajudou em cada obstáculo, foi nele que encontrei força e coragem para seguir em frente. Em segundo lugar, expresso minha profunda gratidão aos meus pais, Zaqueu Oliveira da Rocha e Gleice Cristina Barros da Silva, que me guiaram ao longo da minha trajetória, oferecendo apoio incondicional, enfrentando cada batalha e celebrando cada conquista ao meu lado. Estendo meu agradecimento a toda minha família, em especial à minha irmã Sheyla Vanessa da Silva Rocha, por todo o suporte, assim como aos meus tios e tias, com destaque para Ericka Barros e Ana Rocha, e aos meus primos, especialmente Roger Barros e Rodrigo Barros. Minha sincera gratidão também aos amigos de graduação que compartilharam comigo essa caminhada ao longo desses cinco anos: Victor Smith, Matheus Pimental, Rafaela Novaes, Lucas Benjamin, Rafaele Oliveira, João Pedro e Victor Gonçalves. Um agradecimento especial ao meu orientador e amigo Maurício de Pina Ferreira, por todas as oportunidades e experiências vivenciadas durante minha iniciação científica, que tiveram um impacto significativo no meu crescimento profissional e pessoal. Por fim, agradeço a todos os meus amigos do grupo de pesquisa NUMEA — Mayara Costa, Arlene Alves, Iana Damasceno, Jedson Abrantes, Frederico Maués, Thayná Bittencourt, Giovane Heverdan e Manoel Mangabeira, em especial o Rodrigo Moraes, que veio me ensinando e auxiliando em grande parte das pesquisas realizadas, todos cuja presença foi essencial em minha jornada. Sou imensamente grato por ter cada um de vocês ao meu lado.

# **AValiação da Resistência à Flexão de Consolos de Concreto Armado através dos Métodos de Elementos Finitos e de Bielas e Tirantes**

Erick da Silva Rocha (1);

(1) Universidade Federal do Pará

## **RESUMO**

Consolos de concreto armado são elementos comumente utilizados em estruturas pré-moldadas, projetando-se de pilares ou paredes para servir de apoio a outros elementos estruturais, tendo como função a redistribuição de esforços entre o sistema. No entanto, devido suas condições de carregamento e geometria, há uma perturbação significativa na distribuição de tensões ao longo de sua seção transversal, de forma que o seu dimensionamento não pode ser realizado com base na teoria geral da flexão, sendo necessário o uso de métodos alternativos que produzam soluções satisfatórias e seguras. Dessa forma, este trabalho tem por objetivo analisar o comportamento a flexão de consolos com variações na relação entre a medida da linha de aplicação de carga à face externa do pilar “a” e a altura útil “d”, e nas taxas de armadura de flexão, através do Método de Bielas e Tirantes (MBT), Método das Seções e do Método dos Elementos Finitos (MEF). Para o primeiro foi utilizada a prescrição normativa ACI 318 (2019), para o método das seções será utilizado a prescrição normativa NBR 6118 (ABNT, 2023), já para o MEF utilizou-se o software ATENA, onde foram comparados os critérios de carga máxima e os modos de ruptura para cada consolo. As análises foram realizadas em consolos que foram inicialmente testados experimentalmente por Lima (2025) e Silva (2025).

*Palavras-chave:* Concreto Armado; Modelagem Computacional; Bielas e Tirantes; Consolos;

# **EVALUATION OF THE FLEXURAL STRENGTH OF REINFORCED CONCRETE CORBELS USING THE FINITE ELEMENT METHOD AND THE STRUT-AND-TIE METHOD**

Erick da Silva Rocha (1);

(2) Universidade Federal do Pará

## **ABSTRACT**

Reinforced concrete corbels are elements commonly used in precast structures, projecting from columns or walls to support other structural members, with the function of redistributing forces within the system. However, due to their loading conditions and geometry, there is significant disturbance in the stress distribution along their cross-section, so their design cannot be carried out based on the general theory of bending, requiring the use of alternative methods that provide safe and satisfactory solutions. In this context, this study aims to analyze the flexural behavior of corbels with variations in the  $a/d$  ratio and in the flexural reinforcement ratios, using the Strut-and-Tie Method (STM), the Section Method, and the Finite Element Method (FEM). For the first approach, the normative prescription of ACI 318 (2019) was applied; for the Section Method, the normative prescription of NBR 6118 (ABNT, 2023) will be used; and for FEM, the ATENA software was employed. Maximum load criteria and failure modes for each corbel were compared. The analyses were performed on corbels that were initially tested experimentally by Lima (2025) and Silva (2025).

*Keywords: Reinforced Concrete; Computational modeling; Strut-and-Tie; Corbels;*

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	<b>8</b>
1.1. OBJETIVOS.....	10
1.1.1. OBJETIVO GERAL.....	10
1.1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	10
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>11</b>
2.1. CONSOLO DE CONCRETO ARMADO.....	11
2.2. MODELO DE BIELAS E TIRANTES.....	15
2.3. ANÁLISE NUMÉRICA.....	17
<b>3. PRESCRIÇÕES NORMATIVAS</b> .....	<b>19</b>
3.1. ACI 318 (2019) .....	19
3.2. NBR 6118 (ABNT, 2023) .....	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
<b>4. METODOLOGIA</b> .....	<b>24</b>
4.1. DESCRIÇÃO DA INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL DE SILVA (2025) e LIMA (2025).....	24
4.1.1. LIMA (2025). .....	25
4.1.1.1 Caracterização .....	25
4.1.1.2 Instrumentação .....	26
4.1.2. SILVA (2025). .....	28
4.1.2.1 Caracterização .....	28
4.1.2.2 Instrumentação .....	29
4.2. MODELAGEM COMPUTACIONAL.....	33
4.2.1. MODELOS CONSTITUTIVOS .....	34
4.2.1.1 CONCRETO .....	34
4.2.1.2 AÇO.....	43
4.2.1.3. MALHA DE ELEMENTOS FINITOS .....	44
4.3. MODELO DE BIELAS E TIRANTES.....	50
<b>5. RESULTADOS</b> .....	<b>53</b>
5.1. MODELAGEM COMPUTACIONAL.....	53
5.1.1. Carga x Deslocamento.....	53
5.1.2. Carga x Deformação do aço .....	54
5.1.3. Carga x Deformação do concreto .....	56
5.1.4. Fissuração.....	59
5.2. MODELO DE BIELAS E TIRANTES.....	61
5.3. TEÓRICO x EXPERIMENTAL x COMPUTACIONAL.....	62
<b>6. CONCLUSÃO</b> .....	<b>64</b>
<b>7. REFERÊNCIAS</b> .....	<b>66</b>

# 1. INTRODUÇÃO

Consolos curtos são estruturas comumente utilizados para transferir os esforços das vigas para os pilares, especialmente em ligações de estruturas pré-fabricadas, como representado na Figura 1.1 (Bobek, 2024). Esses elementos são projetados para resistir as solicitações verticais e horizontais previstas, incluindo contração térmica, fluência da viga ao longo do tempo, e reações de pilares (Kheyroddin, 2024).

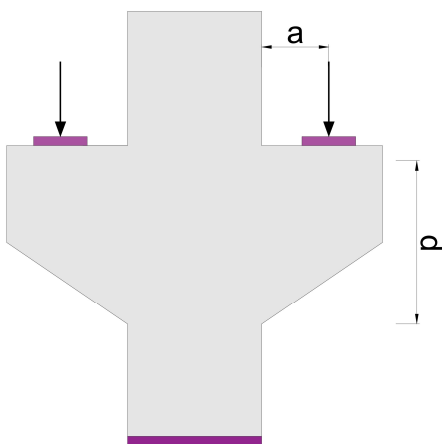
Figura 1.1 - Utilização de consolos de concreto armado



Fonte: (Bobek *et al.*, 2024).

De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2023), esses elementos são divididos em três tipos, considerando uma relação entre a medida da linha de aplicação de carga à face externa do pilar “a” e a altura útil “d”, sendo muito curto quando  $a \leq 0,5d$ , curto quando  $0,5d \leq a \leq d$  e longo quando  $a/d > 1$ . Essa divisão é ilustrada na Figura 1.2

Figura 1.2 - Classificação dos tipos de consolos.



### Divisão dos consolos com base na geometria

- $a \leq 0,5d \rightarrow$  Consolos muito curto
- $0,5d \leq a \leq d \rightarrow$  Consolos curto
- $a/d > 1 \rightarrow$  Consolo Longo

### Métodos de dimensionamentos para consolos

- $0,5d \leq a \leq d \rightarrow$  Modelo de Bielas e Tirantes (MBT)
- $a/d > 1 \rightarrow$  Método dos Elementos Finitos (MEF)

Fonte: Autor, (2025).

Ainda segundo a norma NBR 6118 (ABNT, 2023), devido sua geometria e à presença de cargas concentradas, esses elementos são classificados como regiões especiais, por apresentarem descontinuidade, onde a distribuição de tensões não é uniforme e a hipótese de Bernoulli não é válida para o dimensionamento desses tipos de estruturas, sendo utilizados métodos como Modelo de Bielas e Tirantes (MBT) ou o Método Elementos Finitos (MEF) (Amani, 2024).

O MBT, é baseado no Teorema do Limite Inferior da Plasticidade, e consiste em transformar o fluxo de forças em um mecanismo de treliças compostas por bielas que resistem à compressão, os tirantes à tração, e nós que os conectam. Com isso, determinam-se as regiões mais solicitadas, oferecendo uma compreensão clara dos caminhos de cargas das regiões com descontinuidade (Xue, 2023).

Já o MEF baseia-se na ideia de dividir um elemento estrutural em diversos subelementos conectados entre si, denominados elementos finitos, os quais fornecem uma solução aproximada para o problema real. Além disso, o MEF tem ampla aplicação na análise não-linear de estruturas de concreto armado por meio de software como ATENA, DIANA ou SAP2000 (Mello, 2015).

Dessa forma, este trabalho tem por objetivo analisar o comportamento a flexão de consolos com variações na relação  $a/d$  e nas taxas de armadura de flexão, através do Método de Bielas e Tirantes (MBT), Método das Seções e do Método dos Elementos Finitos (MEF). Para o primeiro foi utilizada a prescrição normativa ACI 318 (2019), para o método das seções será utilizado a prescrição normativa NBR 6118 (ABNT, 2023), já para o MEF utilizou-se o software ATENA, onde foram comparados os critérios de carga máxima e os modos de ruptura para cada consolo. As análises foram realizadas em consolos que foram inicialmente testados experimentalmente por Lima (2025) e Silva (2025).

## 1.1. OBJETIVOS

### 1.1.1. OBJETIVO GERAL

Analisar o comportamento a flexão de consolos com variações na relação  $a/d$  e nas taxas de armadura longitudinal, através de modelagem numérica não-linear, utilizando o software ATENA, Métodos das Seções e do Método de Bielas e Tirantes (MBT).

### 1.1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Definir uma estratégia de modelagem em elementos finitos utilizando o software ATENA para reproduzir os resultados obtidos experimentalmente por Lima (2025) e Silva (2025) em suas séries de ensaios para consolos com diferentes relações  $a/d$  e taxas de armadura de flexão;
- Elaborar modelos teóricos pelo Método de Bielas e Tirantes para a estimativa de resistência de consolos com ruptura por flexão, utilizando a prescrição normativa ACI 318 (2019).
- Verificar a resistência a flexão dos consolos por meio do método das seções utilizando a prescrição normativa NBR 6118 (ABNT, 2023).
- Comparar os resultados experimentais dos ensaios de Lima (2025) e Silva (2025), com os obtidos teoricamente e computacionalmente, em relação a previsão de resistência a flexão, deslocamento e modo de ruptura.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, apresenta-se uma revisão da literatura sobre consolos de concreto armado, abordando suas características estruturais, como comportamento e modos típicos de ruptura, enfatizando os fatores que influenciam no mecanismo de ruptura dessa estrutural. Em seguida, serão analisados os fundamentos teóricos e as diretrizes normativas aplicáveis ao Método de Bielas e Tirantes (MBT), destacando sua relevância para o projeto de regiões com descontinuidade. Além disso, discute-se a aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) na modelagem e análise de consolos, enfatizando sua utilização em estudos computacionais. Por fim, são apresentadas as principais recomendações normativas de códigos relacionadas ao dimensionamento e análise desses elementos estruturais.

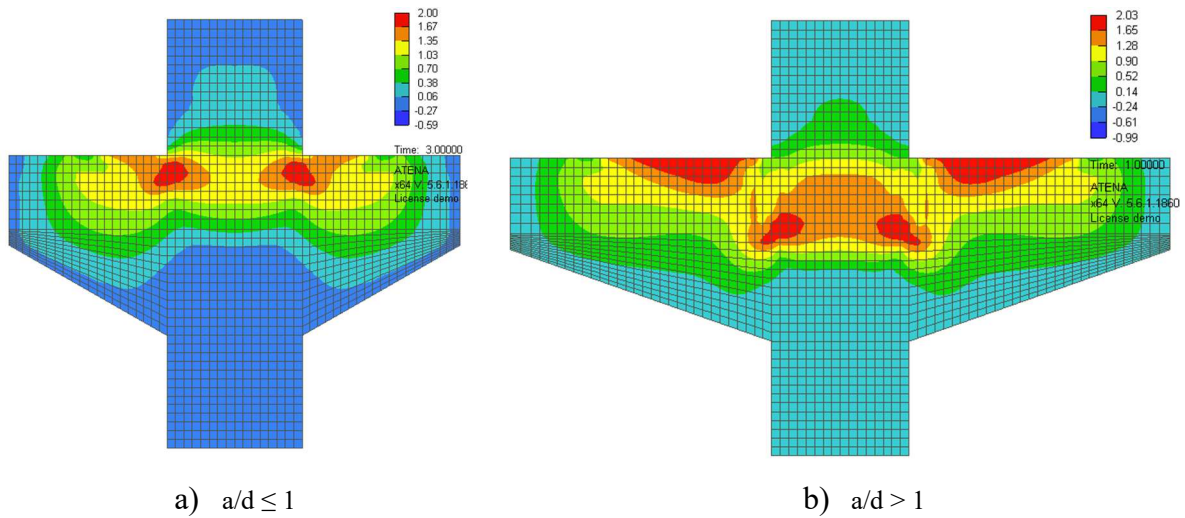
### 2.1. CONSOLO DE CONCRETO ARMADO

Consolos de concreto armado são estruturas em balanço que se projetam de um pilar, viga ou parede com o intuito de suportar outros elementos ou carga concentrada de grande intensidade (Beshara *et al.*, 2020). Essas estruturas também são sujeitas a esforços cisalhantes e a cargas horizontais causadas por retração, dilatação térmica ou da fluência de vigas, provocando distribuição de deformação não linear sob cargas, ou seja, regiões D de descontinuidade (Abdul-Razzaq *et al.*, 2020). Sua disposição pode ser dada de maneira simetricamente ou assimetricamente.

Os consolos podem ser classificados como curtos, muito curtos e longos. Onde essa divisão se baseia em “a”, medida da linha de aplicação de carga à face externa do pilar, e a altura útil “d” do elemento. os consolos são considerados curtos quando possuem  $0,5d \leq a \leq d$ , muito curtos se  $a \leq 0,5d$  e longos quando a relação  $a/d$  ultrapassa 1 Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2023). Já de acordo com o ACI 318 (2019), apenas quando  $a/d > 2$  o elemento deixa de ser tratado como consolo e passa a ser dimensionado como uma viga em balanço.

Na Figura 2.1-a e Figura 2.1-b é possível observar as distribuições de tensões de tração e compressão em consolos curtos e longos, respectivamente, onde em ambos os casos são perceptíveis as concentrações de tração na parte superior da ligação pilar-consolo, e as de compressão na inferior, fazendo com que essas zonas sejam críticas.

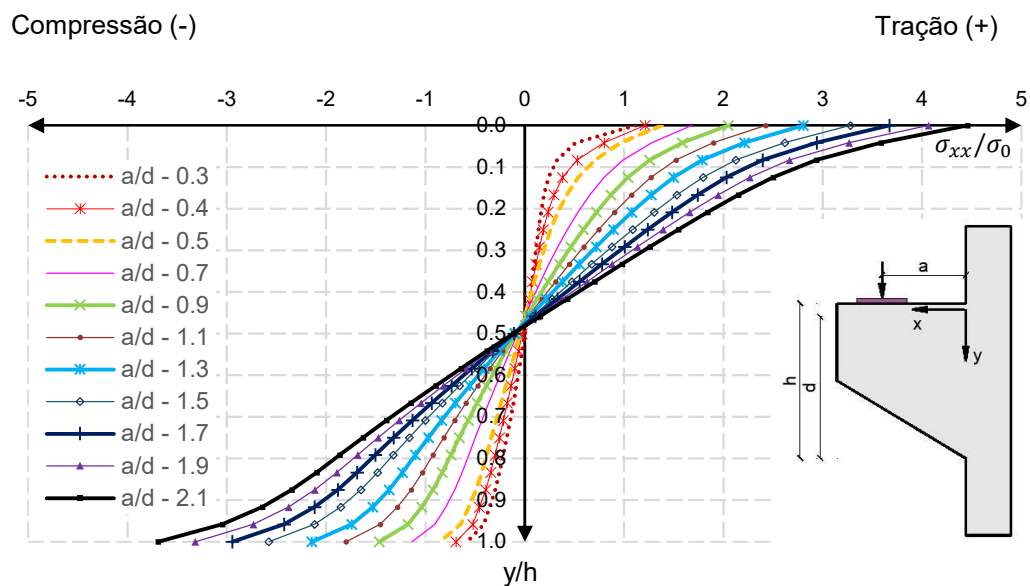
Figura 2.1: Campos de tensões em consolos.

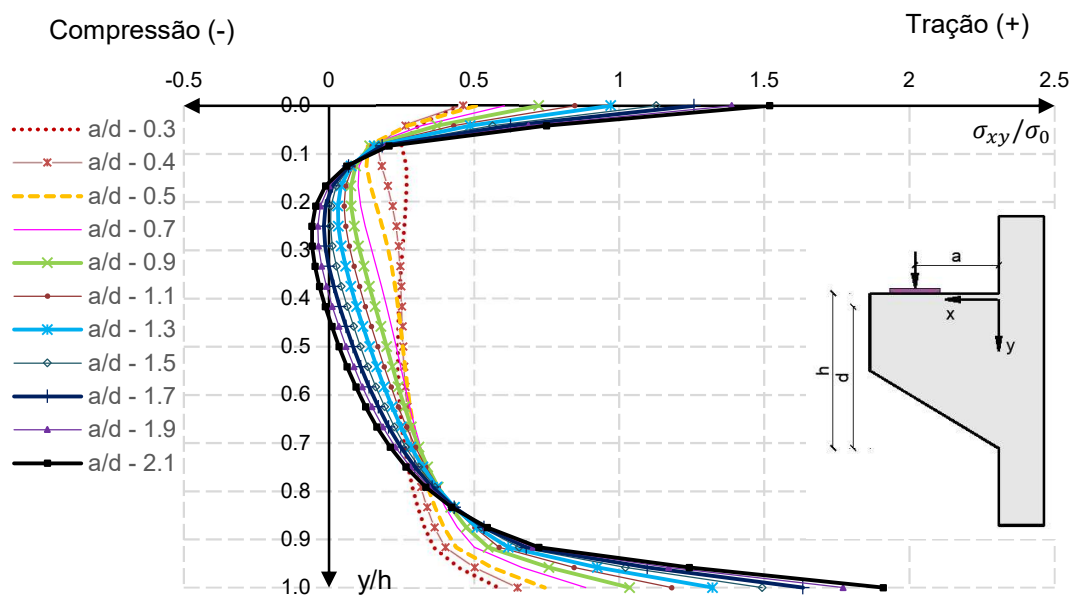


Fonte: Autor, 2025.

Para confirmar essa tendência, foi realizada uma análise linear no software ABAQUS, permitindo avaliar a influência da relação  $a/d$  na distribuição das tensões ( $\sigma_{x-x}$ ) e cisalhantes ( $\sigma_{xy}$ ) em comparação com a tensão do concreto ( $\sigma_0$ ). Observou-se que, à medida que a relação  $a/d$  diminui, ocorrem maiores perturbações nas tensões ( $\sigma_{x-x}$ ) e um aumento das tensões cisalhantes na interface entre o consolo e o pilar. Por outro lado, quando a relação  $a/d$  se aproxima de 2,0, as tensões principais passam a apresentar um comportamento mais linear, semelhante ao de uma viga contínua, enquanto as tensões cisalhantes nessa interface tornam-se menos significativas, conforme ilustrado na Figura 2.2

Figura 2.2 - Distribuição de tensões principais e cortante na face entre consolo e pilar.

a) Influência da relação  $a/d$  na distribuição das tensões principais.



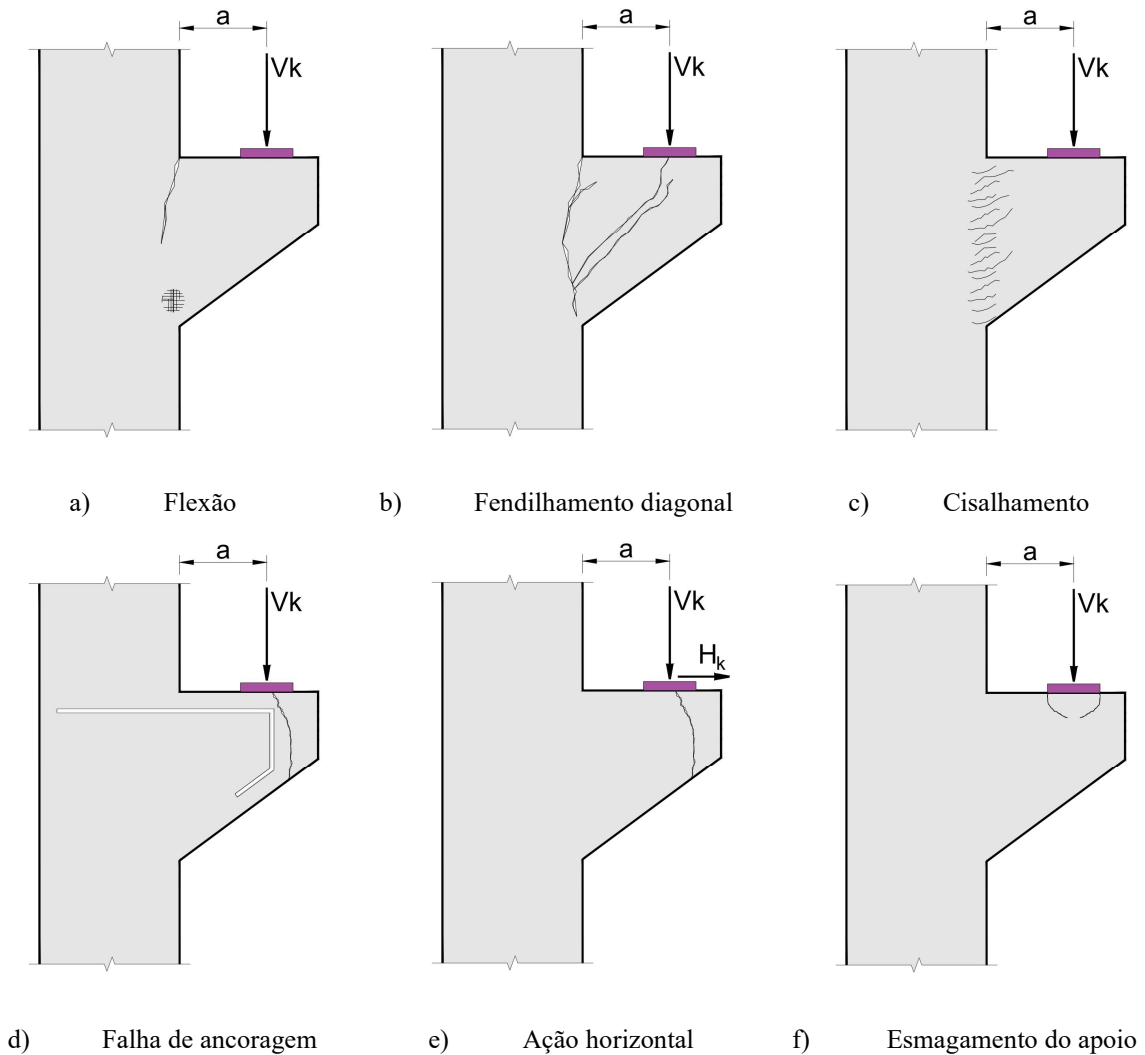
b) Influência da relação  $a/d$  na distribuição das tensões cisalhantes.  
 Fonte: Moraes e Lima, (2022).

Além disso, conforme Shakir (2020), outra consideração relevante diz respeito ao modo de ruptura dos consolos de concreto, sendo observado seis tipos principais, sendo esses:

- Ruptura por flexão – caracterizada pela formação de uma fissura na parte superior do consolo, próximo ao pilar, acompanhada pelo escoamento da armadura principal e por rotações significativas antes da ruptura por compressão do concreto (Figura 2.3-a).
- Ruptura por fendilhamento diagonal – inicialmente manifesta uma fissura típica de flexão, seguida pelo fendilhamento inclinado da biela de compressão (Figura 2.3-b).
- Ruptura por cisalhamento por tração diagonal – ocorre devido à concentração de fissuras inclinadas na região de ligação entre o consolo e o pilar, levando à ruptura nesse plano (Figura 2.3-c).
- Ruptura por falha de ancoragem – caracterizada pelo fendilhamento próximo ao apoio, geralmente causado por erros de detalhamento (Figura 2.3-d).
- Ruptura por ação horizontal – pode resultar de efeitos dinâmicos, deformações ou variações térmicas, gerando fissuras que atravessam o consolo até o bordo inferior, sem atingir o pilar (Figura 2.3-e).

- Ruptura por esmagamento do apoio – ocorre devido ao esmagamento localizado do concreto na região próxima ao apoio (Figura 2.3-f).

Figura 2.3 - Modo de ruptura de consolos de concreto.



Fonte: Adaptado de ARAÚJO et al. (2017).

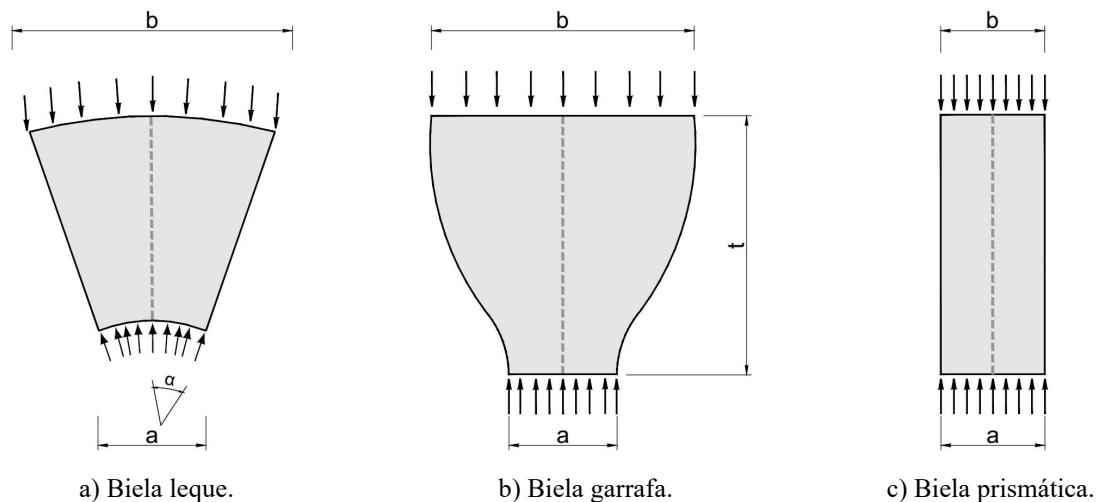
Devido esses elementos apresentarem descontinuidades geométricas ou de carga causando uma distribuição irregular de tensões longitudinais dentro da seção transversal, os métodos de dimensionamento baseados na hipótese de Bernoulli não são adequados, sendo necessária uma abordagem mais segura e aproximada das deformações, como a utilização do Método de Bielas e Tirantes (MBT) e Método dos Elementos Finitos, conforme recomendado pela NBR 6118 (ABNT, 2023) e ACI 318 (2019) (Yi *et al.*, 2022).

## 2.2. MODELO DE BIELAS E TIRANTES

O modelo de bielas e tirantes (MBT) é baseado no Teorema do Limite Inferior da Teoria da Plasticidade e consiste em determinar as regiões mais solicitadas de um elemento, convertendo o elemento em uma estrutura treliçada com membros axiais de compressão e tração, compostas por bielas, tirantes e nós. As bielas resistem à compressão, os tirantes à tração e os nós conectam as bielas e os tirantes, com o intuito de facilitar a compreensão e visualização dos caminhos das cargas até serem transferidas para os apoios (Xue, 2023).

No modelo de biela e tirantes, os campos de tensão de compressão são representados pelas bielas, que podem variar de acordo com cargas concentradas e as reações do elemento, sendo capaz de apresentar três tipos de configurações: prismática, leque ou garrafa (Figura 2.4). Os tipos prismáticos e em leque não apresentam campos de tensão com curvatura significativa, sendo as tensões ortogonais consideradas desprezíveis. Já para bielas do tipo em garrafa, essas tensões de tração são significativas devido as mudanças de direção nas tensões de compressão (Guerra, 2017).

Figura 2.4 - Tipos de bielas.



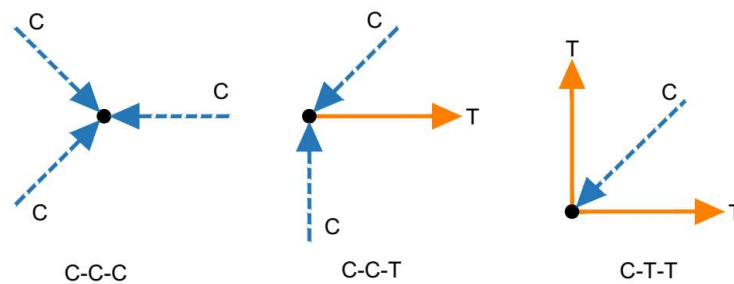
Fonte: Adaptado de SCHLAICH *et al.* (1987).

Os tirantes são a representação dos campos de tração da estrutura, que são absorvidas pelo aço, podendo ser ativa ou passiva, e suas tensões limite são representadas pela tensão de escoamento do aço ( $f_y$  ou  $f_{yp}$ ) (Cardoso, 2010). Já os nós correspondem a uma simplificação da realidade, surgindo nas interseções entre bielas e tirantes. Sua inclusão em um modelo é essencial para indicar transferências de cargas em direções anguladas (Borges, 2022).

Os nós podem ser categorizados de acordo com as forças que atuam sobre eles, sendo divididos em dois tipos: singulares, quando há aplicação de forças concentradas e ocorrem mudanças abruptas nos campos de tensão, sendo considerados críticos. Já os contínuos, nos quais o desvio das forças acontece em comprimentos razoáveis, permitindo a ancoragem de armaduras, geralmente não sendo críticos (CARVALHO, 2018).

Conforme a NBR 6118 (ABNT, 2023), os nós podem ser classificados em três tipos: CCC, que conectam exclusivamente bielas de compressão; CCT, que são atravessados por um único tirante; e CTT ou TTT, que envolvem a passagem de dois ou mais tirantes, conforme ilustrado na Figura 2.5.

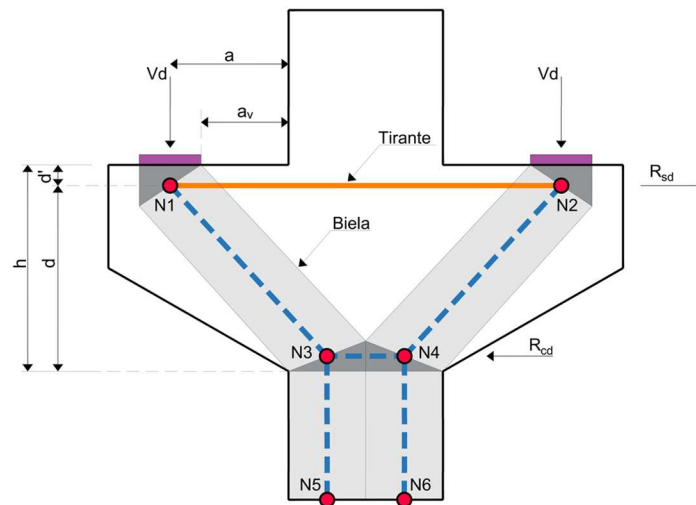
Figura 2.5 - Tipos de zonas nodais.



Fonte: Adaptado de ACI 318 (2019).

Em consolos, a concepção de um modelo de treliça inclui um tirante na face inferior para suportar os esforços de tração e uma biela inclinada que se estende do aparelho de apoio até a parte inferior da interface entre o consolo e o pilar. Esses elementos são interligados por regiões nodais, conforme ilustrado na Figura 2.6.

Figura 2.6 - Modelo de Bielas e Tirantes para consolos de concreto.



Fonte: Adaptado de ACI 318 (2023).

### 2.3. ANÁLISE NUMÉRICA

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma abordagem matemática usada para obter resultados aproximados de uma grande variedade de problemas da engenharia, discretizando a estrutura em pequenos elementos que preservam as propriedades do material original. Cada um desses elementos é representado por equações diferenciais, cuja resolução por meio de modelos matemáticos permite obter os resultados desejados. No contexto da engenharia civil, especialmente na análise de estruturas de concreto armado, o MEF é amplamente empregado para prever o comportamento estrutural sob diferentes condições de carregamento, considerando aspectos como deformações, tensões e fissuração.

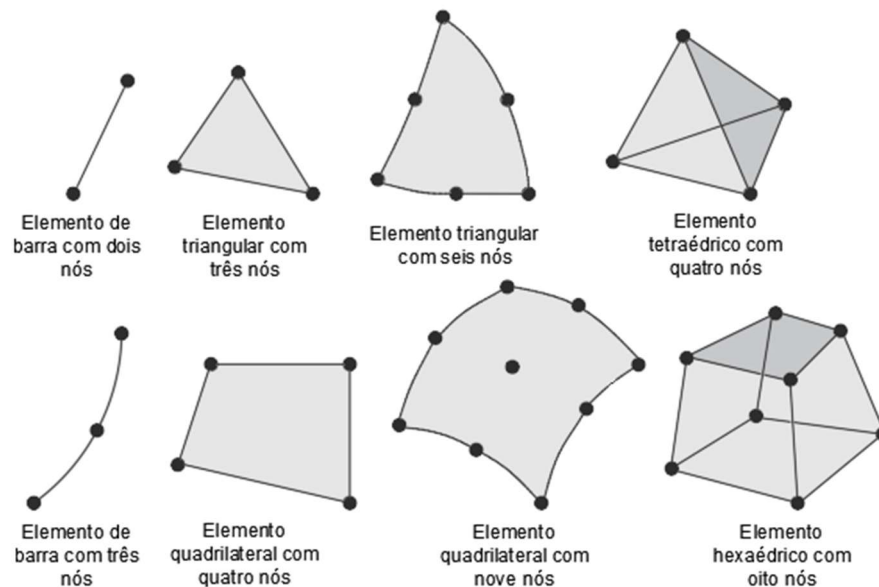
Além disso, segundo Rosero (2018), uma das principais vantagens deste método é a versatilidade de modelar geometrias complexas, materiais heterogêneos e não lineares. Uma vez que o concreto armado é um material heterogêneo pela presença de dois materiais (considerando o concreto e o aço) com comportamentos mecânicos diferentes, e descontinuidades que devem ser levadas em conta no MEF. Nesse sentido, conforme MAHL (2019), a análise de uma estrutura por meio do MEF deve seguir três etapas, são essas:

- Pré-processamento: Consiste na etapa de especificação da geometria e das propriedades dos materiais do modelo. Além da discretização da malha de elementos finitos e da aplicação das condições de contorno.
- Processamento: Consiste nos cálculos matriciais para a determinação dos deslocamentos, reações de apoio e forças internas do modelo.

- Pós-processamento: Consiste na visualização e análise dos resultados obtidos numericamente, averiguando a coerência com o problema físico.

O MEF possui essa denominação devido ao fato de as sub-regiões apresentarem dimensões finitas, sendo que esses elementos utilizados na discretização do domínio do problema são conectados entre si através de nós ou pontos nodais. Esses elementos podem assumir diferentes formatos como, por exemplo, triângulos ou quadrados para o caso bidimensional, e prismas ou quadriláteros para o caso tridimensional, sendo que a escolha depende do tipo de estrutura a ser analisada Fukamati (2023). Os diferentes arranjos desses elementos são ilustrados na Figura 2.7

Figura 2.7 - Tipos de elementos finitos.



Fonte: Adaptado de SOUZA (2003).

Segundo Avancini, (2024), a malha é formada pela combinação das subdivisões dos elementos, interligados por nós. A eficiência do método está relacionada ao número de nós e elementos, bem como ao tamanho e tipo dos elementos que constituem a malha. Embora a malha deva abranger todo o corpo analisado, para reduzir os custos operacionais, o refinamento pode ser aplicado apenas em áreas específicas e complexas, onde há maior concentração de tensões, como curvas, interseções e descontinuidades. Contudo, existe um limite para o refinamento, além do qual a precisão dos resultados não apresenta melhorias significativas.

### 3. PRESCRIÇÕES NORMATIVAS

#### 3.1. ACI 318 (2019)

Assim como na norma brasileira, o ACI 318 (2019) divide os consolos em curtos e muito curtos, apenas a classificação como vigas em balanço aumenta para uma relação de  $a/d \leq 2,0$ . Algumas recomendações são descritas em relação ao comprimento de ancoragem do tirante, o correto posicionamento das armaduras de reforço horizontal, tensão em bielas e a maior análise na presença de nós singulares.

Dessa forma, a tensão admissível nas bielas,  $f_{ce}$ , é conhecida através da Equação 3.1, sendo  $f'_c$  a resistência a compressão do concreto, o fator de modificação de confinamento  $\beta_c$  é comentado na Tabela 3.1, onde o A1 corresponde à área carregada e o A2 é uma medida no plano, considerando o limite de espraiamento da carga.

$$f_{ce} = 0,85 \cdot \beta_c \cdot \beta_s \cdot f'_c \quad \text{Equação 3.1}$$

Tabela 3.1 - Fator de confinamento da biela.

Localização	$\beta_c$	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Extremidade de uma biela conectada à um nó que inclua uma superfície de contato;</li> <li>• Nó que inclui uma superfície de contato;</li> </ul>	O menor entre:	$\sqrt{A1/A2}$ , onde A1 é definido pela face carregada do aparelho de apoio.
		2.0
Outros casos	1.0	

Fonte: ACI 318 (2019).

Já o coeficiente correspondente ao fator de eficiência da biela  $\beta_s$  é detalhado na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 Fator de eficiência da biela.

Local da Biela	Tipo da Biela	Critério	$\beta_s$	
Elementos tracionados ou zonas tracionadas de elementos	Qualquer biela	Todos os casos	0,4	(a)
		Todos os casos	1,0	(b)
Todos os outros casos	Bielas Internas	Com armadura em acordo com (a) e (b) da Tabela 23.5.1	0,75	(c)
		Localizadas em regiões que satisfazem 23.4.4	0,75	(d)
		Ligação viga-pilar	0,75	(e)
		Todos os demais casos	0,4	(f)

Fonte: ACI 318 (2019).

Nas bielas internas, as verificações quanto ao item c da Tabela 3.3, taxa mínima de armadura, são detalhados na Tabela 3, enquanto o item d é calculado pela Equação 3.2

Tabela 3.3 - Taxa de armadura mínima das bielas.

Contenção lateral da biela	Arranjo das armaduras	Taxa distribuída mínima	
Sem contenção	Malha ortogonal	0,0025 em cada direção	(a)
	Armadura Unidirecional cortando a biela a um ângulo $\alpha 1$	$\frac{0,0025}{\sin^2 \cdot \alpha 1}$	(b)
Contida	Não necessariamente distribuída		(c)

Fonte: ACI 318 (2019).

$$V_u = 0,42 \cdot \phi \cdot \tan \theta \cdot \lambda \cdot \lambda_s \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d \quad \text{Equação 3.2}$$

Sendo:

 $\Phi$  o fator de redução de força. $\lambda$  o fator de modificação das propriedades mecânicas em relação ao peso do concreto.

$\lambda_s$  o efeito de modificação do efeito de tamanho, sendo considerado 1 quando atende aos requisitos da Tabela 3, caso contrário é calculado por  $\lambda_s = \sqrt{\frac{2}{1+0,004 \cdot d}} \leq 1$ .

De maneira semelhante, a tensão resistente dos nós pode ser conhecida pela Equação 3.3, onde  $\beta_c$  corresponde ao fator de confinamento comentado na Tabela 1 e  $\beta_n$  depende da posição do elemento e a presença ou não de tirantes, conforme a Tabela 3.4.

$$f_{ce} = 0,85 \cdot \beta_c \cdot \beta_n \cdot f'_c \quad \text{Equação 3.3}$$

Tabela 3.4 - Configuração da região nodal.

Configuração da região nodal	$\beta_n$	
Nós cercados de bielas ou área de contato	1,0	(a)
Nós ancorando um tirante em uma direção	0,8	(b)
Nós ancorando tirantes em mais de uma direção	0,6	(c)

Fonte: ACI 318 (2019).

Para os tirantes, a área de aço necessária,  $A_{ts}$ , depende da força de tração,  $F_{nt}$ , e a resistência ao escoamento do aço,  $f_y$ , detalhado na Equação 3.4.

$$A_{ts} = \frac{F_{nt}}{f_y} \quad \text{Equação 3.4}$$

Em relação a verificação de ancoragem, o comprimento de ancoragem necessário reto corresponde ao maior entre o obtido pela Tabela 3.5 ou 300 mm, sendo  $d_b$  o diâmetro da barra e  $\psi_t$ ,  $\psi_e$ ,  $\psi_g$  e  $\lambda$  os fatores de modificação detalhados na Tabela 3.6.

Tabela 3.5 - Comprimento de ancoragem reto necessário.

<b>Espaçamento e Cobrimento</b>	<b><math>\theta \leq 20.0 \text{ mm}</math></b>	<b><math>\theta &gt; 20.0 \text{ mm}</math></b>
Distância livre entre as armaduras sendo ancoradas ou emendas não menores que $db$ , cobrimento de no mínimo $db$ , e estribos ou barras transversais ao longo de $lb$ em quantidade não menor que a mínima normativa Ou Espaçamento livre das barras sendo ancoradas ou emendas ao menos de $2db$ e cobrimento mínimo de $db$	$\left( \frac{f_y \cdot \psi_t \cdot \psi_e \cdot \psi_g}{2,1 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f'_c}} \right) \cdot db$	$\left( \frac{f_y \cdot \psi_t \cdot \psi_e \cdot \psi_g}{1,7 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f'_c}} \right) \cdot db$
Outros casos	$\left( \frac{f_y \cdot \psi_t \cdot \psi_e \cdot \psi_g}{1,4 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f'_c}} \right) \cdot db$	$\left( \frac{f_y \cdot \psi_t \cdot \psi_e \cdot \psi_g}{1,1 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f'_c}} \right) \cdot db$

Fonte: ACI 318 (2019).

Tabela 3.6 - Fatores de modificação para ancoragem de barras.

<b>Fator de Modificação</b>	<b>Condição</b>	<b>Valor do Fator</b>
Peso $\lambda$	Concreto leve	0,75
	Concreto de peso normal	1,00
Grau de Reforço $\psi_g$	Grau de 40 ou grau de 60	1,00
	Grau de 80	1,15
	Grau de 100	1,30
Epoxi $\psi_e$	Reforço revestido com epóxi ou zinco-epóxi com revestimento duplo com tampa transparente menor que $3 db$ ou espaçamento claro menor que $6 db$	1,50
	Revestimento com epóxi ou zinco-epóxi reforçado duplamente para todas as outras condições	1,20
	Não revestido ou revestido de zinco (galvanizado) reforçado	1,00
Tamanho $\psi_s$	Barras N° 7 ou maiores	1,00
	Barras N° 6 ou menores	0,80
Posição de Fundição $\psi_t$	Mais de 12 polegadas (30 mm) de concreto fresco abaixo do reforço horizontal	1,30
	Outros	1,00

Fonte: ACI 318 (2019).

### 3.2. NBR 6118 (ABNT, 2023)

Os cálculos empregados para a verificação estrutural pelo método das seções tiveram como referência as prescrições estabelecidas na ABNT NBR 6118:2023. as principais expressões utilizadas, estão expressas a seguir, acompanhadas dos respectivos trechos normativos e de uma breve explicação, assegurando a conformidade dos procedimentos com os critérios técnicos da norma.

A altura do bloco de compressão é obtida considerando o retângulo equivalente de tensões no concreto comprimido, como expressa na Equação 3.5.

$$a = \lambda \cdot x \quad \text{Equação 3.5}$$

Sendo:

a – altura do bloco de compressão

$\lambda$  – coeficiente de equivalência do diagrama de tensões do concreto

x – profundidade da linha neutra

A Equação 3.6 mostra força resistente do concreto corresponde à resultante das tensões de compressão atuantes no bloco comprimido.

$$F_c = \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot a \quad \text{Equação 3.6}$$

Sendo:

$F_c$  – força resistente no concreto

$\alpha_c$  – coeficiente de correção do concreto

$f_{cd}$  – resistência de cálculo do concreto à compressão

$b_w$  – largura da seção

a – altura do bloco de compressão

O momento resistente da seção é obtido multiplicando a força de compressão pelo braço de alavanca, como ilustrado na Equação 3.7.

$$M_r = F_c \cdot z \quad \text{Equação 3.7}$$

Sendo:

$M_r$  – momento resistente

$F_c$  – força de compressão no concreto

$z$  – braço de alavanca

Na flexão simples, como observado na equação Equação 3.8, o equilíbrio da seção exige a igualdade entre a força de compressão no concreto e a força de tração na armadura.

$$F_c = F_s$$

Equação 3.8

Sendo:

$F_c$  – força de compressão no concreto

$F_s$  – força de tração no aço

## 4. METODOLOGIA

A metodologia foi estruturada em três etapas principais. A primeira envolveu a análise do estudo experimental realizado por Silva (2024) e Lima (2024). A segunda consistiu na modelagem computacional dos espécimes selecionados utilizando o software ATENA (Cervenka et al., 2018). Por fim, a terceira etapa correspondeu ao desenvolvimento de um modelo de bielas e tirantes, levando em consideração as características e dimensões dos consolos, bem como as diretrizes normativas.

### 4.1. DESCRIÇÃO DA INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL DE SILVA

(2025) e LIMA (2025).

A pesquisa conduzida por Silva (2025) e Lima (2025) teve como objetivo analisar, de forma detalhada, o desempenho estrutural de consolos de concreto armado submetidos à flexão, projetados em escala real e dimensionados com base nas disposições presentes em normas técnicas internacionais amplamente reconhecidas. Em seus estudos, tanto Silva quanto Lima ensaiaram dois consolos originalmente nomeados como CR-0,18 e CR-0,47 — sendo o primeiro referente à armadura principal de 10 mm de diâmetro, com menor taxa de aço na armadura de flexão, e o segundo correspondente à maior taxa de aço com armadura de flexão de 16 mm de diâmetro.

Como ambos os autores utilizaram a mesma nomenclatura, optou-se, neste trabalho, por adotar uma diferenciação para evitar conflitos na referência a cada elemento ensaiado: CRC-0,18 e CRC-0,47 para os consolos curtos estudados por Lima (2024) e CRL-0,18 e CRL-0,47 para os consolos longos estudados por Silva (2024). O estudo contemplou a avaliação experimental dessas configurações, buscando compreender não apenas a resistência última, mas também o comportamento ao longo do carregamento, incluindo o surgimento e a propagação de fissuras, a redistribuição de esforços e os modos de ruptura característicos.

A Tabela 4.1 apresenta um resumo das características dos quatro consolos ensaiados. São apresentadas à altura útil real dos consolos ( $d$ ), a distância entre a linha de aplicação da força e o pilar ( $a$ ), resistência média a compressão do concreto ( $f_c$ ), diâmetro das barras de flexão ( $\phi_f$ ), tensão de escoamento ( $f_{ys}$ ), módulo de elasticidade ( $E_s$ ) e taxa de armadura de flexão ( $\rho$ ).

Tabela 4.1 - Resumo das características dos consolos

Consolos	d (mm)	a (mm)	a/d	$f_c$ (MPa)	$\phi_f$ (mm)	$f_{ys}$ (Mpa)	$E_s$ (Gpa)	$\rho$ (%)
CRC-0,18	347	230	0,66	32±2	10	590,3	212,8	0,18
CRC-0,47	355	230	0,65	32 ±2	16	576,0	191,4	0,47
CRL-0,18	358	450	1,26	33 ±3	10	590,3	212,8	0,18
CRL-0,47	340	450	1,32	33 ±3	16	576,0	191,4	0,47

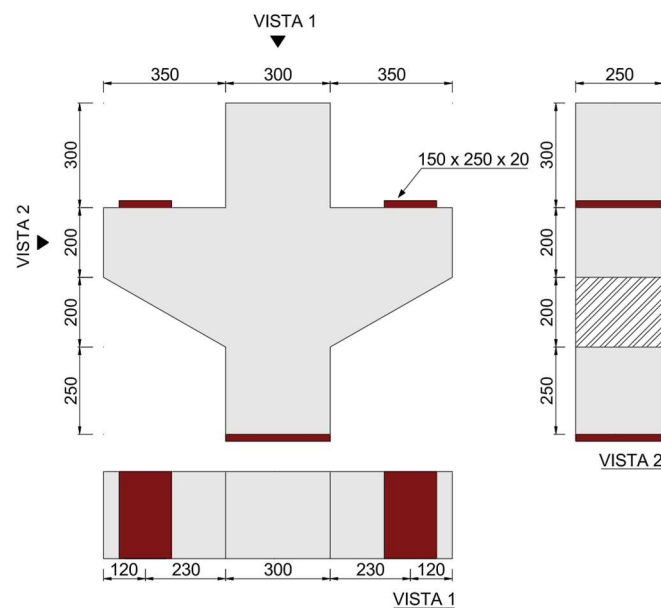
Fonte: Autor, 2025.

## 4.1.1. LIMA (2025).

## 4.1.1.1 Caracterização

A serie ensaiada por Lima (2025), apresentavam arranjo geométrico de 250 mm de largura, altura de engastamento de 400 mm, altura na face externa de 200 mm e comprimento de 350 mm. Os pilares foram definidos com dimensão transversal de 250 x 300 mm, com altura de 950 mm, como detalhado na Figura 4.1.

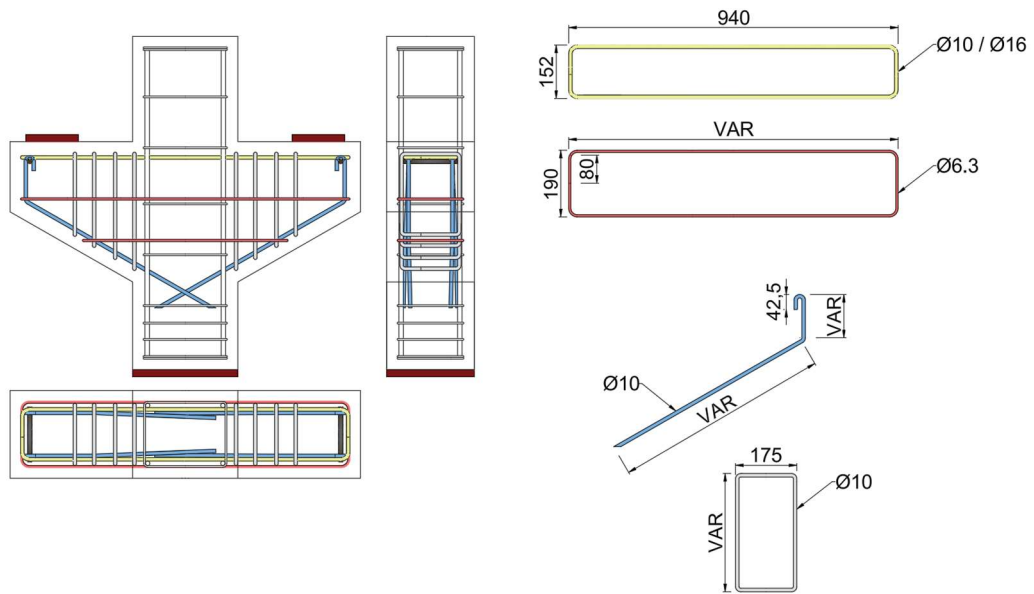
Figura 4.1 - Geometria dos consolos curtos



Fonte: LIMA, (2025).

A Figura 4.2 ilustra o detalhamento das armaduras dos consolos curtos. Todos os modelos possuem dois estribos horizontais com barras de 6,3 mm, que foram dispostos em 2/3 da altura útil da peça. Os estribos verticais foram confeccionados com barras de 10 mm e espaçados entre si com uma distância de 60 mm. A armadura construtiva foi elaborada com barra de 10 mm. O pilar foi composto por quatro barras de 12,5 mm e estribos de 5 mm

Figura 4.2 - detalhamento das armaduras dos consolos curtos.

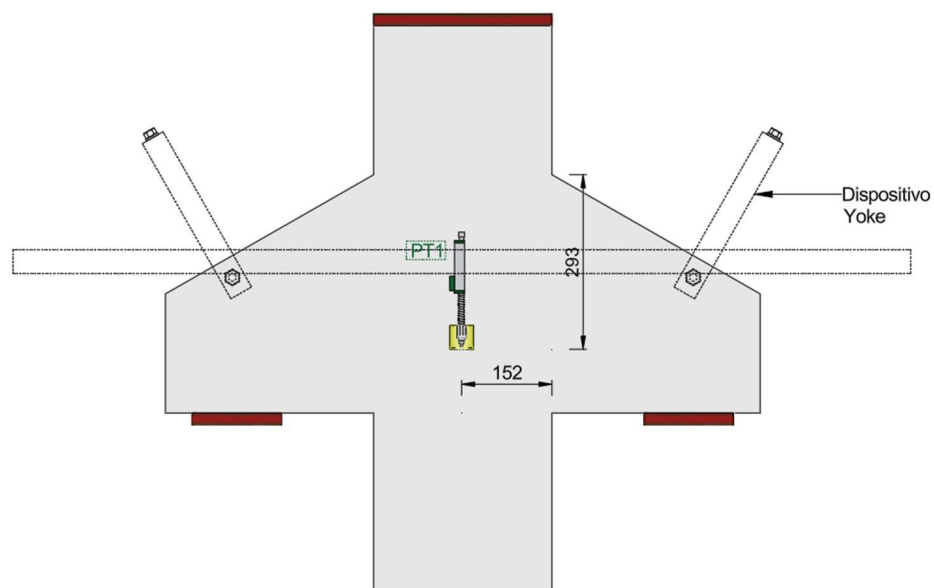


Fonte: Lima, (2025).

#### 4.1.1.2 Instrumentação

A medição dos deslocamentos verticais nos consolos foi realizada por meio de um potenciômetro (PT1). Esse sensor foi posicionado de forma estratégica para monitorar diretamente a resposta à flexão do modelo, registrando os deslocamentos verticais na região central do consolo, próximos à aplicação da carga. A Figura 4.3 apresenta a posição do PT1 nos consolos.

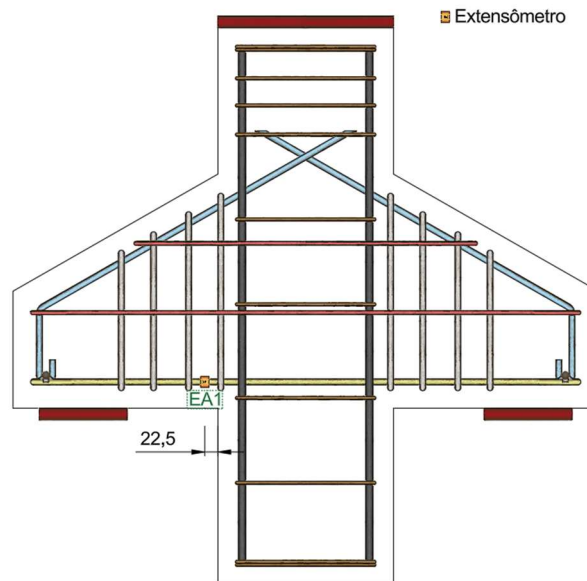
Figura 4.3 - Instrumentação para medição de deslocamentos verticais dos consolos curtos



Fonte: Adaptada de Lima, (2025).

O monitoramento das deformações no aço foi realizado por meio de extensômetros elétricos de resistência (EER), com fixação de um extensômetro por ponto de leitura. Os extensômetros foram posicionados apenas no tirante, pois consiste na armadura mais solicitada dos consolos curtos, como expressa a Figura 4.4 .

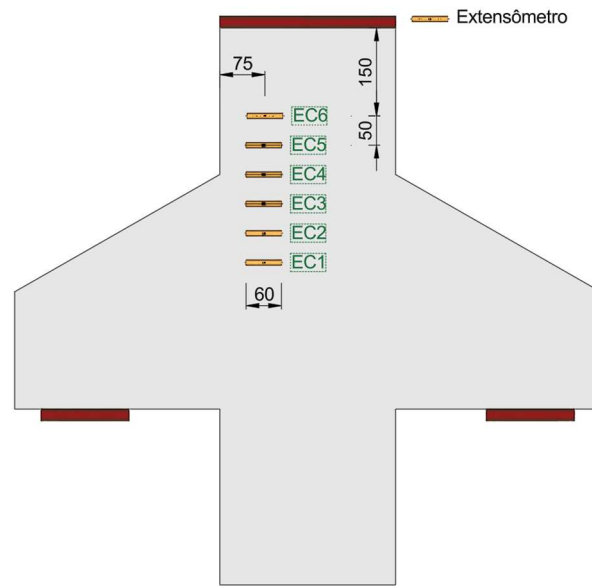
Figura 4.4 -Instrumentação da armadura dos consolos curtos.



Fonte: Lima, (2025).

A leitura das deformações no concreto foi realizada por meio de extensômetros fixados externamente na superfície das peças. A posição monitorada correspondeu à região de encontro consolo/pilar na área correspondente ao bloco de compressão, também é importante mencionar que em um espécime o autor usou 5 monitores e em outro 6. A Figura 3.11 apresenta a disposição desses extensômetros no concreto.

Figura 4.5 - Instrumentação no concreto dos consolos curtos.



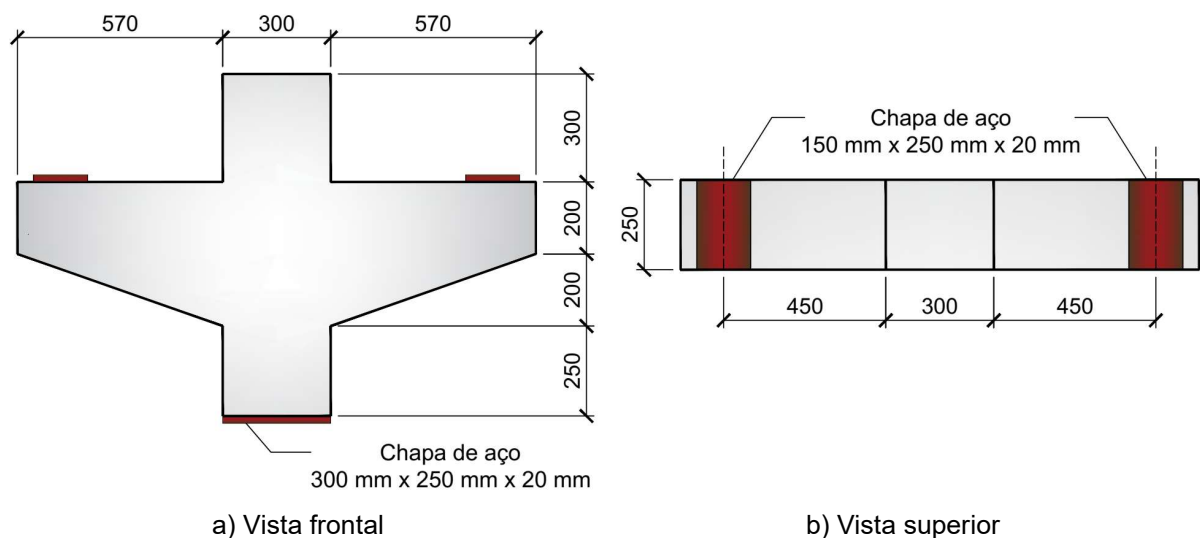
Fonte: adaptada de Lima, (2025).

#### 4.1.2. SILVA (2025).

##### 4.1.2.1 Caracterização

Nos ensaios de Silva (2025), foram realizados em modelos de consolos de concreto armado, simétricos e embutidos em um pilar. O pilar possui dimensões de (250x300x950) mm, enquanto os consolos são chanfrados, com 250 mm de largura, altura de engastamento de 400 mm, altura na face externa de 200 mm e comprimento em balanço de 570 mm, para ambos os lados, de acordo com a Figura 4.6.

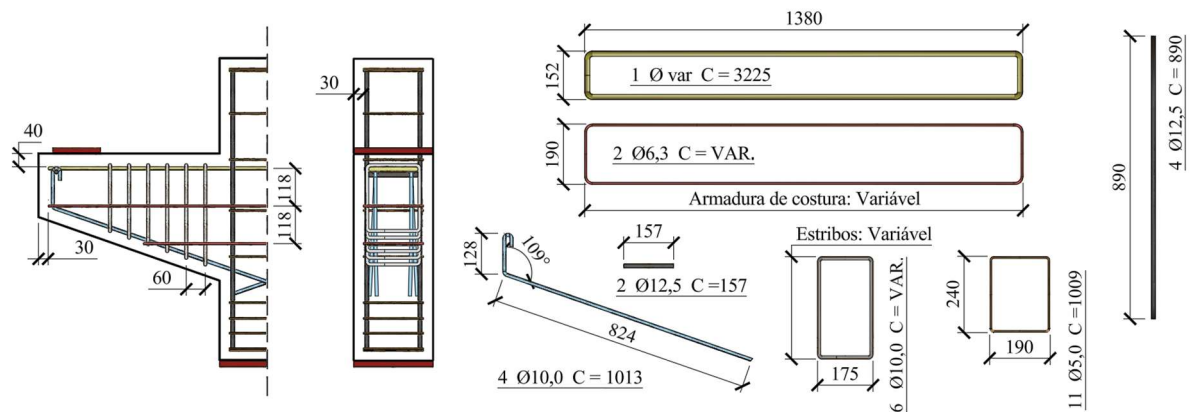
Figura 4.6 - Geometria dos consolos longos



Fonte: Silva, (2025).

O detalhamento das armaduras utilizadas nos consolos longos é expresso na Figura 4.7. Em todos os modelos, foram empregados dois estribos horizontais confeccionados com barras de 6,3 mm, posicionados ao longo de dois terços da altura útil da peça. Os estribos verticais, por sua vez, foram produzidos com barras de 10 mm, espaçados a cada 60 mm. A armadura construtiva foi composta por barra de 10 mm, enquanto o pilar contou com quatro barras de 12,5 mm e estribos de 5 mm.

Figura 4.7 - detalhamento das armaduras dos consolos longos.

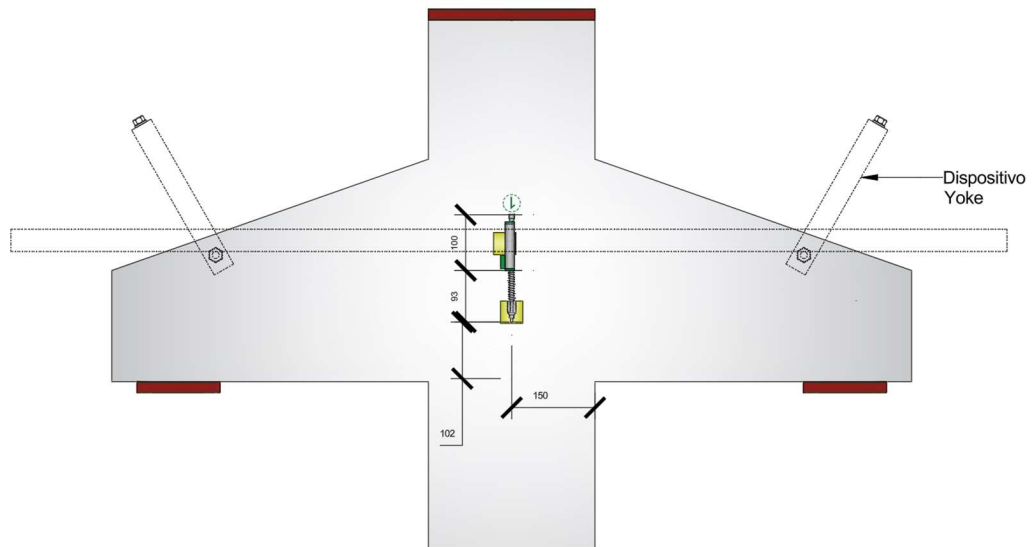


Fonte: Silva, (2025).

#### 4.1.2.2 Instrumentação

Para determinar os deslocamentos verticais, utilizou-se um único potenciômetro (PT1), instalado em posição central e próxima ao ponto de aplicação da carga. Esse arranjo permitiu acompanhar de forma precisa o comportamento do consolo sob flexão, registrando as variações ocorridas durante o ensaio. A Figura 4.8 mostra o local onde o PT1 foi instalado nos modelos analisados.

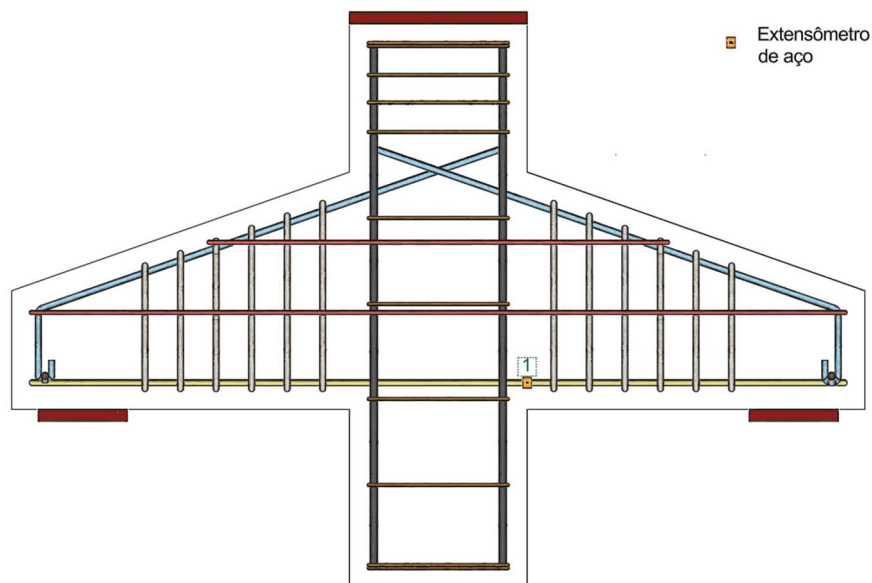
Figura 4.8 - Instrumentação para medição de deslocamentos verticais dos consolos longos



Fonte: Adaptado de Silva, (2025).

Seguindo o mesmo procedimento adotado por Lima (2025), Silva fez uso de extensômetros elétricos de resistência (EER), instalando um dispositivo em cada ponto de medição. A aplicação dos sensores ocorreu exclusivamente no tirante, por se tratar da armadura mais solicitada dos consolos e responsável por absorver os principais esforços de tração durante o ensaio. O posicionamento do (EER) está indicado na Figura 4.9.

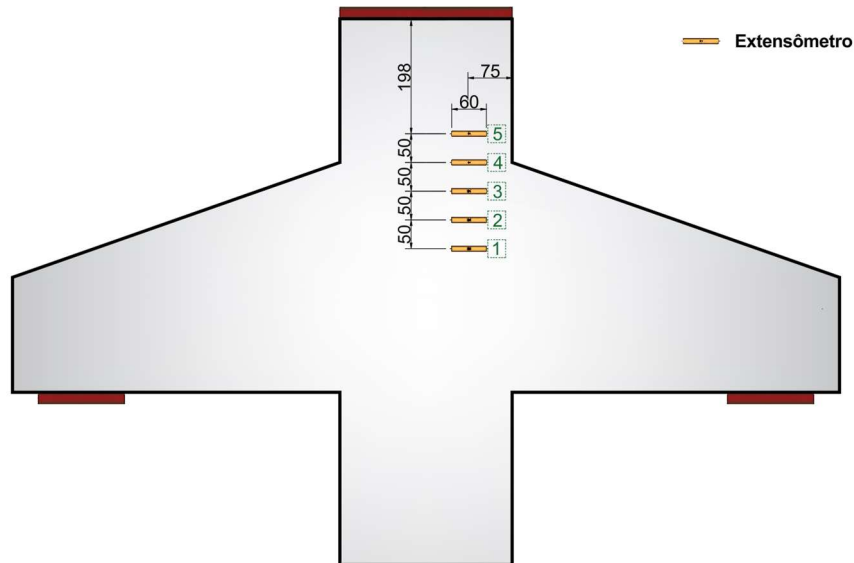
Figura 4.9 - Instrumentação da armadura dos consolos longos



Fonte: Adaptado de Silva, (2025).

O monitoramento das deformações do concreto foi feito por meio de extensômetros posicionados externamente na superfície das peças. Os sensores foram instalados na zona de ligação entre o consolo e o pilar, abrangendo a área associada ao bloco de compressão, também é importante mencionar que em um espécime o autor usou 5 monitores e em outro 6. A configuração desses pontos de instrumentação está ilustrada na Figura 4.10.

Figura 4.10 - Instrumentação no concreto dos consolos longos



Fonte: Adaptado de Silva, (2025).

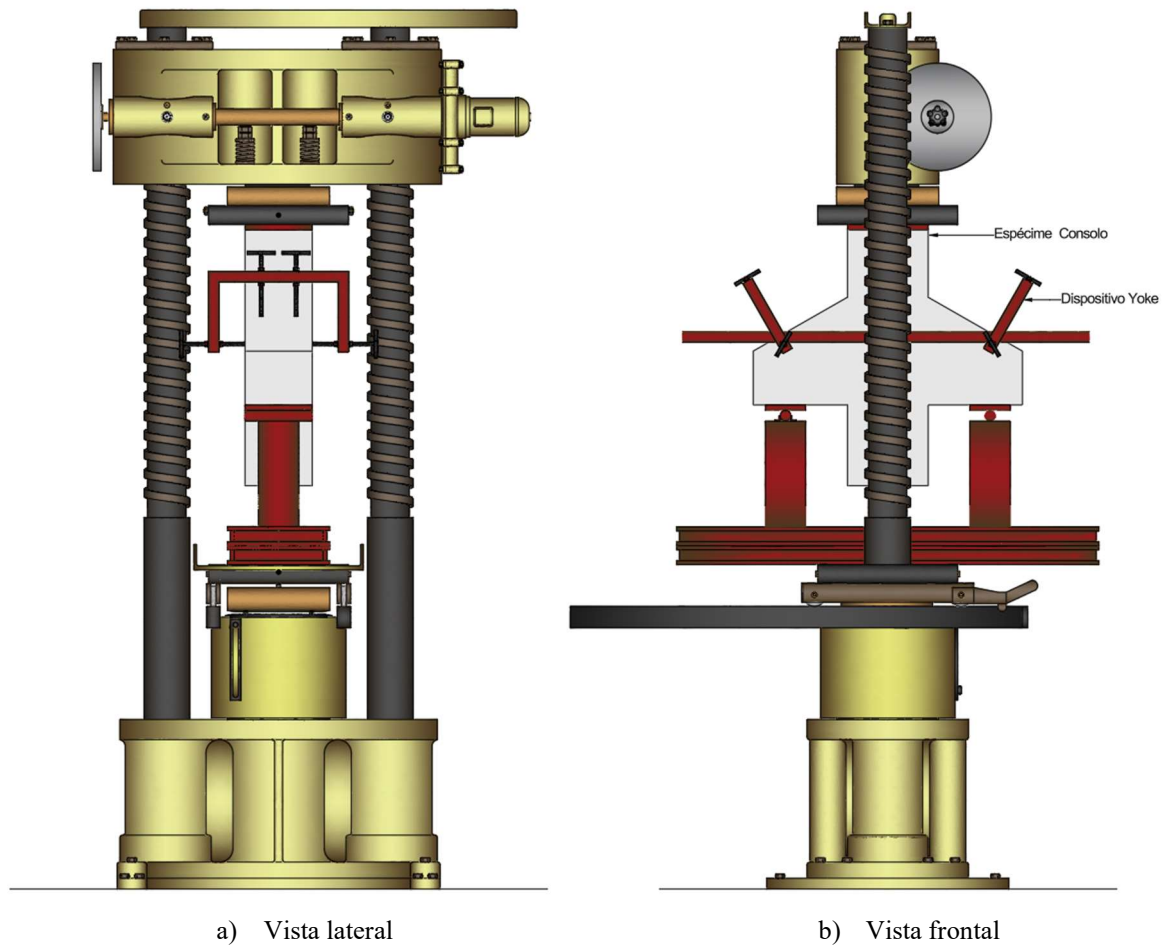
#### 4.1.3. SISTEMA DE ENSAIO

##### 4.1.3.1 LIMA (2025)

Os ensaios foram realizados em um sistema composto por uma prensa hidráulica com capacidade de carregamento máximo de 300 toneladas, no Laboratório de Estruturas do Núcleo de Desenvolvimento Amazônico em Engenharia (NDAE) – UFPA Tucuruí. Todos os consolos foram ensaiados e posicionados da mesma maneira, utilizando chapas de aço soldadas como apoio de reação.

O ensaio foi caracterizado por três pontos: primeiro o carregamento aplicado pela prensa, em passos de carga de 10 kN, enquanto os outros dois serão apoios de 1º e 2º gênero. Para aplicação de carga, será adotada uma chapa de aço quadrada, nas dimensões do pilar, com espessura suficiente para evitar uma ruptura localizada neste ponto. A Figura 4.11 apresenta o sistema de ensaio utilizado.

Figura 4.11 - Sistema de ensaio dos consolos curtos.



a) Vista lateral

b) Vista frontal

Fonte: adaptada de Lima, (2025).

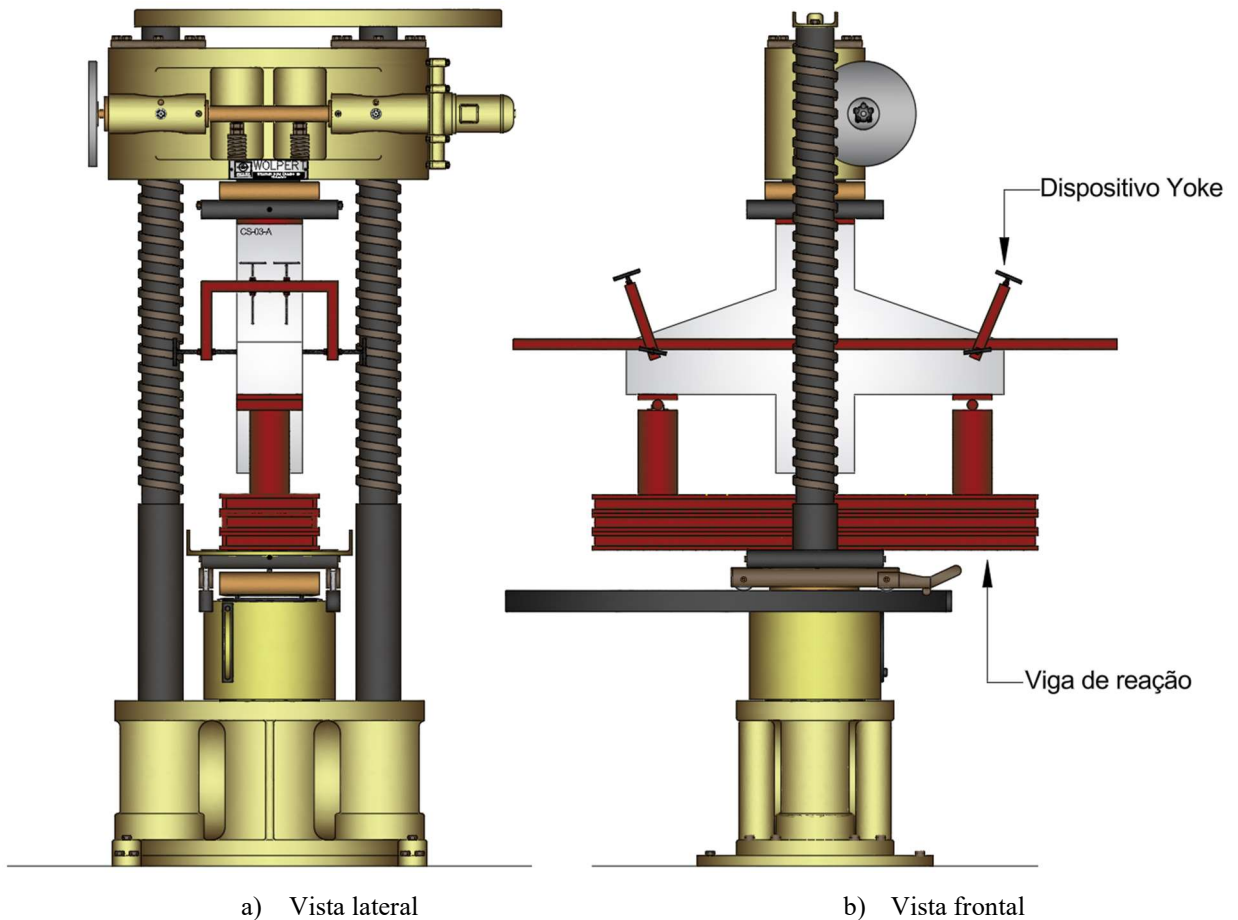
#### 4.1.3.2 SILVA (2025)

O esquema experimental para os ensaios dos consolos adotará uma configuração de três pontos. O carregamento será aplicado por uma prensa, com incrementos de carga de 5 kN, no ponto central da face superior do pilar dos consolos. Os dois outros pontos correspondem a apoios, sendo um de primeiro gênero e outro de segundo gênero, ambos equidistantes do eixo da chapa de carregamento.

Devido à limitação do comprimento da mesa da prensa, que não permite o posicionamento adequado dos consolos, será utilizado uma chapa de aço com seção transversal de (380x90) mm e 1700 mm de comprimento. A chapa será reforçada em seu núcleo por quatro perfis de aço soldado, com seção em I. Essa chapa será posicionada sobre o centro da mesa, funcionando como perfil de reação. Além disso, serão posicionadas 15 chapas de aço de 20 mm de espessura, uma sobre a outra em cada ponto de apoio, para ajustar a altura necessária para acomodar o consolo.

Para a aplicação da carga, utilizou-se uma chapa de aço retangular maciça (150x350) mm. Nos apoios, outras duas chapas metálicas maciças (150x250) mm foram posicionadas, uma contendo um rolete, com diâmetro de 40 mm e comprimento de 250 mm, com restrição ao deslocamento horizontal e outra com um rolete livre, simulando seus graus de liberdade. Os detalhes de montagem do sistema de ensaio são mostrados na Figura 4.12.

Figura 4.12 - Sistema de ensaio dos consolos longos.



Fonte: adaptada de Silva, (2025).

## 4.2. MODELAGEM COMPUTACIONAL

A modelagem numérica de estruturas, tem o objetivo de simular o comportamento de uma estrutura real, utilizando ferramentas computacionais, a fim de obter respostas precisas e confiáveis da estrutura submetida a um conjunto de solicitações e condições de contorno, devendo ser escolhidos para isso modelos constitutivos que representem adequadamente o material, as condições de contorno e o carregamento do elemento, simulando o comportamento físico real do sistema estrutural.

Nesse sentido, com o objetivo de comparar o comportamento de consolos de concreto armado, foi utilizado o software ATENA, “*Advance Tool for Enginnering Non-linear Analysis*”. Esse que é um pacote de programas comerciais que emprega o MEF para a realização de análises não-lineares de estruturas, em principal para a modelagem computacional de elementos de concreto armado, possibilitando a verificação de tensões e rupturas, o transporte de calor e umidade, o tempo de problemas dependentes (fluência, dinâmica), e suas interações. Desse modo, foi feita a elaboração dos modelos de consolos, sendo ajustados os parâmetros de entrada do programa em relação aos materiais, as condições de contorno e o carregamento, fundamentados nos dados experimentais de Silva (2024) e Lima (2024).

#### 4.2.1. MODELOS CONSTITUTIVOS

##### 4.2.1.1 CONCRETO

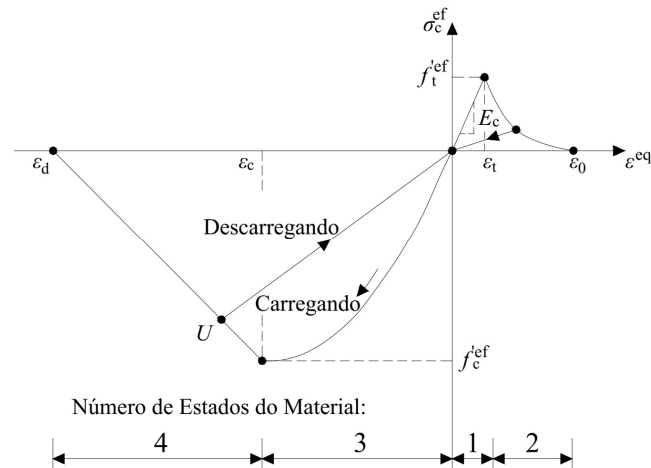
No software ATENA, há uma variedade de modelos constitutivos disponíveis para o concreto, cada um com suas particularidades. Neste estudo, a não linearidade do material foi representada por meio do modelo "*CC3DNonLinCementirious2*", que combina diferentes abordagens para a tração (fissuração) e a compressão (plasticidade). A modelagem da fissuração é baseada na metodologia "*Smearred Crack*", proposta por Bazant e Oh (1983), e incorpora o conceito de fissuras fixas ou rotativas, utilizando o critério de ruptura por tração de Rankine e um modelo de amolecimento exponencial. Já a plasticidade na compressão segue a "*Failure Surface*" de Menetrey-William, conforme proposta por Menetrey e William (1995).

Uma característica importante do modelo "*CC3DNonLinCementirious2*" é o tratamento independente dos mecanismos de fissuração e plasticidade, tanto no desenvolvimento quanto na formulação. Para integrar as equações constitutivas, utiliza-se um algoritmo de mapeamento de retorno. Essa abordagem confere ao modelo uma grande flexibilidade, permitindo sua aplicação na simulação de fissuras, esmagamento sob alto confinamento e fechamento de fissuras devido a compressões em outras direções no concreto.

O comportamento tensão-deformação do concreto nesse modelo é dividido em quatro fases, conforme ilustrado na Figura 4.13. A primeira representa a resposta linear do material à tração antes do surgimento das fissuras. A segunda etapa caracteriza a fase de amolecimento

exponencial descendente. Em seguida, a terceira e a quarta regiões descrevem o comportamento do concreto na compressão, antes e depois de atingir sua resistência efetiva à compressão.

Figura 4.13 - Lei tensão-deformação do concreto



Fonte: Adaptado de Cervenka *et al.* (2021).

Para o primeiro trecho, o comportamento à tração do concreto apresenta uma relação tensão-deformação linear, sendo um estado linear elástico até a tensão de tração máxima do material ( $f_t^{\prime ef}$ ), antes da fissuração do mesmo, obtido por meio da Equação 4.1.

$$\sigma_c^{ef} = E_c \cdot \varepsilon^{eq}, 0 \leq \sigma_c \leq f_t^{\prime} \quad \text{Equação 4.1}$$

Onde:

$E_c$  = Módulo de elasticidade inicial do concreto;

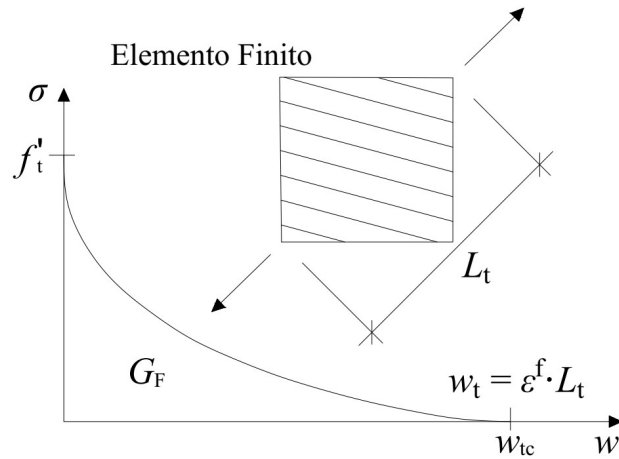
$f_t^{\prime ef}$  = Resistência a tração efetiva derivada da falha biaxial.

$\varepsilon^{eq}$  = Deformação uniaxial equivalente.

Para o trecho exponencial descendente de amolecimento do material, Figura 4.14 – Trecho de amolecimento do concreto à tração, é feito uso da Equação 4.2, advinda dos resultados experimentais de HORDIJK (1991), em que são correlacionados a tensão de tração, com a abertura crítica da fissura ( $w_{tc}$ ), Equação 4.3, e a energia de fratura ( $G_f$ ), parâmetro que será alvo da calibração do modelo computacional. Esse que representa a quantidade de energia absorvida por unidade de área da abertura de fissura zero até a abertura crítica da fissura. Afim de evitar que a energia de fratura total consumida seja dependente do tamanho da malha de elementos finitos, é introduzido o comprimento característico do elemento finito ( $L_t$ ), obtido

por meio da projeção do tamanho da malha na direção da fissura, utilizado para o cálculo do deslocamento de abertura de fissura ( $w_t$ ), Equação 4.4.

Figura 4.14 – Trecho de amolecimento do concreto à tração



Fonte: Adaptado de Cervenka *et al.* (2021).

$$\frac{\sigma}{f'_t} = \left\{ 1 + \left( c_1 \cdot \frac{w_t}{w_{tc}} \right)^3 \right\} \cdot \exp \left( -c_2 \cdot \frac{w_t}{w_{tc}} \right) - \frac{w_t}{w_{tc}} \cdot (1 + c_1^3) \cdot \exp(-c_2) \quad \text{Equação 4.2}$$

Sendo:

$w_t$  = Deslocamento de abertura de fissura;

$w_{tc}$  = Abertura crítica da fissura;

$c_1 = 3$  (constante);

$c_2 = 6,93$  (constante);

$\sigma$  = Tensão normal na fissura.

$$w_{tc} = 5,14 \cdot \frac{G_f}{f'_t} \quad \text{Equação 4.3}$$

Onde:

$G_f$  = Energia de fratura.

$$w_t = \epsilon^f \cdot L_t \quad \text{Equação 4.4}$$

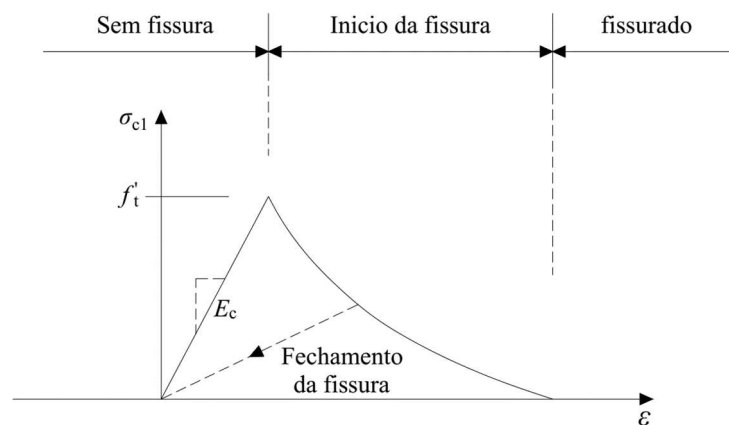
Sendo:

$\varepsilon^f$  = Deformações de fissuração inelástica;

$L_t$  = Tamanho característico do elemento finito.

O processo de formação de fissuras, nesse modelo do comportamento à tração, ocorre em três trechos, Figura 4.15 sendo o primeiro sem fissuração, antes de alcançar a tensão de tração efetiva; o segundo iniciando a fissuração, com uma zona de processo da fissura com a diminuição da tensão de tração da face da fissura devido ao efeito de ponte; e a terceira em que a abertura de prossegue sem a tensão, já que a mesma foi liberada completamente.

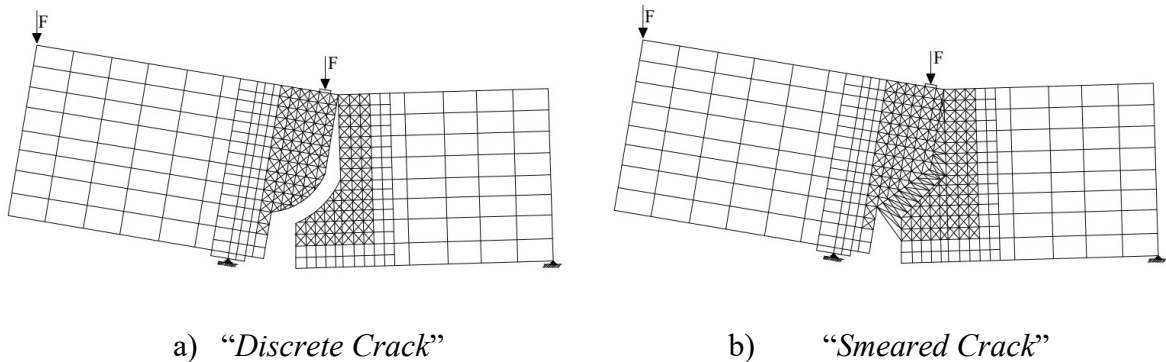
Figura 4.15 - Etapas da abertura de fissura



Fonte: Adaptado de Cervenka *et al.* (2021).

Além disso, o modelo de fissuração é baseado na abordagem “*Smeared Crack*”, sendo esse conceito introduzido como uma alternativa ao “*Discrete Crack*”, já que esse último conceito é criticado por resultar em alterações na conectividade dos nós e por necessitar que o usuário predefina o caminho de propagação da fissura, Figura 4.16-a. Enquanto que o “*Smeared Crack*” consegue superar essas dificuldades, sendo capaz de representar a fissuração dentro do elemento, sem a necessidade de inserir uma descontinuidade na malha de elementos finitos, Figura 4.16-b, (Rots e Blaauwendraad, 1989).

Figura 4.16 - Modelos de fissuração



a) “Discrete Crack”

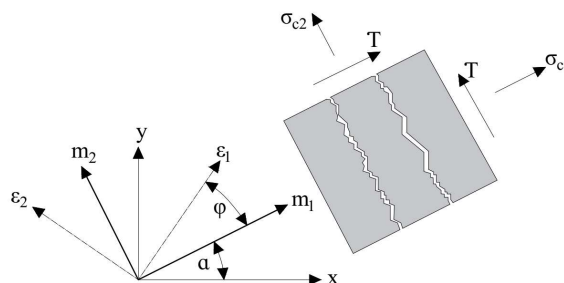
b) “Smeared Crack”

Fonte: Adaptado de Rots e Blaauwendraad. (1989).

Essa abordagem do “Smeared Crack” tem o objetivo de representar o estado fissurado, transformando a lei de tensão-deformação isotrópica inicial em uma lei ortotrópica na formação da fissura, com os eixos de ortotropia determinados de acordo com uma condição de início da fissura.

No modelo de fissura fixa, Figura 4.17, a direção da trinca é dada de acordo com a direção da tensão principal no momento de formação da fissura, ficando essa fixa durante todo o carregamento, independente das alterações na direção das tensões principais, com isso, começa a existir um desvio entre o eixo da ortotropia e das tensões principais. Alguns estudos mostram que as previsões desse modelo são sensíveis à rigidez ao cisalhamento. Dessa forma, no Atena é utilizado um coeficiente, “Shear Factor” (SF), para definir a relação entre a rigidez normal e a resistência à fissura de cisalhamento, sendo essa calculada através da Teoria de Campo de Compressão Modificada de Vecchio e Collins (1986), Equação 4.5.

Figura 4.17 - Modelo de fissura fixa

Fonte: Adaptado de Cervenka *et al.* (2021).

$$\tau \leq \frac{0,18 \cdot \sqrt{f_c}}{0,31 + \frac{24 \cdot w}{d_g + 16}}$$

Equação 4.5

Onde:

$\tau$  = Resistência máxima ao cisalhamento do concreto fissurado.

$f_c$  = Resistência à compressão do concreto.

$d_g$  = Tamanho máximo do agregado.

$w$  = Largura máxima de fissura.

Em relação ao comportamento tensão-deformação do concreto à compressão, modelo de plasticidade, tem-se que esse é controlado pela “*Failure Surface*” de Menetrey-William (Menetrey e William, 1995), sendo calculada em termos de três invariantes de tensão independentes, tensão hidrostática ( $\xi_s$ ), tensão desviatória ( $\rho_s$ ), e ângulo polar desviatório ( $\theta_s$ ), Equação 4.6. Em que são combinados os critérios de ruptura, o critério de Rankine de resistência máxima à tração, com a hipótese de Mohr-Coulomb de resistência ao cisalhamento, sendo considerado para o cálculo a adesão friccional ( $m_f$ ), o raio polar ( $r$ ), e a resistência coesiva ( $c_h$ ), Equação 4.6, e Equação 4.9, respectivamente.

$$F(\xi_s, \rho_s, \theta_s) = \left[ \sqrt{1,5} \cdot \frac{\rho_s}{f_c} \right]^2 + m_f \cdot \left[ \frac{\rho_s}{\sqrt{6} \cdot f_c} \cdot r(\theta_s, e) + \frac{\xi}{\sqrt{3} \cdot f_c} \right] - c_h = 0 \quad \text{Equação 4.6}$$

Onde:

$e$  = Excentricidade.

$$m_f = 3 \cdot \left[ \left( \frac{f_c^2 - f_t^2}{f_c \cdot f_t} \right) \cdot \left( \frac{e}{e+1} \right) \right] \quad \text{Equação 4.7}$$

$$r = \frac{4 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos^2(\theta_s) + (2 \cdot e - 1)^2}{2 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos(\theta_s) + (2 \cdot e - 1) \cdot [4 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos^2(\theta_s) + 5 \cdot e^2 - 4 \cdot e]^{1/2}} \quad \text{Equação 4.8}$$

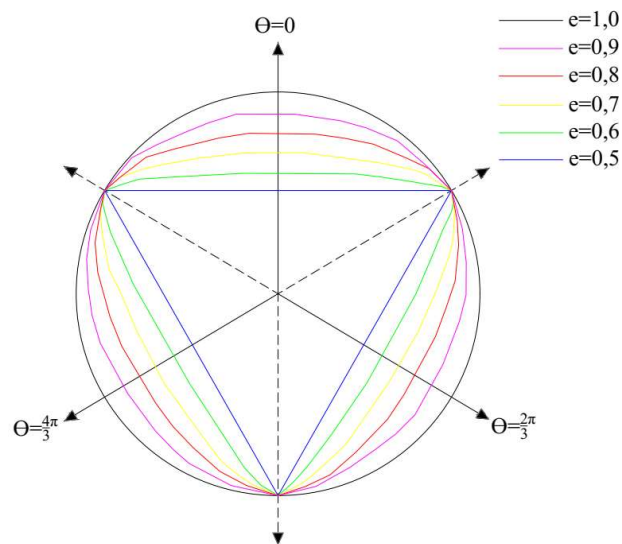
$$c_h = \left( \frac{f_c \cdot (\varepsilon_{eq}^p)}{f_c} \right)^2 \quad \text{Equação 4.9}$$

Sendo:

$\varepsilon_{eq}^p$  = Deformação do concreto sob compressão.

Conforme as equações apresentadas apenas três parâmetros são fundamentais para definir este critério, são esses, o  $f_c$ , o  $f_t$  e o  $e$ , em que o último define como a forma da superfície de falha, mudando de triangular para circular conforme o aumento da pressão confinante, como apresentado na Figura 4.18.

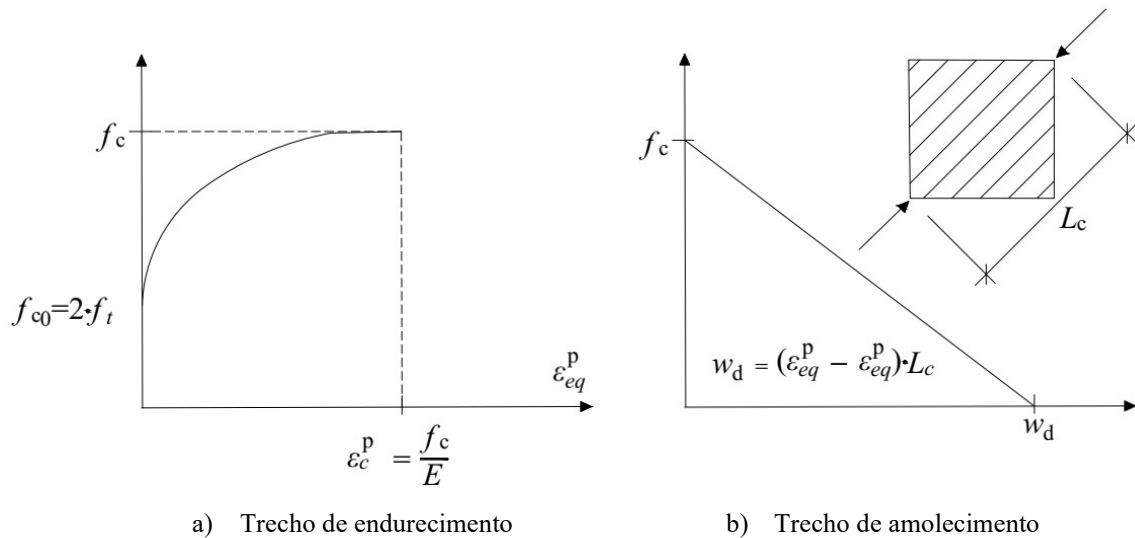
Figura 4.18 - Função elíptica para  $0,5 \leq r(\theta_s, e) \leq 1$ .



Fonte: Adaptado de Menetrey e William. (1995).

Os trechos ascendente e descendente, são representados por uma curva elíptica e linear, conforme apresentado nas Figura 4.19-a e Figura 4.19-b, respectivamente, sendo o trecho ascendente de endurecimento calculado por meio da Equação 4.10, baseada em deformações, tendo o início do comportamento não-linear como um parâmetro de entrada, assim como, o valor da deformação plástica na resistência à compressão. Enquanto que o trecho descendente de amolecimento é baseado em deslocamentos, em que a deformação plástica equivalente é transformada em deslocamentos através do parâmetro de escala de comprimento da malha  $L_c$ , definido de forma análoga ao tamanho característico do elemento finito  $L_t$ , introduzindo objetividade da malha na solução de elementos finitos, fundamentado no trabalho experimental de VAN MIER (1986).

Figura 4.19 - Modelo das curvas do concreto à compressão



Fonte: Adaptado de Cervenka *et al.* (2021).

$$\sigma = f_{c0} + (f_c - f_{c0}) \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{\varepsilon_c^p - \varepsilon_{eq}^p}{\varepsilon_c^p} \right)^2} \quad \text{Equação 4.10}$$

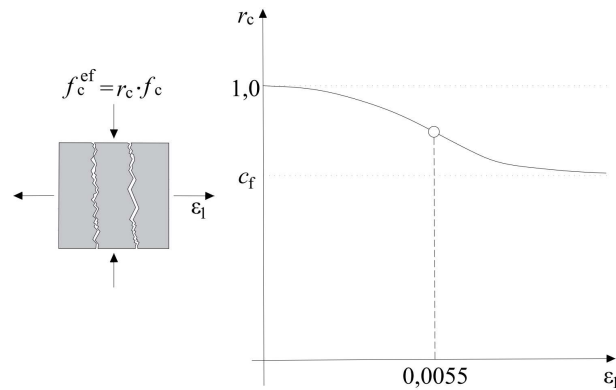
Onde:

$f_{c0}$  = Resistência a compressão de início do comportamento não-linear.

$\varepsilon_c^p$  = Deformação plástica na resistência máxima à compressão do concreto.

A interação do comportamento à tração e à compressão ocorre após a fissuração do concreto, em que a resistência à compressão na direção paralela a fissura é reduzida, ou seja, quando submetido a tensão transversal igual a zero, o valor da resistência à compressão reduzida do concreto ( $f_c^{ef}$ ) é igual a resistência uniaxial à compressão do concreto ( $f_c$ ) e essa é reduzida gradualmente à medida que a deformação transversal aumenta, Figura 4.20, sendo essa relação descrita por meio de uma função de Gauss, Equação 4.11

Figura 4.20 - Redução da resistência à compressão do concreto fissurado.



Fonte: Adaptado de Cervenka *et al.* (2021).

$$f_c^{ef} = r_c \cdot f_c, r_c = c_f + (1 - c_f) \cdot e^{-(128 \cdot \epsilon_v)^2} \quad \text{Equação 4.11}$$

Sendo:

$c_f$  = Constante do limite inferior.

$\epsilon_v$  = Deformação à tração na direção transversal.

Assim, foram adotados na modelagem os seguintes parâmetros para representar o modelo constitutivo do concreto, apresentados na Tabela 4.2

Tabela 4.2 - Parâmetros adotados para o modelo constitutivo do concreto.

Espécimes	CRC-0,18	CRC-0,47	CRL-0,18	CRL-0,47
<b>Parâmetros</b>				
$E_c$ (MPa)	21705	21705	21705	21705
$\nu$	0,2	0,2	0,2	0,2
$f_t$ (MPa)	2.027	2.027	2.027	2.027
$f_c$ (MPa)	30	30	30	30
$G_f$ (MN/m)	0,0000647301	0,0000647301	0,0000647301	0,0000647301
<b>Modelo de fissura</b>	Fixo	Fixo	Fixo	Fixo
$\epsilon_{cp}$	-0.001382115	-0.001382115	-0.001382115	-0.001382115
$\Phi_a$ (mm)	16	16	16	16
$W_d$ (m)	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
$\Phi_c$	20	20	20	20
$\rho$	0,0023	0,0023	0,0023	0,0023

Fonte: Autor, 2025.

Sendo:

$E_c$  = o módulo de elasticidade do concreto.

$\nu$  = coeficiente de Poisson.

$f_t$  = resistência a tração do aço.

$f_c$  = resistência a compressão do concreto.

$G_f$  = energia específica de fratura.

$\varepsilon_{cp}$  = deformação de compressão.

$\phi_a$  = diâmetro do agregado graúdo.

$W_d$  = deformação última de compressão.

$\phi_c$  = fator de retenção de cisalhamento.

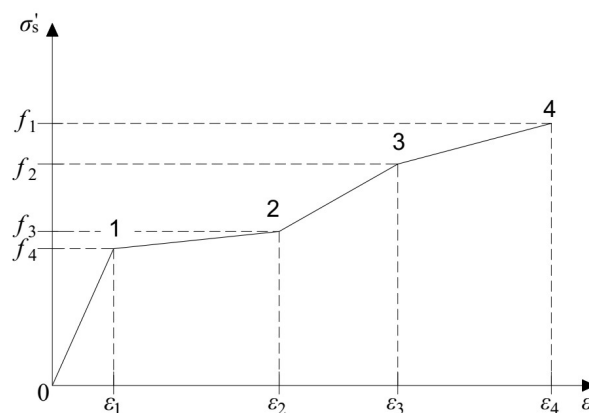
$\rho$  = peso específico.

### 3.2.1.2. AÇO

Para modelar as barras no software Atena, foi utilizada a abordagem discreta, em que cada barra é modelada de forma individual, sendo idealizada em um elemento de treliça 1D, permitindo a modelagem de armaduras em diferentes arranjos. No programa é utilizada uma técnica, “*Embedded Reinforcement*”, que liga os nós dos elementos da barra aos deslocamentos dos nós dos sólidos adjacentes. Assim, só é necessário o posicionamento correto de cada barra dentro dos elementos sólidos de concreto e a atribuição da área de cada barra.

Nesse sentido, foi utilizado no software Atena o modelo constitutivo “*CCReinforcement*” para as barras de aço mencionadas acima, devido o mesmo possibilitar a representação do material através de leis bilineares ou multilinear, considerando as fases elástica, de escoamento, de endurecimento e de ruptura do aço, conforme apresentado na Figura 4.21.

Figura 4.21 - multilinear do aço.



Fonte: Adaptado de Cervenka *et al.* (2021).

Para esse trabalho, foram consideradas apenas as duas primeiras fases, sendo alimentado no programa o módulo de elasticidade, a tensão de escoamento e a tensão de ruptura com suas

respectivas deformações. Propriedades mecânicas essas que foram fundamentadas pelo autor, sendo adotado os seguintes parâmetros apresentados na Tabela 4.3

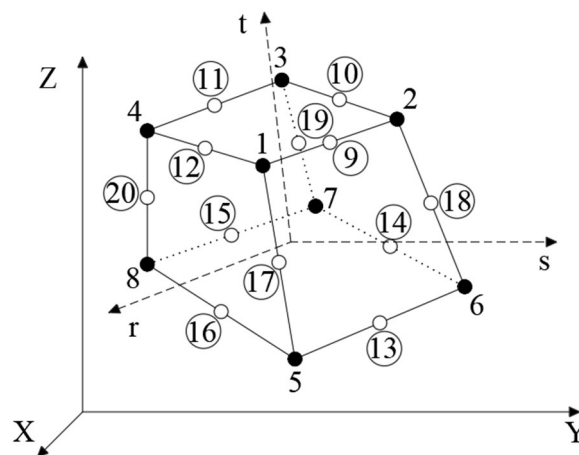
Tabela 4.3 - Parâmetros adotados para o modelo constitutivo do aço.

Espécime	Módulo de Elasticidade (MPa)	Aço – Ø10			Aço – Ø16		
		$f_y$ (MPa)	$f_u$ (MPa)	$\epsilon_{lim}$	$f_y$ (MPa)	$f_u$ (MPa)	$\epsilon_{lim}$
CRC-0,18	200000	590	790	0,025	576	673	0,025
CRC-0,47	200000	590	790	0,025	576	673	0,025
CRL-0,18	200000	590	790	0,025	576	673	0,025
CRL-0,47	200000	590	790	0,025	576	673	0,025

### 3.2.1.3. MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

No Atena, são disponibilizados vários tipos de elementos finitos para elementos 1D a 3D, para a malha utilizada nos elementos sólidos de concreto e aço, foi empregue elementos hexaédricos do tipo “CSIsoBrick”, ao qual pode possuir uma variação de oito nós, sendo cada um localizado nos vértices do elemento, ou com vinte nós, sendo um em cada vértice, acrescidos de nós intermediários, como apresentado na Figura 4.22. Nesse trabalho, foi adotado a variação com oito nós, possuindo assim, oito pontos de integração e de interpolação linear, modelo esse que é usual para esse tipo de modelagem.

Figura 4.22 - Representação do elemento “CSIsoBrick”

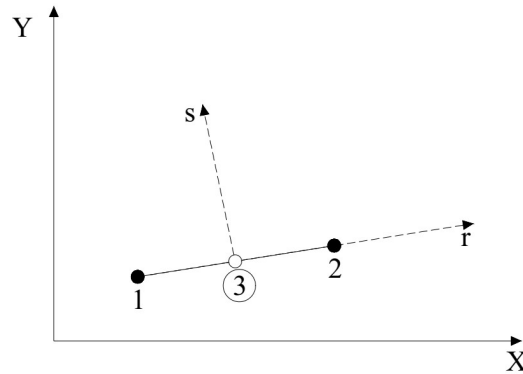


Fonte: Adaptado de Cervenka *et al.* (2021).

Em relação as armaduras, essas que são idealizadas em um elemento de treliça 1D, foram utilizados elementos finitos do tipo “CCIsoTruss”, sendo esses capazes de resistir a esforços de tração e compressão, apresentando variações com dois ou três nós, sendo dois nas extremidades

e um terceiro intermediário, Figura 4.23, sendo utilizado nesse trabalho a variação com dois nós, como também adotado pelos autores Setiawan (2019); e Mendes et al. (2024).

Figura 4.23 - Representação do elemento “*CCIsoTruss*”.

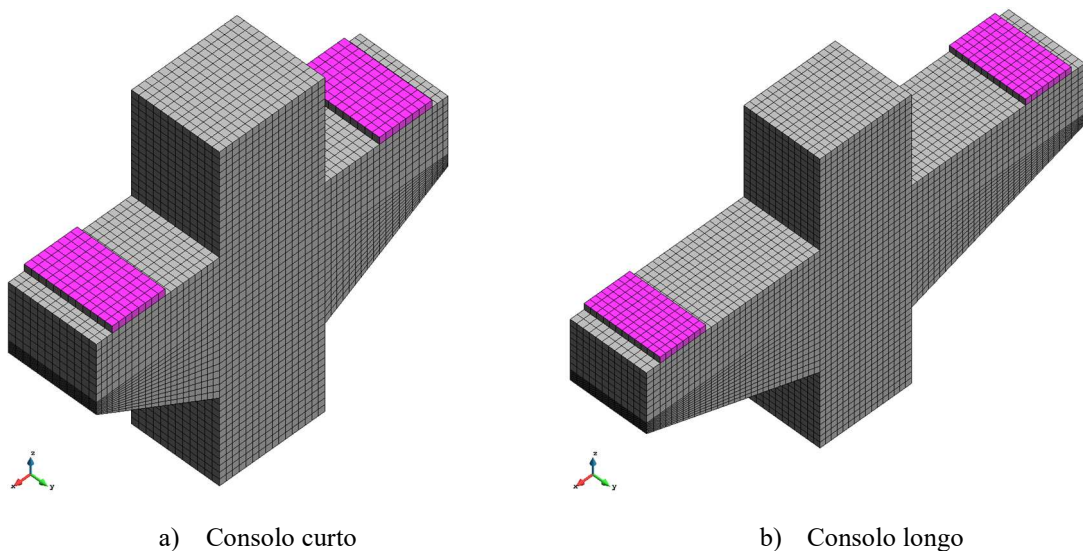


Fonte: Adaptado de Cervenka *et al.* (2021).

Todos os elementos utilizados incorporam uma formulação isoparamétrica em que são usados para definir a geometria e os deslocamentos dentro do elemento, as tensões internas são integradas por meio de integração de Gauss que garante a precisão da ordem de  $n_p(n_p - 1)$ , em que  $n_p$  é o grau do polinômio usado para aproximar a função integrada.

No que se refere as dimensões dos elementos finitos utilizados, a princípio, elementos com dimensões de aproximadamente 20 mm, conforme a Figura 4.24.a e b, posteriormente será feito um estudo de malhar como forma de calibragem.

Figura 4.24 - malha de elementos finitos.



Fonte: Autor, 2025.

### 3.2.1.4. CARREGAMENTO

Para calibração, foram testadas as aplicações de carregamento através do controle de deslocamento, utilizando o método de newton-raphson, e do controle de força, por meio do método de Arc-Length para resolução das equações não-lineares, conforme recomendações de Cervenka et al. (2021). Sendo aplicado o deslocamento ou a força máxima aferida nos ensaios experimentais de Lima (2024) distribuindo essas ao longo de cem passos de carga, realizando até cinquenta iterações a cada passo.

Nesse sentido, tem-se que o método de Newton-Raphson considera uma relação entre a resistência interna e a carga externa aplicada na estrutura, verificando a análise incremental passo a passo por meio de um conjunto de equações não lineares, Equação 4.12. A não linearidade ocorre devido às propriedades não-lineares inerentes das forças internas.

$$K(p) \cdot \Delta p = q - f(p) \quad \text{Equação 4.12}$$

Sendo:

$K(p)$  = Matriz de rigidez.

$\Delta p$  = Incremento de deformação devido ao incremento de carga.

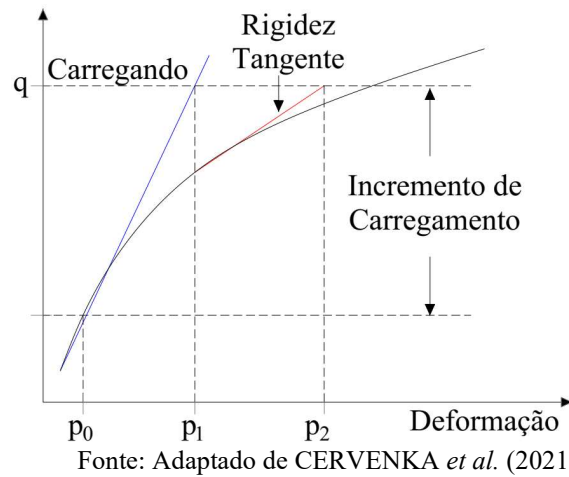
$q$  = Vetor de cargas conjuntas totais aplicadas.

$f(p)$  = Vetor de forças internas.

$p$  = Deformação da estrutura antes do incremento de carga.

Com isso, para a resolução da Equação 4.12 é realizado um procedimento de iteração até que alguns critérios de convergência sejam satisfeitos, sendo mantido o padrão do programa com erros de deslocamento, residual e residual absoluto de no máximo 0,01, além de erro de energia de no máximo 0,00001. Na Figura 4.25 é exibido o conceito da resolução dessa equação não-linear pelo método de Newton-Raphson, em que a cada iteração é recalculada a matriz de rigidez, indicada pela linha tangente.

Figura 4.25 - Resolução de problema não-linear por Newton-Raphson

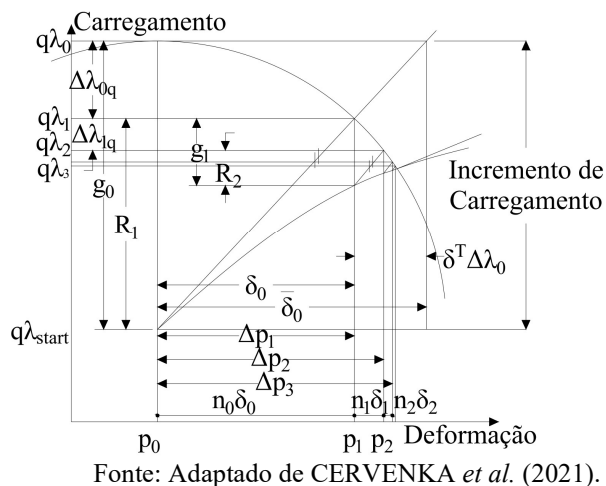


Em relação ao método de Arc-Length tem-se que esse é estabelecido para problemas com não linearidade geométrica e do material. O método apresenta flexibilidade na alteração da carga, reduzindo o incremento de carga conforme a necessidade, para isso, é adicionado um novo parâmetro, representado por  $\lambda_i$ . Dessa forma, a resolução das equações não lineares é dada por meio da Equação 4.13.

$$K(p) \cdot \Delta p = \lambda_i \cdot q - f(p) \tag{Equação 4.13}$$

Além disso, é introduzido nesse método outra variável escalar ( $n$ ), sendo esse utilizado para acelerar soluções nos casos em que a carga-deformação sejam estáveis ou para amortecer possíveis oscilações, quando surgem problemas de convergência. Na Figura 4.26 é apresentado o conceito da resolução utilizando o método de Arc-Length.

Figura 4.26 - Resolução de problema não-linear por Arc-Length

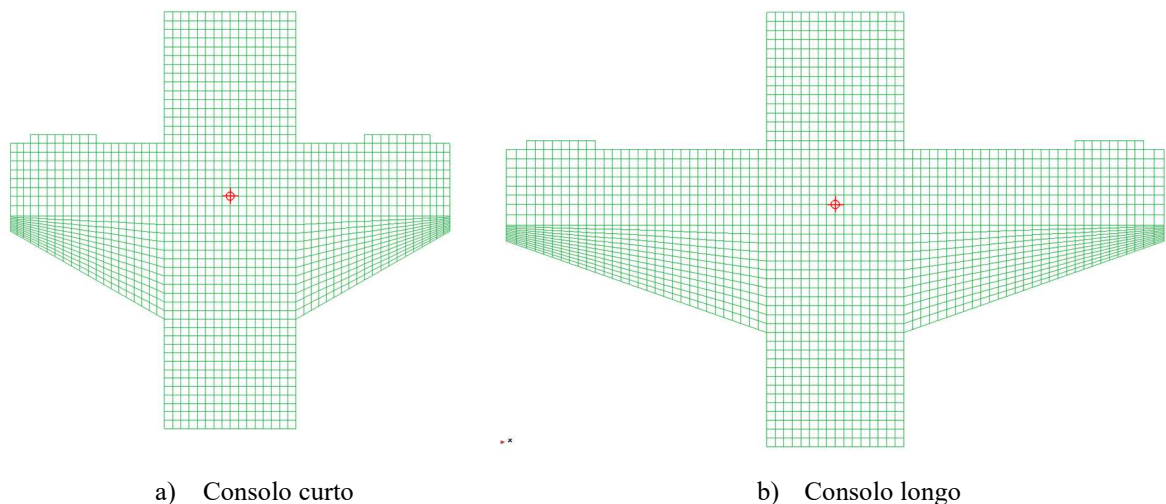




### 3.2.1.6 Monitores

Na modelagem computacional realizada no software ATENA, buscou-se reproduzir fielmente o arranjo de instrumentação adotado nos ensaios experimentais de Lima (2024) e Silva (2024). Para isso, foram posicionados monitores de deslocamento em Z exatamente nas mesmas localizações utilizadas nos modelos físicos, permitindo o acompanhamento do comportamento à flexão dos consolos ao longo do carregamento como mostrado na Figura 4.28.a e .b. Essa estratégia assegurou a comparabilidade direta entre os resultados numéricos e os dados experimentais, possibilitando uma análise mais precisa da calibração e validação do modelo.

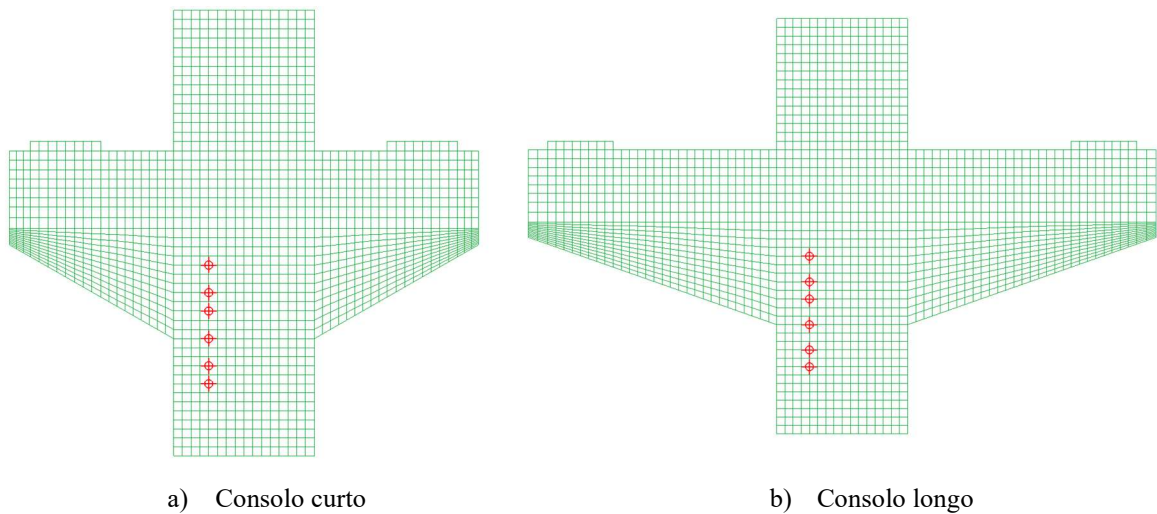
Figura 4.28 – Posição dos monitores de deslocamento do concreto



Fonte: Autor, 2025.

Para o monitoramento das deformações no concreto, foram posicionados, na modelagem numérica, sensores de deformações em X nos mesmos pontos utilizados nos ensaios experimentais, como ilustrado na Figura 4.29.a e .b. A replicação da instrumentação visou garantir a equivalência entre os dados numéricos e os resultados de laboratório, permitindo a comparação direta do desenvolvimento das deformações ao longo do carregamento. Essa configuração foi fundamental para avaliar a coerência do modelo em relação ao comportamento real, especialmente no que se refere à resposta do concreto sob compressão nas zonas críticas da ligação consolo–pilar.

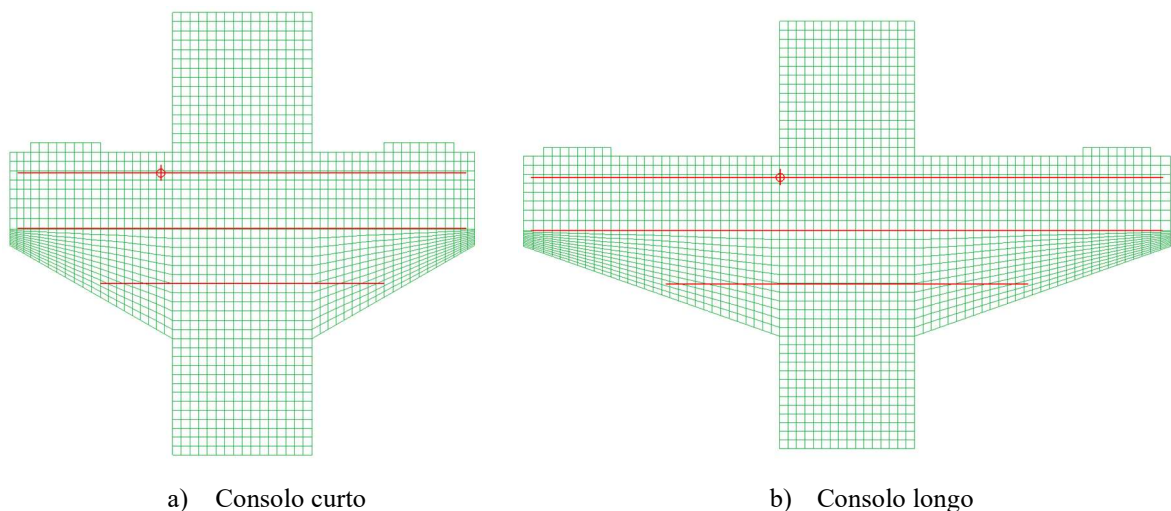
Figura 4.29 - Posição dos monitores de deformação do concreto.



Fonte: Autor, 2025.

Para monitorar as respostas mecânicas do aço na modelagem numérica, foram posicionados monitores de deformação em linhas no sentido  $X$  na mesma posição que foi ensaiada na barra de flexão mais solicitada do sistema. O posicionamento pode ser observado na Figura 4.30.a e .b.

Figura 4.30 - Posição dos monitores de deformação no aço.



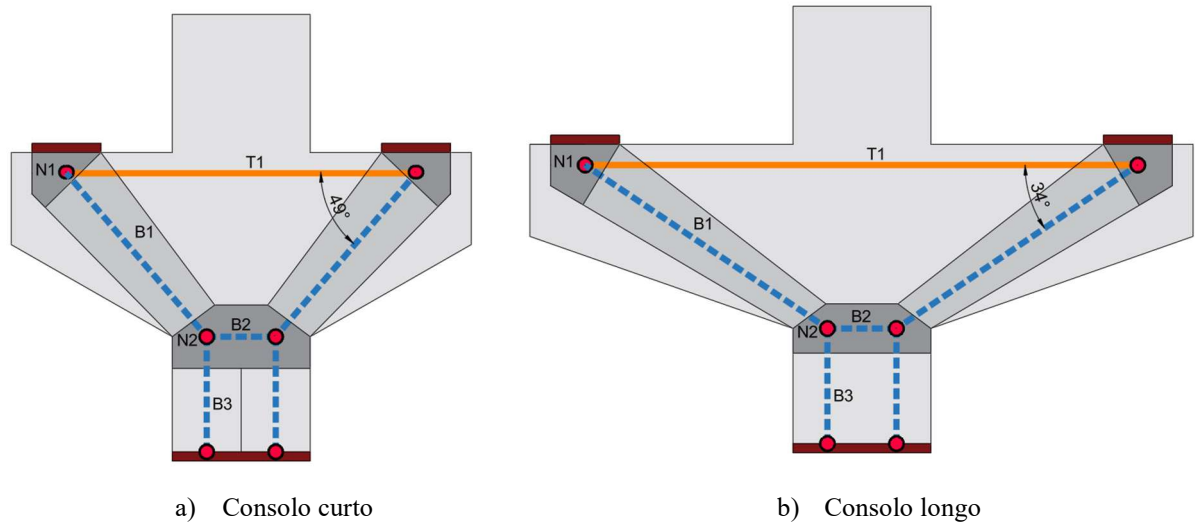
Fonte: Autor, 2025.

### 4.3. MODELO DE BIELAS E TIRANTES

O método das bielas e tirantes foi empregado na análise teórica da resistência dos consolos, com o intuito de verificar a confiabilidade das previsões obtidas pelos modelos. O tirante foi posicionado em função da altura útil e do centroide do aparelho de apoio, levando em consideração que a armadura principal se encontrava disposta em uma única camada. Os nós

de compressão, por sua vez, foram definidos na interface entre o pilar e o consolo. A Figura 4.31 ilustra o modelo considerado para os consolos.

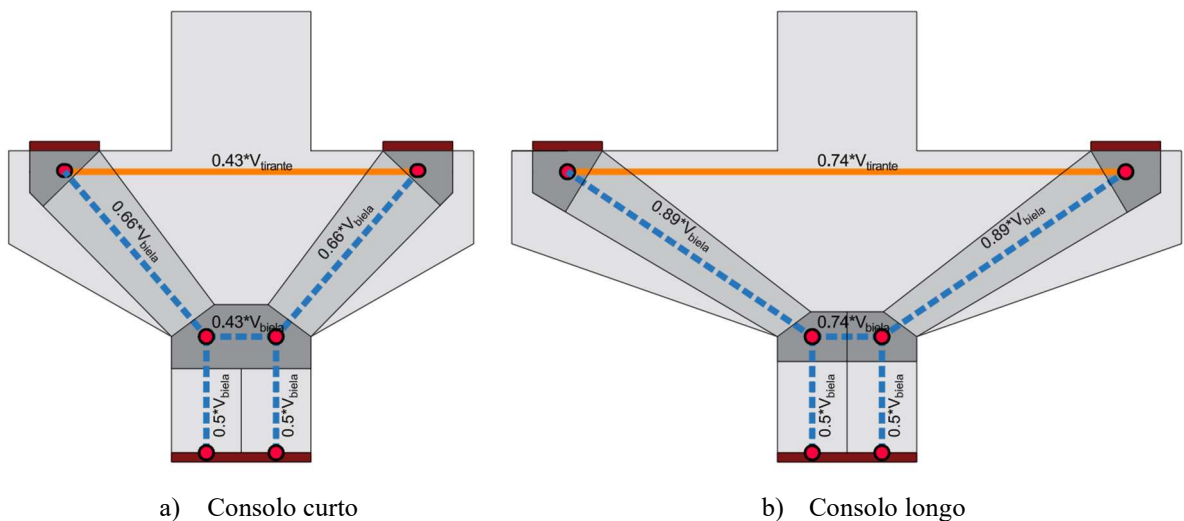
Figura 4.31 - Modelo de bielas e tirantes para os consolos.



Fonte: Autor, 2025.

Com o modelo de treliça final definido, procedeu-se à análise da distribuição dos esforços em cada elemento do sistema estrutural. Para essa verificação, foi aplicada uma carga de 0,5 kN em cada aparelho de apoio, com o intuito de identificar a força correspondente em cada biela, tirante e nó do modelo. A Figura 4.32 apresenta a verificação realizada para os consolos, evidenciando o comportamento previsto. Ressalta-se que as verificações dos nós de compressão foram conduzidas considerando exclusivamente os nós (CCT).

Figura 4.32 - Distribuição de esforço na treliça dos consolos



Fonte: Autor, 2025.

Para a verificação dos consolos pelo modelo de treliça, foram consideradas as expressões apresentadas nas Equações 4.14 a 4.16, que permitem avaliar a segurança dos elementos submetidos aos esforços. A Equação 4.14 foi utilizada para determinar a resistência do tirante tracionado, relacionando a tensão de escoamento do aço com a área da armadura. Já a Equação 4.15 corresponde à verificação da resistência das bielas comprimidas, levando em conta a largura efetiva do consolo e a resistência média do concreto. Por fim, a Equação 4.16 foi aplicada para a análise dos nós de compressão, assegurando que os esforços transmitidos não ultrapassassem os limites estabelecidos pelo concreto.

$$f_{u,t} = \frac{f_y \times A_s}{f_t} \quad \text{Equação 4.14}$$

$$V_{u,b} = \frac{(b_w \times w_s) \times f_{cm}}{f_b} \quad \text{Equação 4.15}$$

$$V_{u,n} = \begin{cases} \frac{(b_w \times w_{n1}) \times f_{cm}}{f_{n1}} \\ \frac{(b_w \times w_{n2}) \times f_{cm}}{f_{n2}} \\ \frac{(b_w \times w_{n3}) \times f_{cm}}{f_{n3}} \end{cases} \quad \text{Equação 4.16}$$

Onde:

$b_w$  é a largura dos consolos;

$w_s$  é a menor largura da biela;

$w_n$  é a largura de cada face nodal;

$f_n$  é a distribuição de força nos nós;

$f_b$  é a distribuição de força nas bielas;

$f_t$  é a distribuição de força nos tirantes;

$f_{cm}$  é a resistência a compressão média;

## 5. RESULTADOS

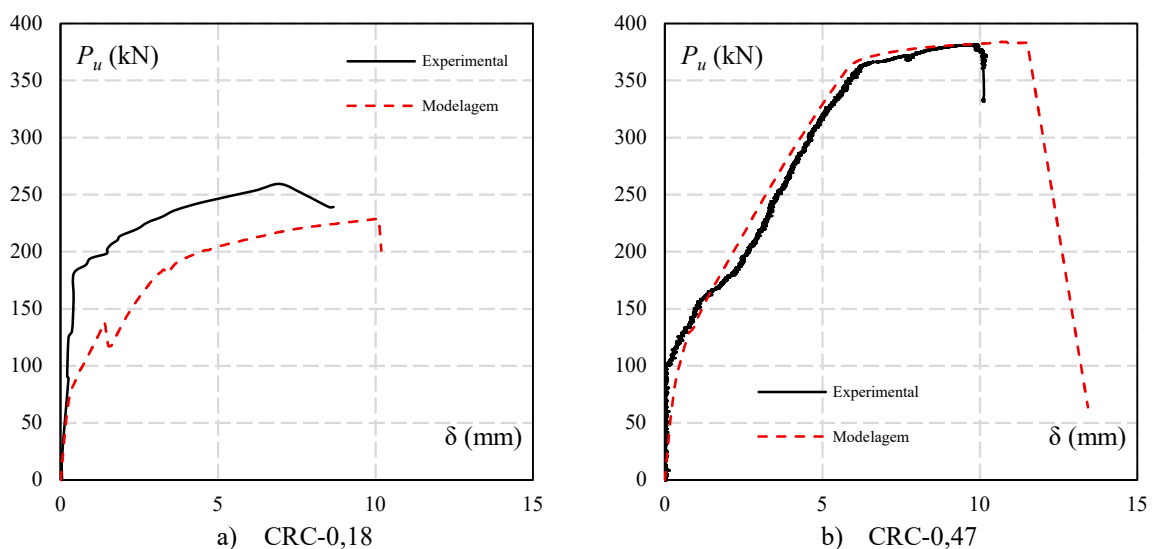
### 5.1. MODELAGEM COMPUTACIONAL

Os resultados da análise numérica realizada no software ATENA foram confrontados com os dados experimentais apresentados por Silva (2024) e Lima (2024). A comparação considerou a carga última, a relação carga–deslocamento e o modo de ruptura, com o objetivo de avaliar o comportamento dos modelos propostos.

#### 5.1.1. Carga x Deslocamento

A Figura 5.1.a e .b apresenta a análise dos gráficos de carga versus deslocamento para os consolos curtos evidenciando diferenças relevantes entre os resultados experimentais e aqueles obtidos por meio da modelagem numérica. No consolo CRC-0,18, nota-se que a curva experimental apresenta maior rigidez inicial e capacidade resistente em relação ao modelo computacional, além de demonstrar um patamar de pós-pico mais bem definido, enquanto a simulação apresentou queda acentuada da resistência logo após o máximo. Por outro lado, no consolo CRC-0,47, a aproximação entre os resultados foi mais satisfatória, com a modelagem reproduzindo de maneira consistente tanto a rigidez inicial quanto a resistência última, acompanhando de forma adequada a resposta experimental até o pico de carga, divergindo apenas no trecho descendente, no qual a curva numérica apresentou queda abrupta da resistência, em contraste com o comportamento mais gradual observado no ensaio experimental.

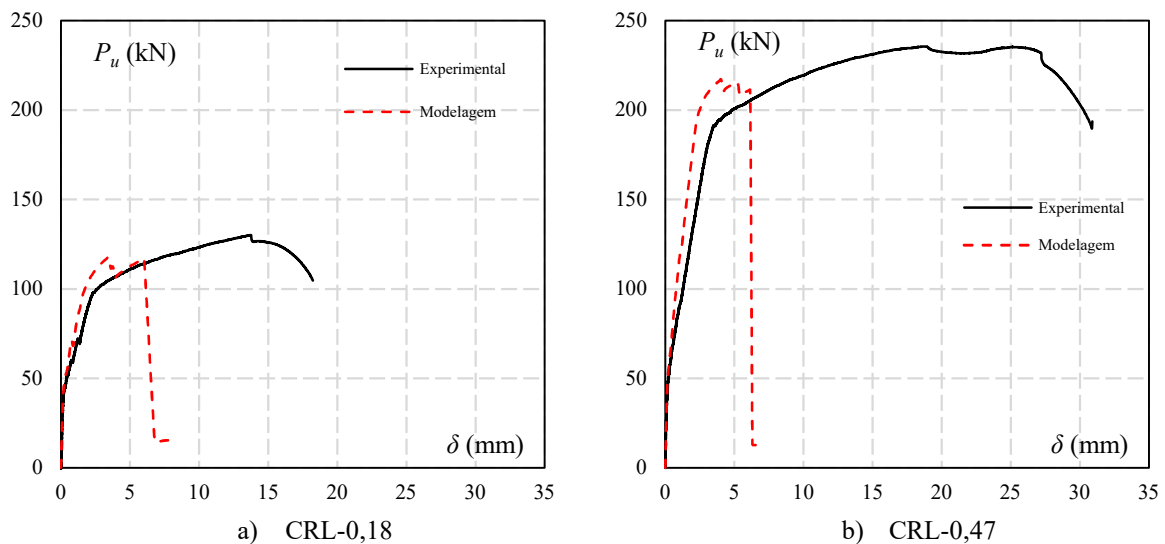
Figura 5.1 - Gráficos carga x deslocamento dos consolos curtos.



Fonte: Autor, 2025.

Já para os consolos longos, como expresso na Figura 5.2.a e.b, observa-se que a modelagem numérica conseguiu reproduzir de forma satisfatória a tendência geral do comportamento estrutural, principalmente na fase inicial de carregamento. No consolo CRL-0,18, a curva numérica apresentou rigidez superior em relação à experimental e uma redução mais acentuada da resistência após o pico, enquanto o ensaio experimental indicou maior capacidade de deformação antes da ruptura. De modo semelhante, no consolo CRL-0,47, a modelagem acompanhou bem a resposta inicial, mas apresentou queda abrupta após a carga máxima, ao passo que a curva experimental mostrou um comportamento mais gradual no pós-pico.

Figura 5.2 - Gráficos carga x deslocamento dos consolos longos.



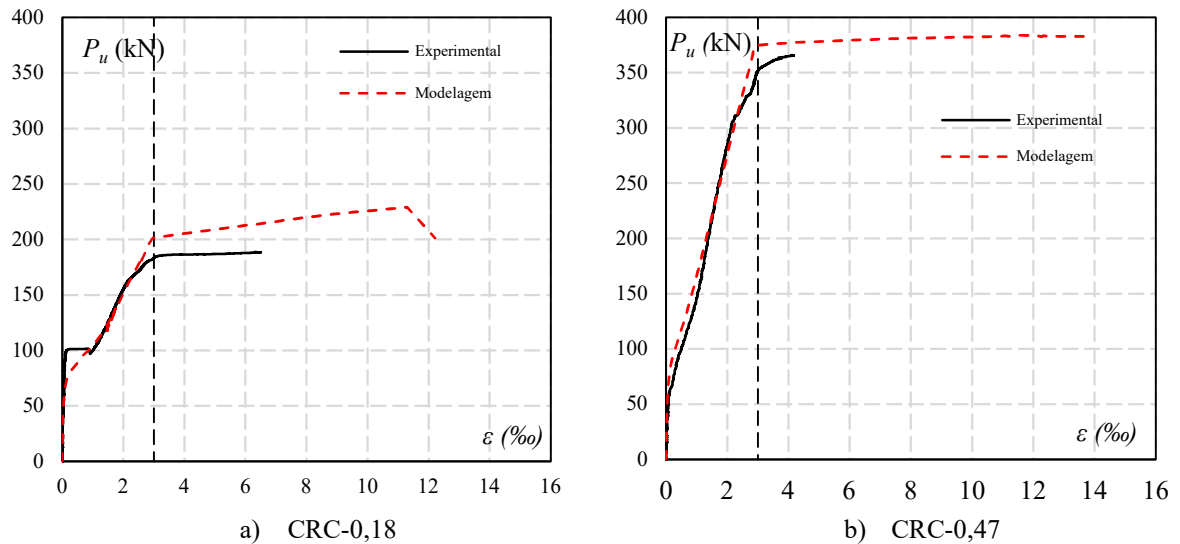
Fonte: Autor, 2025.

### 5.1.2. Carga x Deformação do aço

Na análise da relação carga versus deformação do aço nos consolos curtos, como observado na Figura 5.3.a e .b , verifica-se que a modelagem numérica foi capaz de reproduzir de forma satisfatória a tendência geral dos ensaios. No consolo CRC-0,18, a curva experimental indicou o escoamento da armadura em um nível de deformação menor que o previsto pelo modelo, o que fez com que a simulação apresentasse maior alongamento no pós-pico. Já no consolo CRC-0,47, observa-se uma boa aproximação entre os resultados, especialmente na fase inicial e até o escoamento do aço, com a modelagem acompanhando adequadamente a resposta experimental, divergindo apenas no trecho posterior, em que a simulação manteve a resistência estável enquanto o ensaio indicou maior redistribuição de deformações. Assim, pode-se concluir que a modelagem conseguiu representar de forma coerente o comportamento do aço

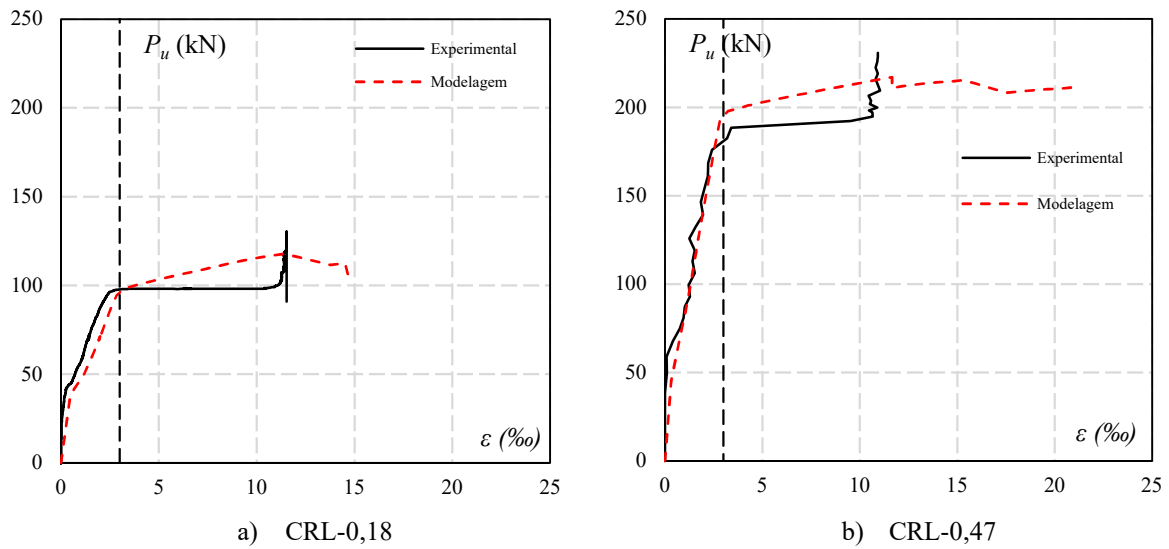
nos consolos curtos, ainda que com tendência a superestimar a ductilidade após o início do escoamento.

Figura 5.3 - Gráficos carga x deformação do aço dos consolos curtos.



A Figura 5.4 representa a relação carga versus deformação do aço evidenciando que a modelagem conseguiu capturar de maneira consistente o comportamento até o início do escoamento, mostrando boa concordância com os resultados experimentais. Para o modelo CRL-0,18, nota-se que o ensaio físico apresentou menor alongamento do aço após o pico, enquanto a simulação indicou maior continuidade de deformações, prolongando a capacidade resistente. Já no consolo CRL-0,47, a aproximação entre as curvas foi ainda mais evidente, especialmente na fase inicial, embora a modelagem tenha mantido valores de deformação mais elevados no regime pós-escoamento, diferindo do comportamento real observado no experimento. Assim, verifica-se que a modelagem numérica representou de forma coerente o desempenho dos consolos longos, com tendência a superestimar a ductilidade do aço, mas preservando a correta identificação do ponto de escoamento.

Figura 5.4 - Gráficos carga x deformação do aço dos consolos longos.

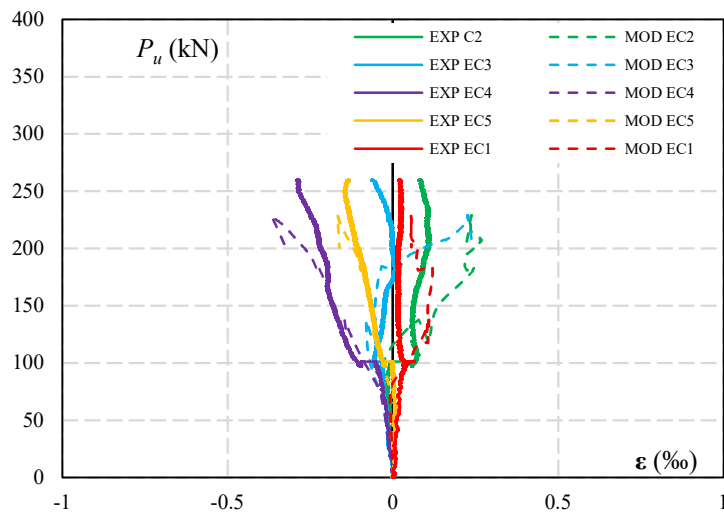


Fonte: Autor, 2025.

### 5.1.3. Carga x Deformação do concreto

Na análise da relação carga versus deformação do concreto nos consolos curtos, observa-se que a modelagem numérica conseguiu captar de forma razoável a tendência geral dos ensaios experimentais, ainda que com algumas diferenças de intensidade nos valores de deformação. Para o consolo CRC-0,18, nota-se que a resposta experimental apresentou mais uniforme entre os pontos instrumentados, enquanto a simulação indicou comportamento maior dispersão entre as regiões monitoradas. Além disso, a modelagem superestimou a deformabilidade do concreto em alguns pontos, prolongando a resposta em comparação ao observado nos ensaios, porem conseguindo representar a tendencia das curvas experimentais, como observado na Figura 5.5.

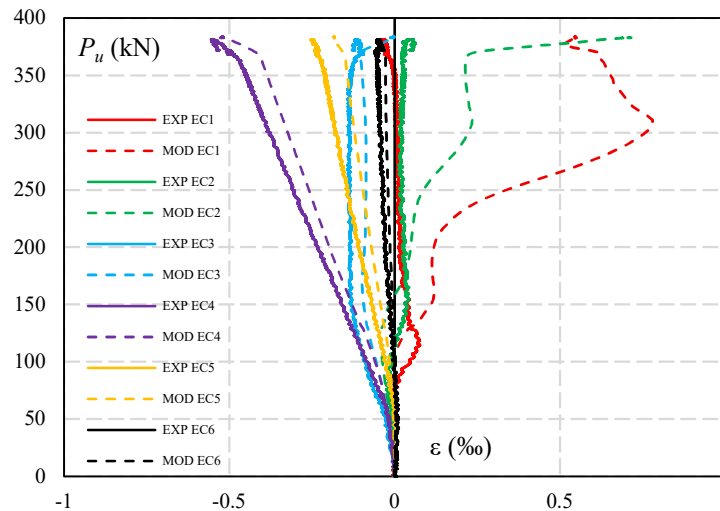
Figura 5.5 - Gráficos carga x deformação do concreto do consolo CRC-0,18.



Fonte: Autor, 2025.

Já no consolo CRC-0,47, de acordo com a Figura 5.6, percebe-se uma melhor aproximação entre as curvas experimentais e numéricas, principalmente no trecho inicial do carregamento, embora em níveis mais elevados de deformação o modelo tenha novamente indicado maior ductilidade do que a verificada em laboratório.

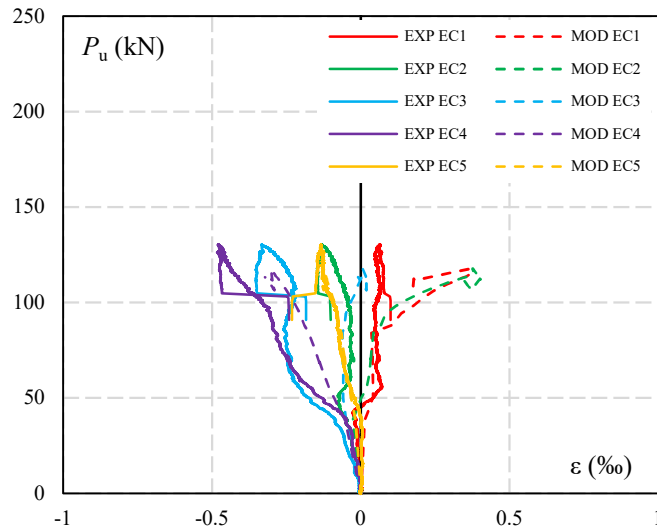
Figura 5.6 - Gráficos carga x deformação do concreto do consolo CRC-0,47.



Fonte: Autor, 2025.

Nos consolos longos, a relação carga versus deformação do concreto evidencia que a modelagem numérica acompanhou de maneira satisfatória a evolução do comportamento estrutural, sobretudo na fase inicial de aplicação de carga. No modelo CRL-0,18, percebe-se que as curvas experimentais apresentaram maior variação entre os pontos monitorados, indicando uma distribuição menos uniforme das deformações, enquanto a simulação mostrou resultados mais concentrados e contínuos, porém conseguindo representar a tendência para a maioria das curvas experimentais, como ilustrado na Figura 5.7.

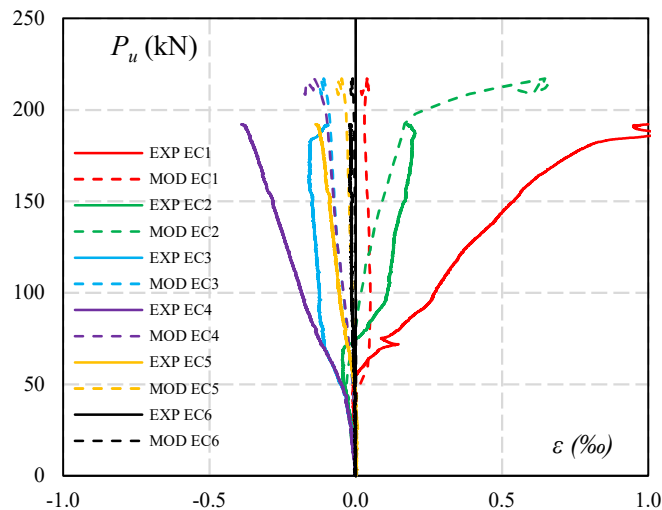
Figura 5.7 - Gráficos carga x deformação do concreto do consolo CRL-0,18.



Fonte: Autor, 2025.

Já no consolo CRL-0,47, como é possível observar na Figura 5.8 a correspondência entre ensaio e modelagem foi mais próxima, principalmente até a proximidade da carga máxima, embora a análise numérica tenha apresentado uma deformações mais uniforme entre os pontos do que foi registrado no experimento.

Figura 5.8 - Gráficos carga x deformação do concreto do consolo CRL-0,47.



Fonte: Autor, 2025.

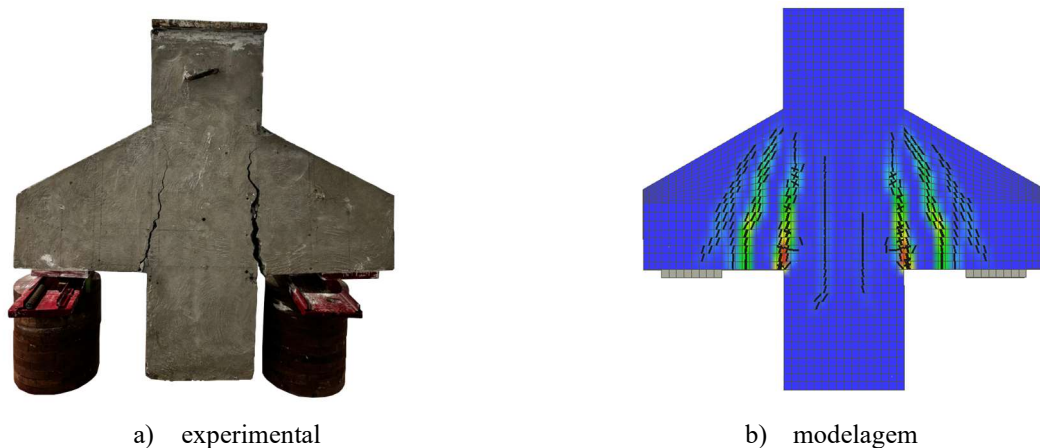
De modo geral, tanto para os consolos curtos quanto para os longos, a modelagem numérica mostrou-se consistente em reproduzir a tendência global do comportamento do concreto, principalmente na fase inicial de carregamento. Entretanto, verificou-se que o modelo apresentou uma resposta mais regular em comparação aos ensaios experimentais, suavizando variações locais registradas pelos instrumentos e indicando níveis de deformação superiores

após a carga máxima. Dessa forma, embora a simulação tenha representado adequadamente o comportamento estrutural, há uma clara tendência de o modelo superestimar a ductilidade do concreto frente ao observado em laboratório.

#### 5.1.4. Fissuração

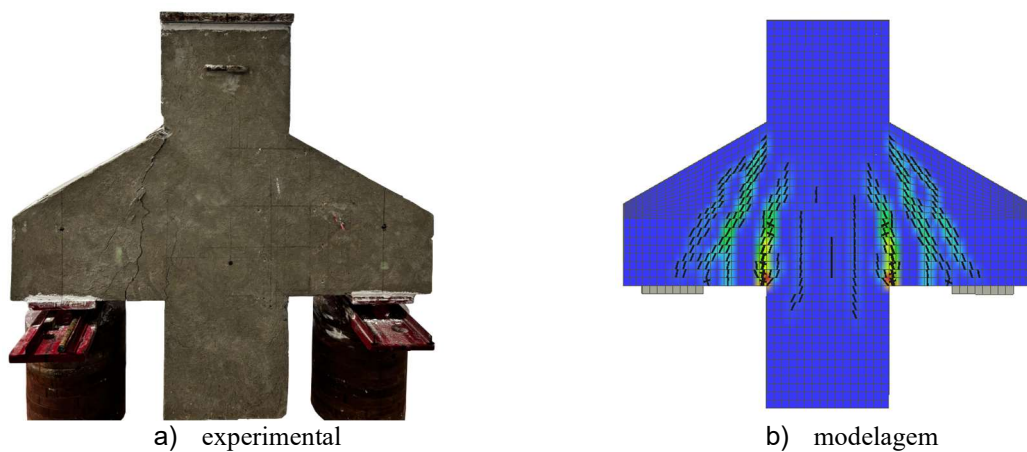
Nas Figura 5.9 - padrão de fissuração CRC - 0,18 e Figura 5.10 - padrão de fissuração CRC - 0,47, são apresentados os padrões de fissuração obtidos por meio da modelagem numérica em relação ao experimental para os consolos curtos (CRC-0,18 e CRC-0,47). Verifica-se que a simulação foi capaz de reproduzir adequadamente o comportamento observado experimentalmente, indicando a formação de fissuras inclinadas que partem da região de ligação entre o pilar e o consolo em direção ao apoio, configurando um mecanismo típico de ruptura à flexão.

Figura 5.9 - padrão de fissuração CRC - 0,18



Fonte: Autor, 2025.

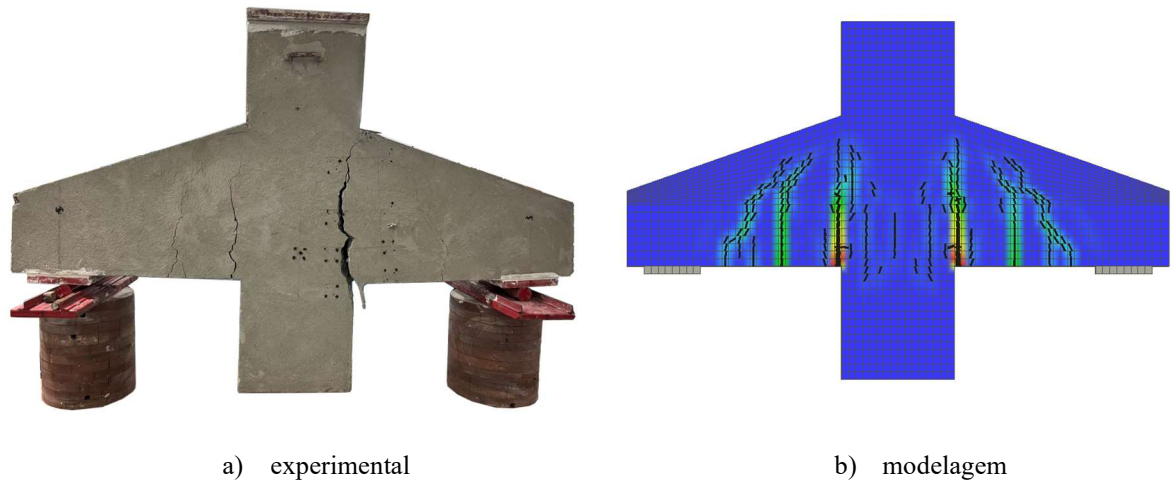
Figura 5.10 - padrão de fissuração CRC - 0,47



Fonte: Autor, 2025.

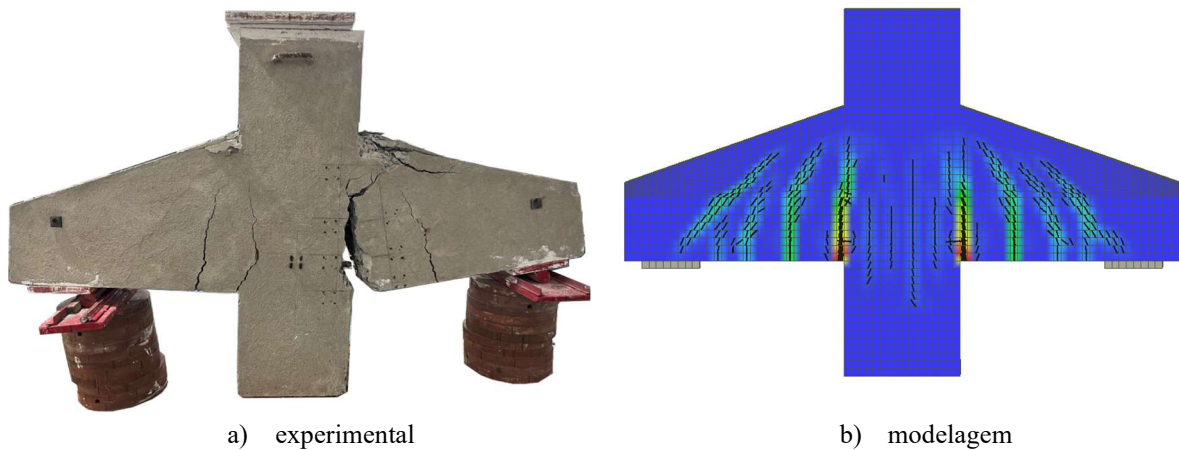
Já nas Figura 5.11 - padrão de fissuração CRL - 0,18 e Figura 5.12 - padrão de fissuração CRL - 0,47 são ilustrados os padrões de fissuração dos consolos longos (CRL-0,18 e CRL-0,47). Onde as fissuras apresentaram-se mais distribuídas ao longo do elemento, porém com a fissuração principal na liga pilar consolo, caracterizado pela ruptura por flexão. o que é coerente para esses elementos já que seu comportamento é próximo ao de uma viga em balanço.

Figura 5.11 - padrão de fissuração CRL - 0,18



Fonte: Autor, 2025.

Figura 5.12 - padrão de fissuração CRL - 0,47



Fonte: Autor, 2025.

De modo geral, a comparação entre o experimental e o numérico demonstrou boa correspondência no padrão das fissuras, embora a modelagem tenha novamente indicado uma distribuição mais uniforme e contínua das trincas em relação ao ensaio.

## 5.2. MODELO DE BIELAS E TIRANTES

Também foi aplicado o modelo de bielas e tirantes aos consolos estudados, com o objetivo de verificar a capacidade resistente teórica desses elementos a partir do equilíbrio interno das forças. Esse modelo, amplamente utilizado no dimensionamento de regiões descontínuas, permite representar o fluxo de tensões através de bielas de compressão, tirantes de tração e nós de ligação, fornecendo uma estimativa da resistência última e possibilitando a identificação dos elementos críticos do sistema estrutural.

Os resultados obtidos pelo modelo de bielas e tirantes estão resumidos na Tabela 5.1. Nela são apresentadas as resistências últimas calculadas para os tirantes ( $V_{u,T}$ ) para as bielas de compressão ( $V_{u,B1}$ ,  $V_{u,B2}$ ,  $V_{u,B3}$ ) e para os nós ( $V_{u,N1}$ ,  $V_{u,N2}$ ), bem como o valor global de resistência do consolo ( $V_u$ ).

Tabela 5.1 - Resumo de valores máximos de previsão pelo MBT

Espécime	$V_{u,T}$ (kN)	$V_{u,B1}$ (kN)	$V_{u,B2}$ (kN)	$V_{u,B3}$ (kN)	$V_{u,N1}$ (kN)	$V_{u,N2}$ (kN)	$V_u$ (kN)
CRC-0.18	107.7	889.71	1634.25	1530	489.6	626,36	107.70
CRC-0.47	269.25	889.71	1634.25	1530	489.6	626,36	269.25
CRL-0.18	68.54	512.29	737.64	1530	489.6	486.55	68.54
CRL-0.47	171.34	512.29	737.64	1530	489.6	486.55	171.34

Fonte: Autor, 2025.

Verifica-se que, em todos os casos, as bielas de compressão apresentam valores de resistência bastante superior em relação à carga aplicada, não configurando elemento crítico do modelo. O mesmo ocorre com os nós, que também indicaram elevada capacidade resistente frente às solicitações. Dessa forma, observa-se que a ruptura prevista pelo modelo é governada essencialmente pela resistência dos tirantes.

Nos consolos curtos (CRC-0,18 e CRC-0,47), os resultados indicam valores de resistência global ( $V_u$ ) superiores aos obtidos para os consolos longos (CRL-0,18 e CRL-0,47), evidenciando o efeito da relação a/d na distribuição das forças internas. Além disso, nota-se que o aumento da taxa de armadura contribuiu significativamente para a elevação da resistência prevista, confirmando a importância desse parâmetro no comportamento estrutural.

De modo geral, os resultados demonstram que o modelo de bielas e tirantes forneceu estimativas conservadoras, mas coerentes com o comportamento observado, destacando-se como uma ferramenta útil para avaliação da capacidade resistente dos consolos.

### 5.3. TEÓRICO x EXPERIMENTAL x COMPUTACIONAL

A Tabela 5.2 apresenta a comparação entre os valores de resistência última obtidos experimentalmente, por meio da modelagem computacional e pelo modelo teórico de bielas e tirantes (MBT). Além disso, são mostrados os índices de eficiência, que relacionam os resultados experimentais com os obtidos pelos outros métodos.

Tabela 5.2 - Previsão de resistência entre os métodos

Espécime	Experimental	M. seções (NBR)	Computacional	Teórico MBT (ACI)	Eficiência		
	$V_{u.exp}$ (kN)	$V_{u.sec}$ (kN)	$V_{u.comp}$ (kN)	$V_{u.teo}$ (kN)	$V_{u.exp}/V_{u.comp}$	$V_{u.exp}/V_{u.sec}$	$V_{u.exp}/V_{u.teo}$
CRC-0.18	259.78	140.04	228.94	107.7	1.13	1.86	2.41
CRC-0.47	381.3	339.21	383.88	269.25	0.99	1.12	1.42
CRL-0.18	130.13	71.51	117.77	68.54	1.10	1.82	1.90
CRL-0.47	235.54	173.37	217.08	171.34	1.09	1.36	1.37
Média aritmética					1.08	1.54	1.78
Desvio-padrão					0.06	0.36	0.49
Coeficiente de variação					5.65	23.22	27.40

Fonte: Autor, 2025.

De maneira geral, observa-se que a modelagem computacional apresentou valores próximos dos resultados experimentais, com razão média  $V_{u,exp}/V_{u,comp}=1,08$ , indicando boa capacidade do modelo em representar a carga última da estrutural. O baixo coeficiente de variação (5,65%) reforça a consistência da aproximação numérica.

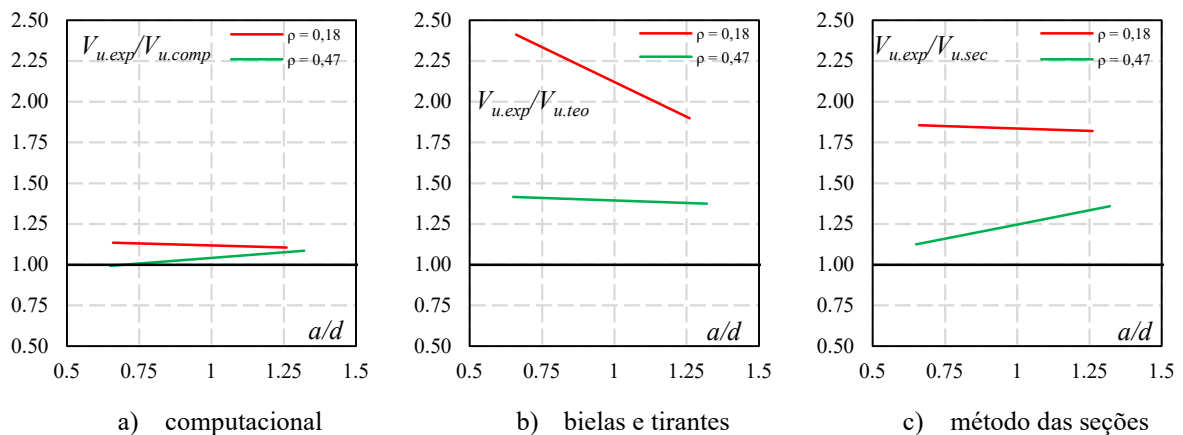
Já os valores teóricos obtidos pelo MBT mostraram-se mais conservadores, com resistências significativamente inferiores às registradas experimentalmente. Isso se refletiu em uma eficiência média de  $V_{u,exp}/V_{u,teo}=1,78$ , indicando que o modelo de bielas e tirantes, embora adequado para estimar a capacidade resistente de forma segura, tende a subestimar os valores reais.

Por fim, em relação ao método das seções presente na ABNT NBR 6118:2023, observou-se que este forneceu valores significativamente inferiores aos experimentais, com eficiência média de aproximadamente 1,54, evidenciando uma tendência a subestimar a capacidade resistente dos consolos.

Assim, a análise conjunta demonstra que a modelagem computacional foi a que melhor representou os resultados experimentais, enquanto o modelo teórico, apesar de mais conservador, fornece valores seguros e coerentes para fins de dimensionamento.

As Figura 5.13 - eficiência dos modelos em função da relação  $a/d$ , à .c apresentam os gráficos de eficiência obtidos para os modelos computacional, teórico MBT e método das seções NBR, respectivamente, em função da relação  $a/d$  e da taxa de armadura considerada. Observa-se que, no modelo computacional, os valores de eficiência permaneceram próximos da unidade, indicando boa correspondência com os resultados experimentais, sem variações significativas com a mudança da relação  $a/d$ . Já no modelo teórico de bielas e tirantes, verificou-se comportamento mais conservador, com valores sistematicamente superiores a 1,0 e tendência de redução da eficiência à medida que a relação  $a/d$  aumentou, principalmente para a menor taxa de armadura ( $\rho = 0,18$ ). Por fim, no método das seções, notou-se que, embora os valores também tenham se mantido acima da unidade, houve maior sensibilidade à variação de  $a/d$ , em especial para  $\rho = 0,47$ , que apresentou incremento da eficiência com o aumento da relação.

Figura 5.13 - eficiência dos modelos em função da relação  $a/d$



Fonte: Autor, 2025.

## 6. CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo analisar o comportamento a flexão de consolos com variações na relação  $a/d$  e nas taxas de armadura longitudinal, através de modelagem numérica não-linear, utilizando o software ATENA, e do Método de Bielas e Tirantes (MBT), comparando-os com resultados ensaiados experimentalmente por Lima (2025) e Silva (2025). A análise considerou consolos com duas relações  $a/d$ , de aproximadamente 0,65 para os curtos e entre 1,26 e 1,32 para os longos, além de duas taxas de armadura de flexão, iguais a 0,18% e 0,47%.

Na análise carga x deslocamento, verificou-se que a modelagem representou de forma satisfatória a carga última dos consolos, embora com divergências na rigidez, em especial para o CRC-0,18. Quanto a deformação no aço, a modelagem reproduziu adequadamente o escoamento, ainda que tenha superestimado a ductilidade. Para a deformação concreto, as curvas numéricas acompanharam a tendência experimental, sobretudo no CRL-0,47, apresentando, contudo, deformações mais uniformes que as medidas em ensaio.

Na análise da fissuração obtidas por meio da modelagem computacional, observou-se padrão de fissuras típicas de ruptura por flexão em todos os consolos. Nos curtos, as fissuras se concentraram na ligação pilar-consolo, enquanto nos longos apresentaram maior distribuição ao longo do elemento, coerente com o comportamento de vigas em balanço. No MBT, as bielas e nós mostraram elevada capacidade resistente, não sendo críticos, sendo a ruptura governada pelos tirantes. O método evidenciou a influência da relação  $a/d$  e da taxa de armadura, fornecendo previsões conservadoras, como é possível observar na Tabela 5.1.

Na comparação entre os métodos, constatou-se que a modelagem computacional foi a que melhor representou os resultados experimentais, com razão média  $V_{u,exp}/V_{u,comp}=1,08$  e baixo coeficiente de variação (5,65%), confirmando sua eficiência em reproduzir a capacidade resistente real dos consolos. O modelo de bielas e tirantes apresentou resultados mais conservadores, com eficiência média de  $V_{u,exp}/V_{u,teo}=1,78$ , subestimando significativamente as cargas últimas obtidas em ensaio. Já o método das seções resultou em eficiência média de  $V_{u,exp}/V_{u,sec}=1,54$ , também indicando tendência de subavaliação da resistência. Dessa forma, enquanto os métodos teóricos e normativos fornecem previsões conservadoras e seguras, a modelagem numérica mostrou-se mais precisa e consistente na estimativa da resistência última dos consolos.

Por fim, ao analisar a eficiência em função da relação  $a/d$ , verificou-se que a modelagem computacional manteve valores próximos da unidade, confirmando boa correspondência com os ensaios e pouca sensibilidade à variação do parâmetro. Já o MBT mostrou redução da eficiência com o aumento da relação, sobretudo para  $\rho = 0,18$ , enquanto o método das seções apresentou maior variação, com incremento da eficiência para  $\rho = 0,47$ . Assim, conclui-se que a relação  $a/d$  exerce maior influência nos métodos teóricos e normativos, enquanto a modelagem numérica mostrou-se mais estável e precisa na representação do comportamento real.

## 7. REFERÊNCIAS

AMANI, S.; ABBASPOUR, R.; YOUSEFPOUR, H. Post-fire behavior of lightweight concrete corbels. **Structures**, v. 59, n. 105745, p. 105745, 2024.

ARAÚJO, D. L.; AZEVEDO, S. A.; OLIVEIRA, E. M.; SILVA, E. M. O.; JÚNIOR, L. A. O. Strength evaluation of concrete corbels cast in different stage of columns. **IBRACON Structures and Materials Journal**, v.10, p. 509-546, 2017.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118. **Projetos de estruturas de concreto- Procedimento**. Rio de Janeiro, 2023.

AVANCINI, Giovane; SHAUER, Nathan; ORLANDINI, Francisco T.; LUCCHI, Paulo Cesar A.; DEVLOO, Philippe R. B. Extending h adaptivity with refinement patterns. **Advances in Applied Mechanics**. v. 59, p. 213-243. Elsevier, 2024.

BAZANT, Z. P. (1984). **Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock, Metal**. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, V. 110, No.4, Apr. 1984, pp. 518-535.

BDUL-RAZZAQ, K. S.; DAWOOD, A. A. Corbel strut and tie modeling – Experimental verification. **Structures**, v. 26, p. 327–339, 2020.

BESHARA, F. B. A.; MUSTAFA, T. S.; MAHMOUD, A. A.; KHALIL, M. M. A. **Constitutive models for nonlinear analysis of SFRC corbels**. **Journal of Building Engineering**, v. 28, 2020.

BOBEK, L.; KLUSÁČEK, L.; SVOBODA, A. Effective strengthening of reinforced concrete corbels using post-tensioning. **Engineering structures**, v. 305, 2024.

BORGES, J. A. **Otimização topológica para modelos de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado**. 2022. Dissertação (Mestre em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2022.

CARDOSO, Tobias Bezzi. **Dimensionamento de elementos fletidos em concreto armado com abertura: método empírico versus método das bielas e tirantes**. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil)- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

CARVALHO, M. L. **Análise de confiabilidade de modelos de capacidade resistente de blocos de fundação**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

CERVENKA, V. **ATENA Program Documentation Part 1 – Theory**. CERVENKA CONSULTING, 2021.

FUKAMATI, Rodrigo Hiroshi. **Aplicação do método dos elementos finitos em vigas de eulerbernoulli**. 2023. (Bacharelado em Engenharia Civil) – Faculdade de engenharia civil, Universidade Federal Fluminense, Fluminense, 2023.

GUERRA, M. B. B. F. **Modelos de concepção para estruturas em concreto armado com comportamento não linear obtidos pelo método de bielas e tirantes e otimização topológica**. 2017. Tese (Doutora em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2017.

HORDIJK, D.A. Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete — experiments, modelling and analyses. **HERON**, v. 37, 1992.

KHEYRODDIN, A.; RAYGAN, S.; KIOUMARSI, M. Strut and tie model for CFRP strengthened reinforced concrete corbels. **Engineering structures**, v. 304, n. 117609, p. 117609, 2024.

LIMA, Layse Rafaela Furtado. **Análise experimental de consolos curtos de concreto armado reforçados a flexão com laminados de PRFC com ancoragem colada e parafusada**. 2025. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de engenharia civil, Universidade Federal do Pará, Pará, 2025.

MAHL, Rodrigo Kessler. **Análise estrutural de reservatório circular do tipo intze por meio do método dos elementos finitos**. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil)- Universidade de Santa Cruz do Sul, Santa Cruz do Sul, 2019.

MELLO, André Felipe Aparecido de. **Análise e dimensionamento de vigas-parede em concreto armado utilizando o método biela-painel**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de engenharia civil, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

MENDES, R. P.; MESQUITA, L. C.; FERREIRA, M. P.; TRAUTWEIN, L. M.; MARVILA, M. T.; MARQUES, M. G. Numerical evaluation of the punching shear strength of flat slabs subjected to balanced and unbalanced moments. **Buildings**, v. 14, n. 4, p. 985, 2024.

MENETREY, Philippe., **Numerical analysis of punching failure in reinforced concrete structures**. PhD Thesis. Department of Civil Engineering, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Switzerland, 1994, 177 pp.

MERICAN CONCRETE INSTITUTE. Committee 318. **Building code requirements for structural concrete** (ACI 318-19). Detroit, 2019.

MORAES, Rodrigo Fernandes; LIMA, Layse Rafaela Furtado. **Resistência de consolos curtos de concreto armado através de modelagem numérica não-linear e do método de bielas e tirantes**. 2022. (Bacharelado em Engenharia Civil) – Faculdade de engenharia civil, Universidade Federal do Pará, Pará, 2022.

ROSERO, Bryan German Pantoja. **Análise dinâmica de estruturas de concreto armado via elementos finitos**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade De Brasília, Brasília, 2018.

ROTS, J. G. and Blaauwendraad, J. Crack models for concrete: discrete or smeared? fixed, multi-directional or rotating. **HERON**, V. 34, No. 1, 1989.

SCHLAICH, J.; SCHAFER, K.; JENNEWEIN, M. Toward a consistent design of structural concrete. **PCI Journal**, 1987.

SETIAWAN, A.; VOLLUM, R. L.; MACORINI, L.; IZZUDDIN, B. Efficient 3-D modelling of punching shear failure at slab-column connections by means of nonlinear joint elements. **Engineering Structures**, v. 197, 2019.

SHAKIR, Q. M.. Performance assessment of high strength concrete two-sided corbels with embedded stiffened web-rolled steel. **Structures**, v. 32, p.1469-1480, 2021.

SILVA, Lucas Carvalho. **Investigação da resistência à flexão de consolos não curtos reforçados com PRFC utilizando sistemas de ancoragem**. 2025.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de engenharia civil, Universidade Federal do Pará, Pará, 2025.

VAN MIER, J. G. M. Multi-axial strain-softening of concrete, Part I: fracture, Part II: load histories. **Materials and Structures**, RILEM, 19: pp. 179-191, 1986.

VECCHIO, F. J.; COLLINS, M. P. The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. **ACI Structural Journal**, 83(2): pp. 219–231, 1986.

XUE, Z. et al. A modified softened strut-and-tie model for non-seismically designed beam-column interior joints strengthened with unsymmetrical chamfers. **Structures**, v. 53, p. 614–624, 2023.

YI, W.-J. et al. Shear strength evaluation of RC D-Regions based on Single-Panel Strut-and-Tie model. **Engineering structures**, v. 265, n. 114500, p. 114500, 2022.