

**SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA**

ADAM GABRIEL VIANA ALVES

**UMA HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS E COMO ELES SE
TORNARAM FERRAMENTA FUNDAMENTAL NA MATEMÁTICA**

**Belém
2023**

ADAM GABRIEL VIANA ALVES

**UMA HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS E COMO ELES SE
TORNARAM FERRAMENTA FUNDAMENTAL NA MATEMÁTICA.**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito básico para a obtenção do grau de Licenciado(a) em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma.

**Belém
2023**

ADAM GABRIEL VIANA ALVES

**UMA HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS E COMO ELES SE
TORNARAM FERRAMENTA FUNDAMENTAL NA MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à
Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências
Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará
como requisito básico para a obtenção do grau de
Licenciado(a) em Matemática.

Orientador Prof. Dr. João Claudio Brandemberg
Quaresma.

Data da apresentação: 12/12/2023

Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

Prof. Dr. João Carlos Alves dos Santos

Belém

2023

RESUMO

Este trabalho explora uma história dos números complexos em seu desenvolvimento como uma ferramenta fundamental na matemática. Ele começa no estudo da resolução de equações cúbicas, examinando os desafios enfrentados pelos matemáticos na compreensão do conceito de raiz quadrada de -1 culminando na formação dos números complexos e suas propriedades, o estudo dos números complexos avança para abranger as funções complexas, explorando suas aplicações e importância em diversas áreas. O trabalho discute o uso prático dos números complexos em circuitos elétricos, processamento de sinais e mecânica quântica. Ao investigar essas aplicações, o trabalho destaca o papel desempenhado pelos números complexos nos avanços científicos e tecnológicos modernos. Para embasar sua pesquisa, o trabalho recorre a textos históricos, oferecendo uma visão abrangente do desenvolvimento histórico e da compreensão conceitual dos números complexos e destaca as contribuições de renomados matemáticos ao longo da história, revelando suas lutas e avanços.

PALAVRAS-CHAVE: Números complexos. Desenvolvimento histórico. Aplicações. Contribuições de matemáticos. Raiz de quadrada -1 .

ABSTRACT

This work explores a history of complex numbers in their development as a fundamental tool in mathematics. It begins with the study of solving cubic equations, examining the challenges faced by mathematicians in understanding the concept of the square root of -1 , culminating in the formation of complex numbers and their properties, the study of complex numbers then advances to encompass complex functions, exploring their applications and importance in various areas. The work discusses the practical use of complex numbers in electrical circuits, signal processing, and quantum mechanics. By investigating these applications, the work highlights the role played by complex numbers in modern scientific and technological advancements. To support its research, the work draws upon historical texts, offering a comprehensive view of the historical development and conceptual understanding of complex numbers and highlighting the contributions of renowned mathematicians throughout history, revealing their struggles and advancements.

Key Word: Complex Numbers. Historical Development. Applications. Contributions of Mathematicians. Square Root of -1 .

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Construção geométrica de Descartes sobre equações quadráticas	17
Figura 2 - Construção geométrica de Descartes sobre raízes quadradas de números negativos	18
Figura 3 - Construção de Wallis da Média geométrica	19
Figura 4 - Construção do triângulo de Wallis	21
Figura 5 - Construção de Wallis da raiz quadrada de um número negativo	21
Figura 6 - Interpretação geométrica de números complexos por Wessel	23
Figura 7 - Operador rotacional	24
Figura 8 - Representação dos senoides $v(t) = Vm \sin(\omega t + \phi)$ e $v(t) = Vm \sin(\omega t)$	30
Figura 9 - Representação de um senar e um fasor	31

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	8
1.1 Apresentação	8
1.2 Metodologia	9
2. UMA HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS	11
2.1 Equações cúbicas	11
2.1.1 Del Ferro (1465-1526)	11
2.1.2 A disputa entre Fiore e Fontana no séc. XVI	13
2.1.3 Cardano (1501-1576)	13
2.1.4 Bombelli (1526-1572)	15
2.2 Desenvolvimento dos números complexos e interpretação geométrica de raiz de -1	15
2.2.1 Bombelli (Continuação)	16
2.2.2 Descartes (1596-1650)	16
2.2.3 Wallis (1616-1703)	18
2.2.4 Wessel (1745-1818)	22
2.2.5 Gauss (1777-1855)	25
2.3 Propriedades dos números complexos	25
2.3.1 De Moivre (1667-1754)	26
2.3.2 Euler (1707-1783)	26
2.4 Funções complexas	27
2.4.1 Cauchy (1789-1857)	27
3 APLICAÇÕES NA ÁREA DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA	29
3.1 Circuitos elétricos	29
3.1.1 Senoide	29
3.1.2 Fasor	31
3.1.3 Impedância e admitância	32
3.2 Processamento de sinais	32
3.2.1 Séries de Fourier	32
3.2.2 Transformada de Fourier	33
3.3 Mecânica quântica	33
3.3.1 A equação de Schrödinger	33
3.3.2 Descrições quânticas de partículas	34

3.3.3 Oscilador harmônico quântico	34
3.3.4 Princípio da incerteza de Heisenberg	35
3.3.5 Pacote de incerteza mínimo	35
3.3.6 Spin.....	36
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	39
REFERÊNCIAS	41

1 INTRODUÇÃO

Nesse capítulo veremos a introdução e apresentação da história, desenvolvimento dos números complexos e suas aplicações na área da ciência e tecnologia assim como a metodologia utilizada para a condução dessa pesquisa.

1.1 Apresentação

Os números complexos desempenham um papel fundamental em várias áreas da matemática, ciência e tecnologia. Sua história remonta a séculos atrás, quando os matemáticos enfrentaram desafios intrigantes na resolução de equações cúbicas. Foi através desses desafios que os números complexos emergiram e abriram novas perspectivas para o campo da matemática.

A história dos números complexos que será discorrida neste trabalho começa com a resolução das equações cúbicas reduzidas por Del Ferro, seguido pelo desenvolvimento dessas ideias por Fontana, Cardano e Bombelli. Esse estudo levou a investigação de $\sqrt{-1}$ e sua interpretação geométrica que foi posteriormente explorada por Descartes, Wallis, Wessel e Gauss, que contribuíram para a compreensão dos números complexos e sua representação no plano complexo.

O desenvolvimento das propriedades dos números complexos foi impulsionado por De Moivre e Euler. De Moivre desenvolveu a fórmula de De Moivre, que permite a potenciação de números complexos. Euler, por sua vez, estabeleceu as bases para a análise complexa, introduzindo a fórmula de Euler e explorando as propriedades exponenciais dos números complexos.

O matemático francês Augustin-Louis Cauchy trouxe uma contribuição significativa para o campo ao criar e desenvolver funções complexas. Suas contribuições permitiram uma compreensão mais profunda dos números complexos e abriram caminho para o estudo de funções complexas e suas propriedades.

A segunda parte do texto aborda as aplicações dos números complexos em várias áreas da ciência e tecnologia. Um dos campos em que os números complexos desempenham um papel crucial é a eletricidade e os circuitos elétricos. A utilização

dos números complexos permite uma descrição eficiente e precisa de grandezas elétricas, como tensão, corrente e impedância simplificando o estudo e a análise de circuitos.

Além disso, os números complexos encontram aplicações no processamento de sinais, onde são utilizados para representar e manipular sinais analógicos e digitais. Sua utilização permite a análise de sistemas lineares e a resolução de equações diferenciais, desempenhando um papel fundamental em áreas como telecomunicações, processamento de áudio e imagens.

Por fim, a mecânica quântica também se beneficia do uso dos números complexos. Na mecânica quântica, as funções de onda que descrevem o comportamento dos sistemas físicos são expressas em termos de números complexos. Essa abordagem permite uma descrição matematicamente consistente de fenômenos como o princípio da incerteza de Heisenberg.

Em resumo, os números complexos têm uma história rica e influente, que abrange desde os desafios da resolução de equações cúbicas até as aplicações em campos como circuitos elétricos, processamento de sinais e mecânica quântica. Sua introdução e desenvolvimento por matemáticos como Bombelli, Gauss, Euler e Cauchy permitiram uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos e contribuíram para o avanço da ciência e da tecnologia.

1.2 Metodologia

O presente trabalho é resultado de uma pesquisa baseada em referências bibliográficas e tem como objetivo explorar a história e as aplicações dos números complexos. A metodologia adotada envolveu a análise de diversos livros e recursos online confiáveis para obter informações relevantes e embasadas sobre o assunto.

No capítulo 2, que aborda uma história dos números complexos, foram utilizados como principais referências os livros "An imaginary tale: The story of [The square root of minus one]" de Paul J. Nahin e "A history of mathematics" de Carl B. Boyer. Essas obras forneceram uma visão abrangente sobre o desenvolvimento histórico dos números complexos, desde os primeiros indícios de sua existência até sua aceitação e compreensão moderna. Além desses livros, também foram

consultados os sites [mathsciencehistory](#) e [mathshistory](#), que complementaram as informações obtidas nas obras impressas. Essas fontes foram essenciais para compreender as contribuições de matemáticos renomados ao longo dos séculos e os eventos que levaram à formulação dos números complexos.

No capítulo 3, focado nas aplicações dos números complexos nas áreas de ciência e tecnologia, foram utilizados livros-texto específicos para cada campo de estudo. Para explorar as aplicações dos números complexos em circuitos elétricos, o livro "Fundamentals of Electric Circuits" de Alexander e Sadiku foi uma referência fundamental. Esse livro forneceu informações detalhadas sobre a utilização de números complexos na análise de circuitos AC, permitindo a compreensão de fenômenos como impedância e admitância.

No campo do processamento de sinais digitais, o livro "Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications" de Proakis e Manolakis foi uma referência-chave. Essa obra abordou as aplicações dos números complexos no processamento e análise de sinais digitais sendo o foco dessa pesquisa a série e transformada de Fourier.

Por fim, para explorar as aplicações dos números complexos na física quântica, o livro "Principles of Quantum Mechanics" de Shankar foi uma fonte de referência relevante. Essa obra proporcionou uma compreensão aprofundada sobre a utilização dos números complexos na descrição matemática de fenômenos quânticos usando a equação de Schrödinger como ponto de partida.

Em suma, a metodologia adotada neste trabalho baseou-se em uma pesquisa extensiva de referências bibliográficas confiáveis. A combinação de livros renomados sobre a história dos números complexos, juntamente com livros-texto específicos para cada área de aplicação, permitiu uma abordagem abrangente e fundamentada sobre o tema. A diversidade de fontes consultadas proporcionou uma visão multidisciplinar das aplicações dos números complexos, abrangendo desde a matemática pura até suas aplicações práticas na ciência e tecnologia contemporâneas.

2. UMA HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Agora será mostrada uma história dos números complexos e seu desenvolvimento, começaremos com a o estudo das equações cúbicas que foram o ponto de partida para o estudo dos números imaginários, a discussão em torno da representação geométrica de $\sqrt{-1}$, a formalização e desenvolvimento das propriedades dos números complexos e a formação das funções complexas.

2.1 Equações cúbicas

A resolução geral das equações cúbicas foi um dos desafios mais intrincados que a história da matemática já enfrentou, sendo até comparada com os problemas impossíveis da matemática clássica, como destacado por Nahin (1998). Ao longo de um período significativo, a humanidade lutou para decifrar esse enigma matemático complexo. No entanto, foi somente nos séculos XV e XVI que começaram a surgir as primeiras contribuições verdadeiramente notáveis no campo da solução das equações cúbicas.

Nesta seção veremos a trajetória para a obtenção da resolução das equações cúbicas que serviu como um ponto de partida crucial para o desenvolvimento dos números complexos, abrindo as portas para um novo mundo de possibilidades matemáticas.

2.1.1 Del Ferro (1465-1526)

Scipione del ferro (1465-1526), um matemático italiano desenvolveu um método de resolução geral da equação cúbica reduzida, entretanto sua descoberta não ficou não foi difundida durante o tempo de vida do mesmo. Apesar de seu notável feito, o método de del Ferro não foi amplamente divulgado durante sua vida. Isso pode ser atribuído ao fato de que ele preferia manter seu trabalho em segredo, compartilhando-o apenas com um círculo restrito de estudantes e colegas próximos.

Ele fez isso porque, ao contrário dos matemáticos acadêmicos de hoje em dia, que ganham a vida publicando seus resultados para obter uma nomeação como professor assistente e posteriormente promoção e estabilidade no cargo, del Ferro e seus colegas eram mais como empresários

independentes. Eles ganhavam a vida desafiando uns aos outros em concursos públicos de resolução de problemas, e o vencedor levava tudo - dinheiro do prêmio, talvez, certamente "glória", e com sorte o apoio de um patrono admirador e rico. Suas chances de ganhar tais concursos eram obviamente aumentadas ao saber como resolver problemas que os outros não conseguiam, então o segredo era a moda da época. (NAHIN, 1998, p. 15, tradução nossa)

O método de del Ferro para a resolução das cúbicas reduzidas era o seguinte: Sendo p e q números inteiros as equações cúbicas reduzidas são dadas por:

$$x^3 + px = q \text{ ou } x^3 = px + q$$

Considerando $x = a + b$, a e b positivos temos:

$$(a + b)^3 + p(a + b) = q$$

$$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3b^2a + p(a + b) = q$$

$$a^3 + b^3 + 3ab(a + b) + p(a + b) = q$$

$$a^3 + b^3 + 3ab(a + b) + p(a + b) = q$$

$$a^3 + b^3 + (3ab + p)(a + b) = q$$

Tomando $(3ab + p) = 0$ temos $a^3 + b^3 = q$, resolvendo a primeira equação em termos de b e substituindo na segunda temos:

$$a^6 - \frac{p^3}{27} - qa^3 = 0 \text{ que é quadrática em } a^3, \text{ logo:}$$

$$a^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ Tomando apenas a raiz positiva, sendo } b^3 = q - a^3 \text{ temos:}$$

$$b^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ e como } x = a + b \text{ temos por fim:}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Assim, mesmo que Scipione del Ferro não tenha recebido o crédito direto por sua descoberta durante sua vida, seu método de resolução da equação cúbica reduzida acabou sendo divulgado e reconhecido graças aos esforços e contribuições de seus sucessores como veremos a seguir.

2.1.2 A disputa entre Fiore e Fontana no séc. XVI

O matemático Antonio Maria Del Fiore (séc. XV- séc. XVI), cujas informações a respeito são bem escassas, que era estudante de del Ferro e para o qual o segredo da resolução das cúbicas reduzidas fora ensinado, ao tomar conhecimento que Nicolo Fontana (1500-1557), apelidado de Tartaglia, tinha conhecimento de resolver a equação cúbica geral (o que não era verdade) desafiou o mesmo para uma disputa matemática em 1535.

Fontana temendo as resoluções das cúbicas reduzidas logo se empenhou em também obter um método para isso e foi bem sucedido em seu esforço, segundo Nahin (1998, pág. 15) “Este é um exemplo interessante de como, uma vez que se sabe que um problema tem solução, os outros rapidamente também a encontram.”.

Cada matemático entregou 30 questões para o outro resolver, todas as questões entregues à Fontana eram sobre cúbicas da forma reduzida $x^3 + px = q$ já as equações entregues à Fiore eram pouco comuns e não podiam ser resolvidas pelo método de del Ferro, como resultado Fontana resolveu todas as 30 questões enquanto Fiore não resolveu nenhuma, para Nahin (1998) Fiore era um matemático medíocre que unicamente a ferramenta de del Ferro como arma, enquanto isso iFontana segundo Birchak (2022):

Tartaglia havia se estabelecido como um matemático credível em Veneza e o vencedor do infame duelo Tartaglia-Fiore. Muitos queriam saber o segredo de Tartaglia, mas assim como del Ferro, ele guardava a resposta a sete chaves. Ele pretendia que ninguém jamais descobrisse esse segredo. (BIRCHAK, 2022, online, tradução nossa)

2.1.3 Cardano (1501-1576)

O polímata Girolamo Cardano (1501-1576) tomou conhecimento de que Fontana sabia o método de resolução das cúbicas (Pois sua vitória sobre Fiore o tornou bastante conhecido), ele tinha a intenção de publicá-la no seu vindouro livro *Ars Magna*, pedido ao qual logo Fontana recusou, só depois de várias cartas trocadas entre os dois, Cardano ter enganado Fontana para que eles se encontrassem pessoalmente e pedido com um longo juramento de não revelar para ninguém a fórmula Fontana finalmente aceitou compartilhá-la com Cardano com a condição de que ele honrasse tal juramento (a fórmula foi lhe dada na forma de poesia).

Cardano não pretendia publicar tal fórmula tal uma reviravolta aconteceu:

Cardano não era um santo, mas também não era um canalha. Ele quase certamente tinha toda a intenção de honrar seu juramento de silêncio, mas então ele começou a ouvir que Tartaglia não foi o primeiro a resolver a cúbica reduzida. E uma vez que ele realmente viu os papéis sobreviventes de del Ferro, Cardano não se sentiu mais obrigado a manter seu silêncio. (NAHIN, 1998, p. 16, tradução nossa)

Entretanto Cardano realmente não era um plagiador, em seu *Ars Magna* ele deu o devido crédito a del Ferro e Fontana pela descoberta da fórmula, o que não impediu a fúria de Fontana e acusações de plágio que segundo Nahim (1998. pág 16, tradução nossa) “O medo de perda da fama por Tartaglia veio a passar”.

Porém a maior contribuição de Cardano para esse tema foi, a partir das descobertas de del Ferro e Fontana, ter descoberto a seguinte fórmula geral para a resolução das cúbicas, método que ficou conhecido como Cardano-Tartaglia:

Seja $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com $a \neq 0$ a equação cúbica geral, considere $x = y - \frac{b}{3a}$ temos:

$$a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

$$ay^3 - by^2 + \frac{b^2}{3a}y - \frac{b^3}{27a^2} + by^2 - \frac{2b^2}{3a}y + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

$$ay^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)y + \left(d + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a}\right) = 0$$

$$y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{d}{a} + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2}\right) = 0$$

Note que tal equação obtida se trata de uma cúbica reduzida, ou seja pode ser resolvida pelo método de del Ferro e Fontana.

Agora veja a equação $x^3 = 15x + 4$, Cardano sabia que o resultado (real) era 4 mas ao aplicar no método resolução visto acima ele encontrou a resposta $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, esse resultado envolve uma raiz quadrada de um número negativo que era considerada inexistente, tal solução de acordo com Boyer (1991) tal conclusão era considerada inútil na época de sua descoberta porém como veremos a seguir tais soluções estavam longe de serem inúteis.

2.1.4 Bombelli (1526-1572)

O engenheiro e arquiteto italiano Rafael Bombelli (1526-1572) que primeiramente encontrou a resposta deixada por Cardano a respeito da equação $x^3 = 15x + 4$, a partir do resultado $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ ele tomou a e b reais tais que:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$$

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}$$

E se utilizando das propriedades válidas para os números reais obteve $a = 2$ e $b = 1$ encontrando afinal:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

Para Boyer (1991):

Algebristas eram capazes de evitar números imaginários simplesmente dizendo que a equação $x^2 + 1 = 0$ era insolúvel. Não existia necessidade para raízes quadradas de números negativos com a solução da equação cúbica, porém, a situação se tornou diferente. Sempre que as três raízes de uma cúbica são reais e diferentes de zero a fórmula de Cardano-Tartaglia inevitavelmente leva a raízes quadradas de números negativos. Sabemos que o alvo é um número real, mas ele não pode ser alcançado sem o conhecimento dos números imaginários. Os imaginários devem agora ser reconhecidos mesmo se restrito apenas a raízes reais. (BOYER, 1991, p. 288, tradução nossa).

Vimos então os esforços e as descobertas relacionadas a resolução das equações cúbicas e como elas chegaram a resultados envolvendo raízes quadradas de números negativos, a seguir exploraremos como essas descobertas contribuíram no desenvolvimento dos números complexos.

2.2 Desenvolvimento dos números complexos e interpretação geométrica de raiz de -1

Veremos, de acordo com Boyer (1991) e Nahin (1998), que com a fórmula geral das equações cúbicas chegando a resultados com raízes quadradas de números negativos tais números começaram a receber uma maior atenção dos matemáticos, veremos então o desenrolar do estudo de $\sqrt{-1}$, sua interpretação geométrica e o desenvolvimento dos números complexos.

2.2.1 Bombelli (Continuação)

Como vimos anteriormente Bombelli encontrou a solução para problemas envolvendo as raízes quadradas de números negativos na equação de Cardano-Tartaglia, para chegar a tal resposta ele definiu as regras para se operar os números da forma $\sqrt{-n}$ e $-\sqrt{-n}$ (imaginários), n real, aos quais ele chamou de “mais de menos” e “menos de menos” respectivamente sendo tais regras as seguintes:

Mais de menos vezes mais de menos resulta em menos $[\sqrt{-n} \times \sqrt{-n} = -n]$

Mais de menos vezes menos de menos resulta em mais $[\sqrt{-n} \times (-\sqrt{-n}) = n]$

Menos de menos vezes mais de menos resulta em mais $[(-\sqrt{-n}) \times \sqrt{-n} = n]$

Menos de menos vezes menos de menos resulta em menos $[(-\sqrt{-n}) \times (-\sqrt{-n}) = -n]$.

Para adição e subtração definiu que partes reais somam partes reais e partes imaginárias somam partes imaginárias. Tais resultados foram publicados em sua obra *Álgebra* de 1572.

2.2.2 Descartes (1596-1650)

René Descartes (1596-1650), matemático e filósofo francês, foi um dos primeiros a tentar atribuir significado a raízes quadradas de números negativos, aos quais ele deu o nome de números imaginários, para Nahin (1998):

Apesar do sucesso de Bombelli em atribuir um significado formal à $\sqrt{-1}$ quando ela apareceu nas respostas dadas pela fórmula de Cardano, ainda faltava uma interpretação física. Os matemáticos do século XVI estavam muito ligados à tradição grega da geometria e se sentiam desconfortáveis com conceitos aos quais não conseguiam atribuir um significado geométrico. (NAHIN, 1998, p.31, tradução nossa)

Em sua obra *A Geometria* de 1637, ele resolveu a equação $z^2 = az + b^2$, a e b^2 não negativos de forma geométrica como mostrado a seguir:

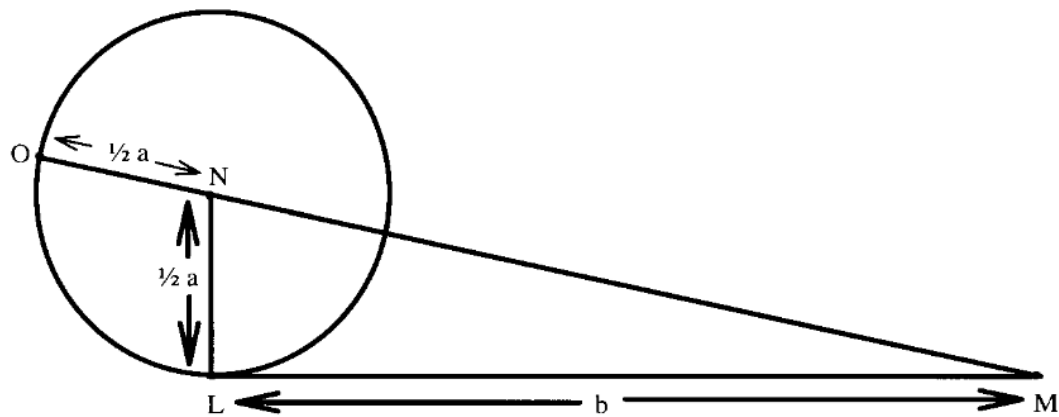
Seja LM o segmento medindo a raiz quadrada de b^2

Seja $LN = \frac{a}{2}$ perpendicular a LM

Construa um círculo de raio $\frac{a}{2}$ com centro em N e construa NM e estenda NM até encontrar o círculo em O

Temos então que $OM = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$ que é a solução positiva para a equação dada. A Figura 1 representa tal construção.

Figura 1 - Construção geométrica de Descartes sobre equações quadráticas

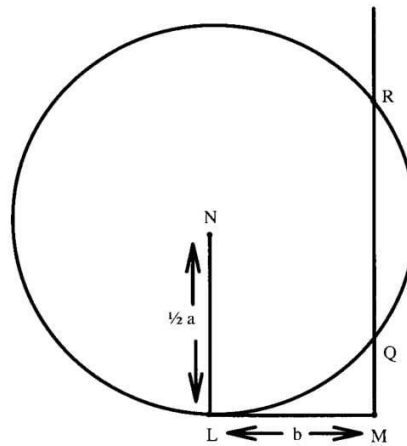


Fonte: Nahin (1998, p. 35)

Depois ele trabalhou com a equação $z^2 = az - b^2$, o resultado algébrico de tal equação é: $\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$, mas ao resolver de forma geométrica análoga à equação anterior temos como mostrado na Figura 2:

$$LN = \frac{a}{2} \text{ e } LM = b$$

Figura 2 - Construção geométrica de Descartes sobre raízes quadradas de números negativos



Fonte: Nahin (1998 p. 36)

Construir a perpendicular em M e construir um círculo de raio $\frac{a}{2}$ e, N e sejam Q e R os dois pontos onde o círculo intercepta a perpendicular, Descartes deduziu que MQ e MR , quando existem, são os valores para z que satisfazem a equação, note que quando $b > \frac{a}{2}$ Não há intersecção entre o círculo e a perpendicular e essa é a condição que providencia raízes quadradas de números negativos na resolução algébrica.

A partir disso Descartes associou raízes quadradas de números negativos a impossibilidade de uma construção geométrica, por isso ele chamou tais números de imaginários pois para Descartes eles não tinham aplicação no mundo real.

2.2.3 Wallis (1616-1703)

John Wallis (1616-1703), um teólogo e matemático britânico, também desenvolveu uma construção que ele achava que podia representar raízes quadradas de números negativos, ele se inspirou na interpretação geométrica de números negativos, que também por muitos séculos não foram bem vistos pelos matemáticos e que tinham de fato a seguinte interpretação física, dada uma reta e um ponto zero nessa reta, os números negativos representam a distância medida a esquerda desse

ponto e na média geométrica x de dois segmentos a e b tais que a está para x assim como x está para b , que resulta em $x = \sqrt{ab}$.

A partir de tais fatos ele fez a seguinte construção:

Dada uma reta defina o ponto zero em a e construa um segmento AC positivo.

No ponto médio de AC construa um círculo com AC como diâmetro

Num ponto qualquer B entre A e o centro do círculo, construa a perpendicular que intercepta o círculo em P . Temos os triângulos retângulos ABP e ACP e APC (ângulo inscrito no diâmetro).

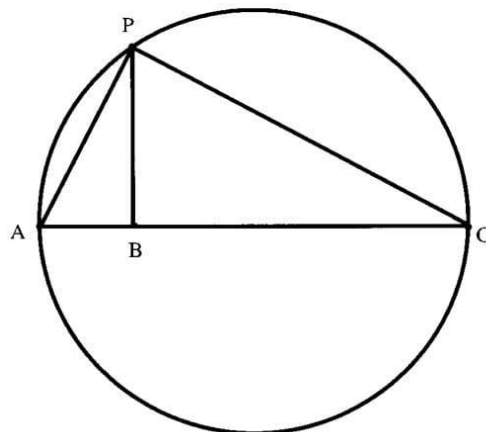
Logo $(BP)^2 + (AB)^2 = (AP)^2$, $(BP)^2 + (BC)^2 = (PC)^2$ e $(AP)^2 + (PC)^2 = (AC)^2$.

Como $AC = AB + BC$ temos $(BP)^2 + (AB)^2 + (BP)^2 + (BC)^2 = (AB + BC)^2$.

Consequentemente $2(BP)^2 + (AB)^2 + (BC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + 2AB \cdot BC$.

eliminando os termos semelhantes e extraindo a raiz temos $BP = \sqrt{(AB)(BC)}$, logo BP é a média geométrica de AB e BC , vemos essa construção na Figura 3.

Figura 3 - Construção de Wallis da Média geométrica



Fonte: Nahin (1998, p. 43)

Depois disso Wallis expandiu a construção para obter uma raiz quadrada de número negativo da seguinte forma:

Construa a reta tangente ao círculo em P , ela intercepta AC em B' à esquerda de A .

Seja R o centro do círculo, o triângulo PRB' é reto e $(B'P)^2 + (RP)^2 = (B'R)^2$.

Como RP é o raio do círculo então $RP = \frac{AC}{2}$, temos também que $B'C = B'A + AC$ o que implica em $AC = B'C - B'A$, por fim $RP = \frac{B'C - B'A}{2}$.

Note que $B'R = B'A + AR$, AR é raio então $AR = \frac{AC}{2}$ logo $B'R = B'A + \frac{AC}{2}$ então $B'R = B'A + \frac{B'C - B'A}{2}$ por fim $B'R = \frac{B'A + B'C}{2}$

Substituindo ambos os resultados em $(B'P)^2 + (RP)^2 = (B'R)^2$ temos $(B'P)^2 + \frac{(B'C - B'A)^2}{4} = \frac{(B'A + B'C)^2}{4}$, eliminado os termos semelhantes e extraíndo a raiz temos $(B'P) = \sqrt{(AB')(B'C)}$. Note que $AC = B'C - B'A$ portanto $AC > B'A$ o que implica que $B'C$ é positivo, já AB' é negativo o que significa que $B'P$ é um segmento geométrico que representa a raiz quadrada de um número negativo.

Mas o que tal construção realmente diz sobre a interpretação geométrica de um número imaginário? Para Nahin (1998):

Bem, o que se pode dizer sobre tudo isso? É astuto, sim, mas certamente tem o sabor de um exercício de sutileza tanto quanto de geometria. De alguma forma, parece improvável que estejamos realmente dizendo algo muito profundo, se é que estamos dizendo algo, sobre $\sqrt{-1}$ com esse tipo de argumento. (NAHIN, 1998, p.45, tradução nossa)

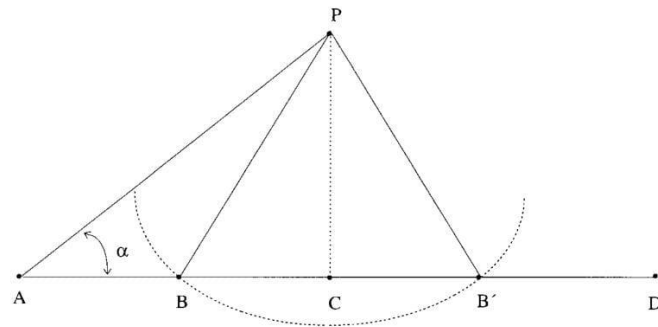
Sabendo disso, Wallis tentou encontrar tal significado novamente com a construção de um triângulo de dois lados dados e um ângulo que não está entre esses dois lados dados.

Sejam PA e PB ($= PB'$) tais lados e ângulo $PAD = \alpha$ o ângulo dado, teremos então que os triângulos APB e APB_1 são os triângulos pedidos, logo, sendo PC a altura dos triângulos como vemos na Figura 4:

$$AB = AC - BC = \sqrt{(AP)^2 - (PC)^2} - \sqrt{(PB)^2 - (PC)^2}$$

$$AB' = AC - CB' = \sqrt{(AP)^2 - (PC)^2} + \sqrt{(PB)^2 - (PC)^2}$$

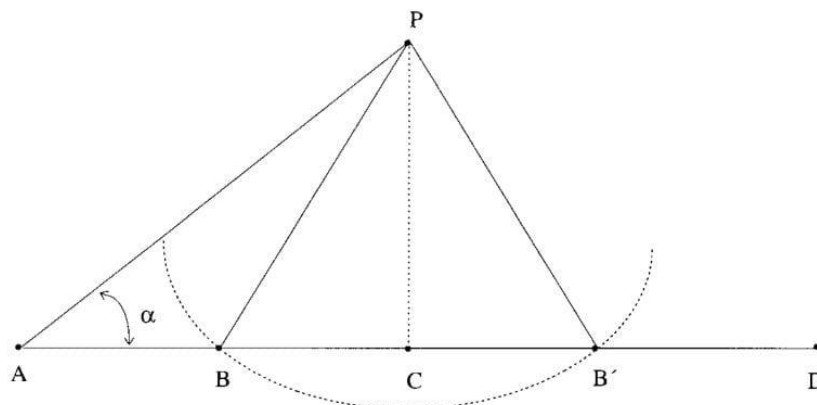
Figura 4 - Construção do triângulo de Wallis



Fonte: Nahin (1998, p. 46)

Note que em ambas as equações se $PC > PB$ temos uma raiz quadrada de um número negativo e tal construção não é possível sobre a reta AD , a solução de Wallis para isso ele construiu um círculo de raio PC e outro de raio PB ambos centrados em P , os pontos B e B' seriam então as intersecções entre esses dois círculos, a Figura 5 nos mostra tal construção.

Figura 5 - Construção de Wallis da raiz quadrada de um número negativo



Fonte: Nahin (1998, p. 46)

O triângulo pedido será então ambos PAB e PAB' (O enunciado não pede que α necessariamente faça parte do triângulo), note que o triângulo não está sobre a base AB .

Mas o que essa construção diz sobre a representação geométrica de raízes quadradas de números negativos e o que ela traz de novo que a construção anterior não? Para Nahin (1998):

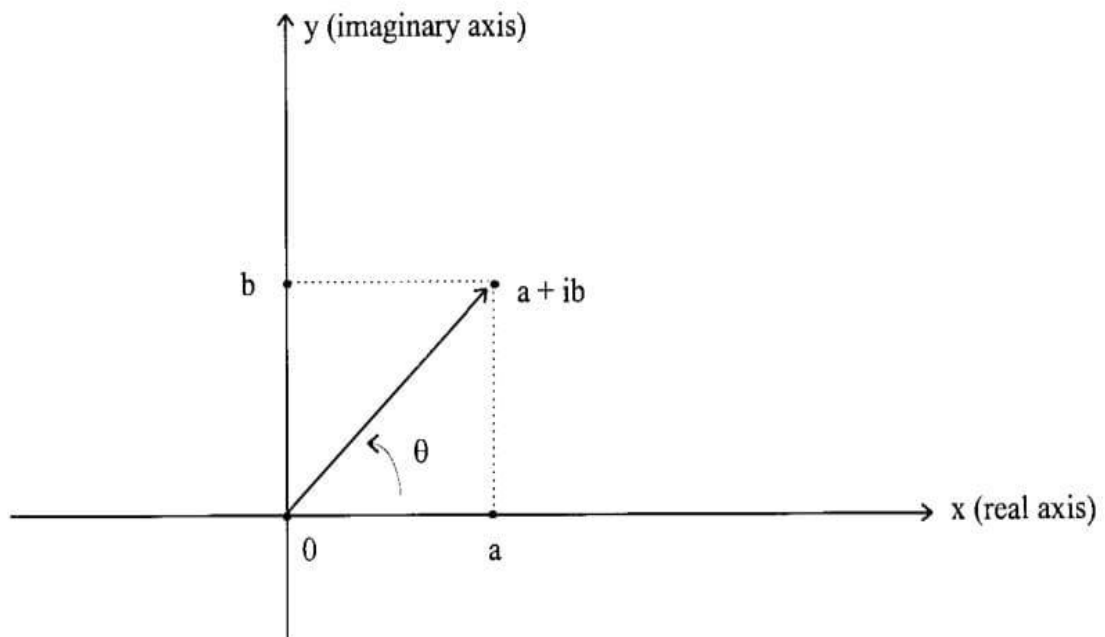
Wallis havia tropeçado na ideia de que, de alguma forma, a manifestação geométrica dos números imaginários é o movimento vertical no plano. No entanto, o próprio Wallis não fez tal afirmação, e isso é realmente um comentário retrospectivo feito com o benefício de três séculos de retrospectiva. (NAHIN, 1998, p.47, tradução nossa)

2.2.4 Wessel (1745-1818)

O norueguês Caspar Wessel (1745-1818), cerca de 100 anos após as descobertas de Wallis foi quem pôs fim na questão do que raízes quadradas de números negativos e números complexos (ainda não chamados por esse nome) representam fisicamente, seu trabalho, chamado Sobre a Representação Analítica de Direção: Uma Tentativa explicando tal questão foi apresentado Real Academia de Ciências Dinamarquesa.

Wessel via os números complexos, números da forma $a + b\sqrt{-1}$, a e b são números reais e, como um ponto ou um vetor de raio direcionado da origem a esse ponto no plano complexo onde o eixo vertical representa números imaginários e o eixo horizontal representa números reais como demonstrado na Figura 6.

Figura 6 - Interpretação geométrica de números complexos por Wessel



Fonte: Nahin (1998, p. 49)

Desse modo também é possível encarar um número complexo como um par ordenado (a, b) onde a representa parte real e b a parte imaginária.

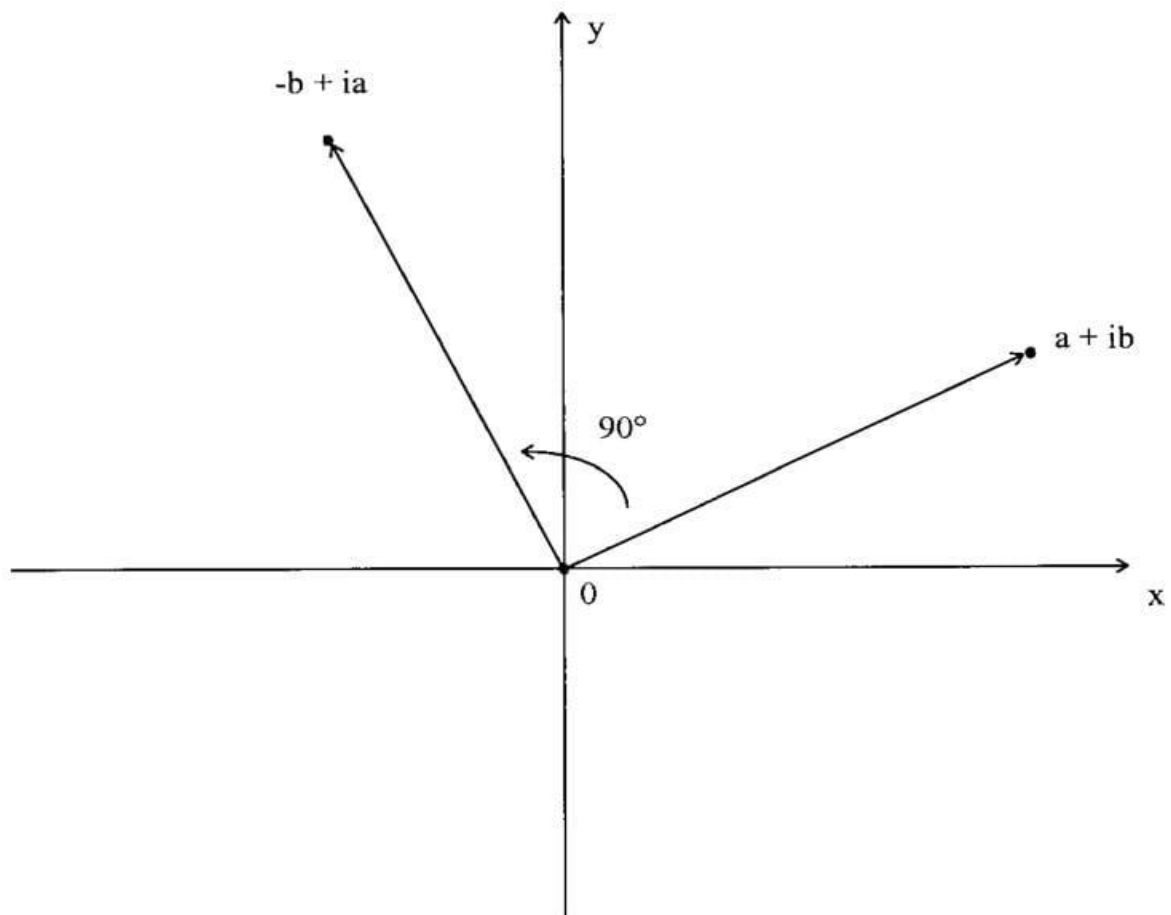
A partir da ideia de adição vetorial Wessel chegou numa de multiplicação de dois vetores, segundo Wessel para multiplicar dois vetores é preciso duas etapas, a primeira consiste em multiplicar os comprimentos para obter o comprimento do vetor resultante, a segunda consiste em somar os ângulos que os vetores fazem com o vetor diretor do eixo horizontal para obter o ângulo do vetor resultante, tal ideia parece óbvia, mas para Nahin (1998):

Isso é talvez tão dolorosamente elementar, ou até mesmo óbvio, hoje em dia, que parece quase infantil escrevê-lo com tantas palavras, mas não se deixe enganar. Se você acha que é “óbvio”, está confundindo algo conhecido há muito tempo, talvez desde o ensino médio, com algo que todos nascem sabendo. Os bebês nascem sabendo chorar, mas não nascem sabendo multiplicar segmentos de linha direcionados. Isso é algo que teve que ser descoberto ou inventado, dependendo de como você vê a evolução da matemática, e Wessel foi o primeiro a entender como fazê-lo. (NAHIN, 1998, p.51-52, tradução nossa)

Assim sendo podemos enfim entender o significado geométrico de $\sqrt{-1}$, se um segmento que represente $\sqrt{-1}$ que tenha comprimento l e faça um ângulo α com o

vetor diretor do eixo horizontal, ao multiplica-lo por si mesmo ele representará -1 , medirá l^2 e fará o ângulo 2α com o vetor diretor, porém sabemos que o vetor que representa -1 mede 1 e faz um ângulo de 180 graus com o vetor diretor do eixo horizontal o que significa que $l^2 = 1$ e $2\alpha = 180$ graus o que implica em $l^2 = 1$ e $\alpha = 90$ graus isso nos diz que $\sqrt{-1}$ representa o segmento que mede 1 sobre o eixo vertical do plano complexo, por causa disso multiplicar um número complexo por $\sqrt{-1}$ significa gira-lo em 90 graus no sentido anti-horário no plano complexo fazendo com que $\sqrt{-1}$ também seja conhecido como operador rotacional (Figura 7).

Figura 7 - Operador rotacional



Fonte: Nahin (1998, p. 54)

Tal descoberta para que demorou tanto tempo para ser encontrada apareceu pelas mãos de Wessel segundo Nahin (1998) pois:

Isso é tanto notável quanto, ironicamente, compreensível quando se considera que Wessel não era um matemático profissional, mas um agrimensor. A descoberta de Wessel em um problema que havia deixado muitas mentes brilhantes perplexas foi, na verdade, motivada pelos problemas práticos que ele enfrentava diariamente ao fazer mapas, ou seja, pelos dados de levantamento que ele encontrava regularmente na forma de polígonos planos e esféricos. Não havia uma tradição familiar em matemática para orientá-lo, pois tanto seu pai quanto o pai de seu pai eram homens da igreja. Foi o trabalho de Wessel que o inspirou a ter sucesso onde todos os outros haviam falhado antes. (NAHIN, 1998, p.48, tradução nossa)

Com as descobertas de Wessel temos o entendimento de que os números se expandem em plano bidimensional em todas as direções e não somente em uma reta da esquerda para a direita como quando se considera apenas os números reais.

2.2.5 Gauss (1777-1855)

O matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) em 1796 já tinha chegado a conclusões muito parecidas com as de Wessel em relação a interpretação geométrica dos números complexos (Antes de Wessel) mas só veio a publicá-los em 1812. Gauss é o responsável pela terminologia número complexo para se referir a números da forma $a + bi$, para Nahin (1998) tal nomenclatura foi escolhida pois nomes como unidade imaginária deixa o objeto em questão cercado de mistério e difícil de compreender e trabalhar.

Segundo Boyer (1991) mesmo que Wessel tenha publicado tais descobertas primeiro seu trabalho passou quase despercebido, sendo recuperado apenas muitas décadas depois, foi a partir dos escritos de Gauss que essas novas percepções acerca dos números complexos chegaram às mãos da comunidade matemática.

2.3 Propriedades dos números complexos

O desenvolvimento das propriedades dos números complexos que veremos a seguir não segue das ideias de Wessel e Gauss inicialmente, mas sim começou de forma paralela e complementar, pois como dito por Nahin (1998):

Embora seja prática comum hoje datar o início da teoria moderna dos números complexos a partir da publicação do artigo de Wessel, é um fato que muitas das propriedades específicas de $\sqrt{-1}$ foram compreendidas muito antes de Wessel. (NAHIN, 1998, p.142, tradução nossa)

2.3.1 De Moivre (1667-1754)

Abraham de Moivre (1667-1754), um matemático francês, em uma publicação de 1722 apresentou a uma fórmula que, com a notação atual para números complexos diz o seguinte: sendo x e n números reais

$$[\cos(x) + \sqrt{-1}\operatorname{sen}(x)]^n = \cos(nx) + \sqrt{-1}\operatorname{sen}(nx)$$

Essa fórmula consegue relacionar números imaginários com trigonometria e quando combinando com o conceito de forma polar de um ponto traz resultados interessantes para a teoria dos números complexos

Na forma polar o ponto no plano é medido a partir de um comprimento e um ângulo em relação à origem, sendo assim um número complexo z na forma polar se dá por $z = r[\cos(x) + \sqrt{-1}\operatorname{sen}(x)]$ sendo r o comprimento entre a origem e o ponto, a partir disso temos: n sendo um número real:

$$z^n = r^n[\cos(nx) + \sqrt{-1}\operatorname{sen}(nx)] \text{ e}$$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}[\cos(\frac{x+2k\pi}{n}) + \sqrt{-1}\operatorname{sen}(\frac{x+2k\pi}{n})]$ onde k é um inteiro que varia entre 0 e $n - 1$.

Com essas fórmulas podemos realizar mais facilmente a potenciação e radiciação de números complexos que se mostravam uma tarefa muito difícil sem o uso da forma polar.

2.3.2 Euler (1707-1783)

Um dos maiores contribuidores para a teoria dos números complexos foi o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), primeiramente ele adotou a notação $i = \sqrt{-1}$ e em seu livro *introducio* de 1748 a partir das séries infinitas de e^x , $\cos(x)$ e $\operatorname{sen}(x)$ ele chegou as seguintes identidades:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ (Essa equação é conhecida como fórmula de Euler).

Definindo assim a exponencial complexa, note que se tomarmos $\pi = x$ na fórmula de Euler teremos:

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi), \text{ então } e^{i\pi} = -1 + i0, \text{ por fim } e^{i\pi} + 1 = 0$$

Essa equação é chamada de Identidade Euler e é notável pois relaciona o número de Euler, a constante π , a unidade imaginária, a identidade aditiva e a identidade multiplicativa.

2.4 Funções complexas

Teremos então uma introdução ao tema das funções complexas, sendo essas funções que tem números complexos como variável.

2.4.1 Cauchy (1789-1857)

O matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) foi o responsável pelo início e grande parte do desenvolvimento do estudo das funções complexas, para Boyer (1991):

Duas dimensões são necessárias para a representação pictorial apenas da variável independente, seria necessário quatro dimensões para representar graficamente uma relação entre duas variáveis complexas, $w = f(z)$, por necessidade, então, uma teoria de variável complexa implica num grau maior de abstração e complexidade do que as de variável real. Definições e regras de diferenciação, por exemplo, não podem ser transportadas diretamente dos casos reais para os complexos e a derivada não é mais vista como a inclinação da reta tangente a uma curva. Sem o suporte da visualização é necessário definições mais precisas e cuidadosas dos conceitos. Foram as contribuições de Cauchy para o cálculo que suprimiram essas necessidades, para as variáveis complexas e reais. (BOYER, 1991, p. 513, tradução nossa).

Segundo Soares (2009) uma função complexa é definida como $w = f(z)$ onde w e z são números complexos ou como $z = a + bi = (a, b)$ a função complexa se dá por $w = f(a, b) = (u(a, b), v(a, b)) = u(a, b) + iv(a, b)$.

A partir do conceito de função complexa podemos definir limite e derivada complexos.

Limite complexo é dado por seja A um subconjunto aberto do conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, dizemos que $w \in A$ é limite de f quando $z \in A$ tende a z_0 se dado qualquer número $\epsilon > 0$ é possível encontrar um número $\sigma > 0$ tal que se $0 < |z - z_0| < \sigma$ então $|f(z) - w| < \epsilon$, assim denotamos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w.$$

As propriedades do limite de uma função complexa são similares a de uma função real de uma variável. Uma função complexa é dita contínua em $z_0 \in A$ se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, f é dita contínua em A se isso vale para todos os pontos de A .

Derivada complexa é dada por: Sendo A um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. f uma função complexa de A em $\mathbb{C}$ e z_0 um ponto de A , se existir o limite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ é chamado de derivada de } f \text{ no ponto } z_0 \text{ e é denotado por } f'(z_0).$$

Note que se uma função é derivável em z_0 então ela é contínua em z_0 .

Vimos as contribuições de diversos matemáticos ao longo dos séculos a respeito do desenvolvimento dos números complexos, desde as contribuições de Del Ferro, Fontana, Cardano e Bombelli até os avanços de Euler, De Moivre e Cauchy, cada matemático estudado foi fundamental para a construção do conhecimento atual sobre os números complexos. Além disso constatamos como o estudo dos números complexos contribuiu com novas formas de se enxergar certos conceitos matemáticos.

Agora que verificamos um desenvolvimento histórico dos números complexos veremos a seguir algumas de suas aplicações práticas na área da ciência e tecnologia.

3 APLICAÇÕES NA ÁREA DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Vimos a criação e desenvolvimento dos números complexos ao longo dos séculos, agora veremos uma seleção de como tais conceitos são utilizados nas áreas de ciência e tecnologia. Alexander e Sadiku (2009) utilizam a letra j para representar a unidade imaginária pois no estudo de circuitos elétricos a letra i representa a corrente elétrica. Então, para não haver confusões e para manter um padrão utilizaremos a letra j para representar a unidade imaginária ao longo deste capítulo.

Também adicionaremos seguinte notação para representar números complexos: $z = a + jb = r[\cos(x) + j\sin(x)] = re^{jx} = r\angle x$ onde r representa o comprimento do vetor que vai da origem até z e x é o ângulo que esse vetor faz com o eixo horizontal¹.

Note que na forma $\cos(x) + j\sin(x) = e^{jx}$ $\cos(x)$ é a parte real de z e $\sin(x)$ é a parte imaginária denotaremos:

$$\cos(x) = \text{Re}(e^{jx})$$

$$\sin(x) = \text{Im}(e^{jx}).$$

3.1 Circuitos elétricos

Nesta seção, veremos, a partir de Alexander e Sadiku (2009) o uso dos números complexos nas funções utilizadas para descrever circuitos elétricos e algumas de suas propriedades.

3.1.1 Senoide

Para Alexander e Sadiku (2009) uma senoide é uma forma de onda periódica que segue a função seno ou cosseno, uma corrente senoidal é chamada de corrente alternada (ac) e tem como característica de se reverter em intervalos regulares,

¹ A forma trigonométrica $z = r[\cos(x) + j\sin(x)]$ é derivada da fórmula de De Moivre para obter a potenciação de números complexos $z^n = r^n[\cos(nx) + j\sin(nx)]$ com $n = 1$, a forma $z = re^{jx}$ é derivada da fórmula de Euler, ambas vistas na seção 2.3, finalmente a forma $r\angle x$ é utilizada por Alexander e Sadiku (2009).

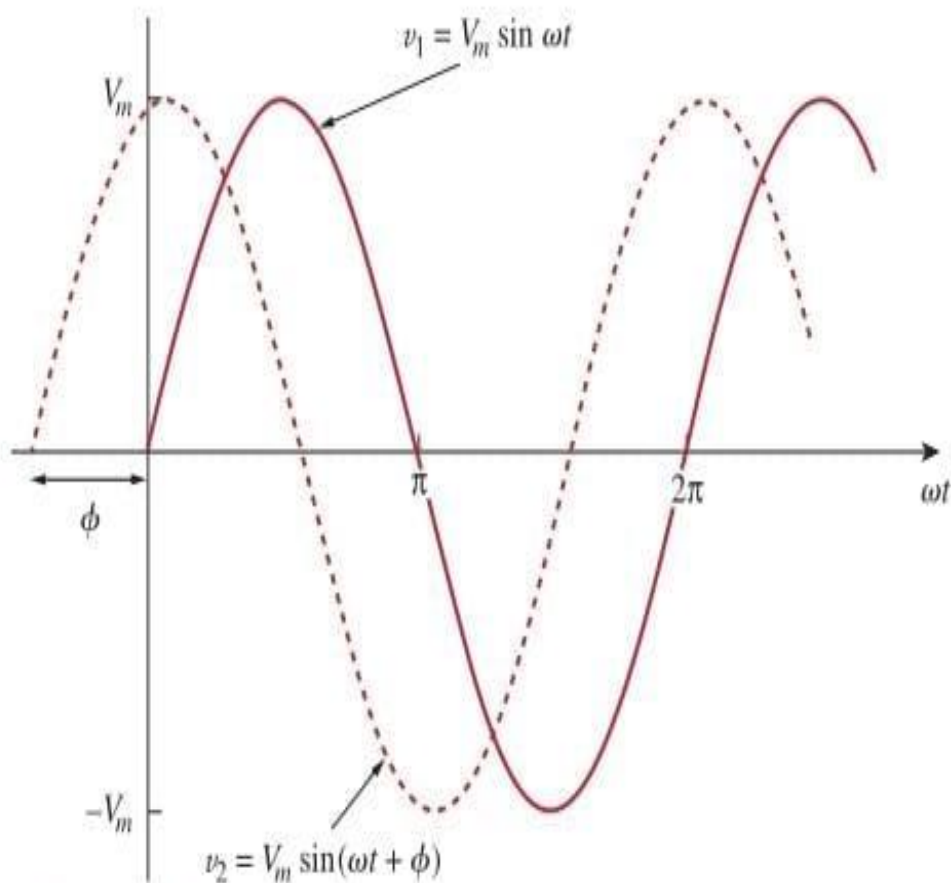
alternando entre valores positivos e negativos, circuitos movidos por uma corrente senoidal são chamados de circuitos ac.

A forma de tensão senoidal é a principal fora de transmissão nas usinas de energia elétrica. A forma mais comum de senoide é a função $\text{sen}(x)$ que descreve uma curva suave que oscila entre -1 e 1 em um padrão periódico. A função $\cos(x)$ é outra forma de senoide, mas com um deslocamento de fase em relação à função $\text{sen}(x)$.

Uma expressão geral para representar um senoide se dá da seguinte forma:

$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \phi)$ onde $v(t)$ é a tensão em relação ao tempo, V_m é a amplitude do senoide, $\omega t + \phi$ é o argumento do senoide e ϕ é a fase, está representado na Figura 8 ao lado do senoide $v(t) = V_m \text{sen}(\omega t)$.

Figura 8 - Representação dos senoides $v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \phi)$ e $v(t) = V_m \text{sen}(\omega t)$



Fonte: Alexander e Sadiku (2009, p.373)

3.1.2 Fasor

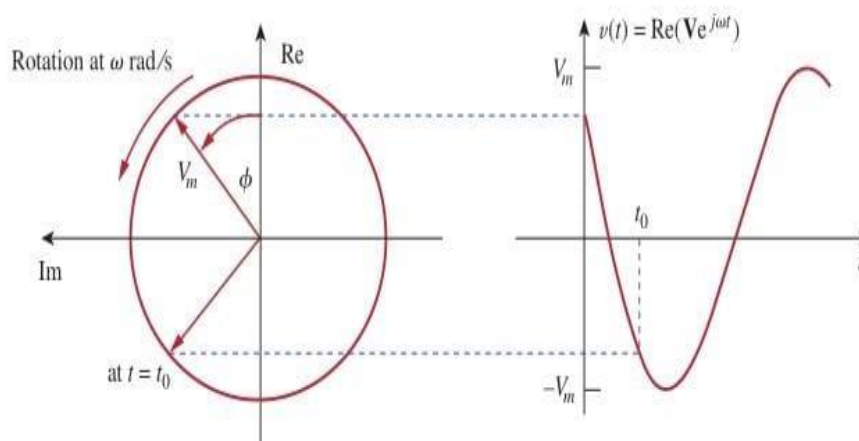
Um fasor é um número complexo que representa a amplitude e fase de um senoide, é usado para simplificar a análise de sinais senoidais em circuitos elétricos e outros sistemas.

Dado um senoide da forma $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$ temos então $v(t) = \text{Re}(V_m e^{j(\omega t + \phi)})$ que resulta em $v(t) = \text{Re}(V_m e^{j\phi} e^{j\omega t})$ por fim temos $v(t) = \text{Re}(V e^{j\omega t})$ onde $V = V_m e^{j\phi} = V_m \angle \phi$, V é o fasor que representa o senoide $v(t)$.

A equação $\sin(x) = \text{Im}(e^{jx})$ também pode ser usada para determinar um fasor mas o padrão é que se use $\cos(x) = \text{Re}(e^{jx})$.

Outra forma de se encarar um fasor é como o senor $V e^{j\omega t} = V_m e^{j(\omega t + \phi)}$ no plano complexo. Quando o tempo aumenta o senor gira no sentido anti-horário em velocidade ω num círculo de raio V_m , temos então que $v(t)$ é a projeção do senor $V e^{j\omega t}$ no eixo real como mostrado na Figura 9.

Figura 9 - Representação de um senor e um fasor



Fonte: Alexander e Sadiku (2009, p.379)

Dessa forma o senor pode ser interpretado como um fasor rotatório.

3.1.3 Impedância e admitância

Impedância Z é uma grandeza que descreve a oposição total que um elemento ou componente elétrico oferece ao fluxo de corrente alternada (AC), ela é dada pela razão entre o fasor tensão V e o fasor corrente I . A impedância é representada por um número complexo e é medida em ohms (Ω), a impedância pode ser representada da forma $Z = R + jX$ onde R é a resistência e X é a reatância. Admitância é o inverso da impedância medida em siemens, é dada por $Y = G + jB$ onde G é a condutância e B é a susceptância (ALEXANDER; SADIKU, 2009).

3.2 Processamento de sinais

Segundo Gallager (2007) em análise de frequência, séries e transformadas de Fourier (Que trabalham com números complexos) são essenciais para a análise de sistemas LTI (Sistema linear invariante no tempo), elas decompõem sinais em uma soma de sinais senoidais. Essa decomposição permite que uma soma de sinais senoidais no input produza uma soma de sinais senoidais no output, por esses e outros métodos é possível determinar uma representação matemática para um dado sinal.

3.2.1 Séries de Fourier

A série de Fourier² de uma função periódica ou limitada temporalmente é uma representação dessa função como uma soma infinita de funções senoidais ou cossenoidais ponderadas, conhecidas como harmônicas.

A série de Fourier de uma função de uma forma de onda limitada temporalmente por $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ é:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k e^{2\pi jkt/T} \text{ e } u(t) = 0 \text{ fora do intervalo } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

² Joseph Fourier (1768- 1830) foi um matemático francês, ele esteve envolvido com a revolução francesa e o exército de Napoleão (1769- 1821), em 1807 ele publicou um trabalho sobre a propagação de calor em corpos sólidos que fazia uso das hoje chamadas séries de Fourier. Em 1822 ele se tornou o secretário da ala matemática da Académie des Sciences e passou seus últimos anos publicando diversos artigos (O'CONNOR e ROBERTSON, 1997).

$\hat{u}_k$ é o coeficiente da série de Fourier e é dado por $\hat{u}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-2\pi jkt/T} dt$ com $-\infty < k < \infty$.

3.2.2 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier $X(\omega)$ é a decomposição do sinal de tempo discreto, está definido apenas em instantes de tempo isolados, $x(n)$ nos seus componentes de frequência e se dá por:

$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$, o sinal de tempo discreto é periódico variando de $-\pi$ a π o que faz que $X(\omega)$ também seja com período 2π .

3.3 Mecânica quântica

Teremos então a partir de Ramamurti (1994) o uso dos números complexos na mecânica quântica na equação de Schrödinger, descrições quânticas de partículas, oscilador harmônico quântico e no princípio da incerteza de Heisenberg, além disso veremos o uso dos números complexos nas matrizes que representam o spin de uma partícula.

3.3.1 A equação de Schrödinger

A equação de Schrödinger caracteriza um sistema quântico determinando a evolução temporal de função de onda $\psi(t, \mathbf{q})$ relacionada a uma certa partícula quântica que contém informações sobre a probabilidade de encontrar a partícula em diferentes estados quânticos, tal equação faz uso de números complexos e se dá da forma:

$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} [\psi(t, \mathbf{q})] = \hat{H}\psi(t, \mathbf{q})$, onde q é a carga elétrica da partícula em trabalhada, $\hbar$ é a constante reduzida de Planck e $\hat{H}$ é o operador hamiltoniano cuja forma varia dependendo do sistema analisado.

O símbolo $|\psi\rangle$ é usado para denotar a função de onda ψ de uma partícula quântica, essa notação, o símbolo $|\psi\rangle$ é chamado de ket e é utilizado para representar um vetor no espaço de estados quânticos.

3.3.2 Descrições quânticas de partículas

A partícula livre tem energia potencial zero ou constante, para encontrar seu pacote de onda em função do tempo, tomando a origem como tempo inicial temos:

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k) e^{-jkx} dk,$$

Aonde $g(k)$ é transformada de Fourier de $\psi(x, 0)$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(x, 0) e^{-jkx} dx.$$

3.3.3 Oscilador harmônico quântico

O oscilador harmônico quântico torna sua equação de Schrödinger solúvel analiticamente, permitindo obter soluções exatas para as funções de onda e os níveis de energia do sistema, nas vizinhanças do ponto de equilíbrio um sistema, temos que a energia potencial U em relação ao ponto de equilíbrio x_0 dada por de forma aproximada por:

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_0)(x - x_0)^2, \text{ tomando } U(x_0) = 0 \text{ teremos } U(x) = kx^2$$

onde $k = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, a partir disso obtemos a equação para o oscilador harmônico quântico:

$$\psi''(x) = \frac{2m}{\hbar^2} \left[\frac{1}{2} kx^2 - E \right] \psi(x).$$

Podemos ver também um oscilador harmônico quântico como quando uma partícula com vetor de estado $|\psi\rangle$ obedece a equação de Schrödinger:

$$j \hbar |\dot{\psi}\rangle = H |\psi\rangle \text{ onde } H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2, \text{ que é o operador hamiltoniano que}$$

descreve a energia total desse sistema quântico.

3.3.4 Princípio da incerteza de Heisenberg

Na mecânica quântica sendo $|\psi\rangle$ um estado de uma partícula, nós podemos apenas inferir probabilidades, dadas por $p(\omega)$, para os resultados da medição do valor esperado. Essa probabilidade de distribuição pode ser dada pela média:

$$\langle \Omega \rangle = \langle \psi | \Omega | \psi \rangle,$$

Onde $\langle \Omega \rangle$ é o valor médio esperado de uma observável física representada pelo operador Ω . Ele fornece uma estimativa do resultado médio que se espera ao medir a grandeza física correspondente em um estado quântico particular. Na mecânica quântica, os operadores são símbolos matemáticos que representam observáveis físicas e ações que podem ser realizadas em estados quânticos. O operador Ω atua sobre o estado quântico $|\psi\rangle$ para produzir um novo estado ou uma observação, como vimos anteriormente $|\psi\rangle$ simboliza um vetor no plano complexo. O resultado final de tal produto interno é um número complexo que representa o valor esperado da observável Ω no estado $|\psi\rangle$. (RAMAMURTI, 1994)

Além de ser caracterizado por tal média, o sistema também é caracterizado pela incerteza nessa média dada por:

$(\Delta\Omega) = [\langle \psi | (\Omega - \langle \Omega \rangle)^2 | \psi \rangle]^{\frac{1}{2}}$, essa equação tem como propósito calcular a medida de dispersão dos valores observados do operador em relação ao seu valor médio.

3.3.5 Pacote de incerteza mínimo

A função de onda $\psi(x)$ é construída de forma a representar o limite inferior de incerteza (onde a incerteza é minimizada na relação entre P e X , esse estado é caracterizado por:

$$(P - \langle P \rangle) |\psi\rangle = c(X - \langle X \rangle) |\psi\rangle,$$

Onde P representa o operador associado à propriedade física que está sendo medida, X representa o operador associado à outra propriedade física que está sendo medida (geralmente P representa o momentum e X a posição), $\langle X \rangle$ representa o

valor esperado da propriedade física X para o estado quântico $|\psi\rangle$ e c é uma constante complexa.

A seguinte equação também caracteriza tal estado:

$$\langle \psi | (P - \langle P \rangle)(X - \langle X \rangle) + (X - \langle X \rangle)(P - \langle P \rangle)$$

em base X a equação se torna:

$$\frac{\partial \psi(x)}{\psi(x)} = \frac{j}{\hbar} [\langle P \rangle + c(x - \langle X \rangle)] dx.$$

Independente de $\langle X \rangle$ sempre é possível tomar a origem como $x = \langle X \rangle$ assim nesse referencial teremos $\langle X \rangle = 0$, desse modo teremos a solução:

$$\psi(x) = \psi(0) e^{j\langle P \rangle \frac{x}{\hbar}} e^{\frac{jc x^2}{2\hbar}}.$$

Veremos também como obter $\psi(x)$ sob diferentes condições, considere a equação restrita:

$$\langle \psi | P - \langle P \rangle X + X(P - \langle P \rangle) | \psi \rangle = 0.$$

Nesse caso c é totalmente imaginário então $c = j|c|$, teremos:

$$\psi(x) = \psi(0) e^{j\langle P \rangle \frac{x}{\hbar}} e^{-\frac{|c|x^2}{2\hbar}}.$$

Tomando $\Delta^2 = \frac{\hbar}{|c|}$ teremos $\psi(x) = \psi(0) e^{j\langle P \rangle x/\hbar} e^{-|x|^2/2\Delta^2}$, onde Δ^2 é arbitrário.

Por fim se não tomarmos $\langle X \rangle = 0$ teremos:

$$\psi(x) = \psi(\langle X \rangle) e^{j\langle P \rangle \frac{x - \langle X \rangle}{\hbar}} e^{-(x - \langle X \rangle)^2/2\Delta^2}.$$

3.3.6 Spin

O spin é uma forma de momento angular presente nas partículas elementares, elétrons, prótons e nêutrons por exemplo, este momento angular é intrínseco à partícula, ou seja, não está associado ao seu movimento orbital. Apesar de não existir um modelo mecânico que lide com o spin de forma satisfatória ainda podemos descrever suas dinâmicas. Não existe uma fórmula geral para o spin de uma partícula, a descrição matemática do spin é feita por meio de operadores de spin, que atuam

sobre os estados de spin das partículas. Esses operadores são representados por matrizes.

Um exemplo de matriz associado ao spin que faz uso de números complexos são as matrizes de Pauli³ dadas por:

$S = \frac{\hbar}{2} \sigma$ tal que

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Outro exemplo de matriz relacionada ao spin que faz uso de números complexos é a matriz rotação que é aplicada em situações em que o spin de uma partícula está sujeito a uma transformação rotacional, ou seja, quando ocorre uma mudança na direção ou orientação do spin.

A matriz de rotação do spin é usada para calcular as probabilidades e amplitudes de transição entre diferentes estados de spin de uma partícula após uma rotação. Para uma partícula com spin ao longo do eixo z, se queremos deixá-la num estado dado por $|\hat{n}, +\rangle$ teremos que rotacioná-la a um ângulo θ num eixo perpendicular aos eixos z e $\hat{n}$, a matriz rotação associada será:

$$\exp\left(-j\frac{\theta}{2}\hat{\theta} \cdot \sigma\right) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}e^{-j\Phi} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{j\Phi} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}.$$

A partir de tais aplicações vemos que os números complexos estão muito mais conectados com a vida real do que aparentam, assim podemos verificar que os números complexos não são inúteis ou apenas uma abstração matemática como foram considerados por grande parte dos matemáticos do passado como visto no capítulo 2. Podemos ver, então, como os números complexos são uma importante ferramenta em diversas áreas do conhecimento nos auxiliando a compreender diversos fenômenos do mundo natural de forma mais profunda pois com eles podemos realizar cálculos e descrever funções que eram impossíveis apenas com o uso de números reais. Deve-se também notar que as aplicações práticas vistas nesse capítulo são apenas uma fração dos inúmeros empregos que os números complexos possuem nas mais diversas disciplinas e que com os constantes avanços nas áreas

³ Wolfgang Pauli (1900-1958) foi um físico austríaco, ele trouxe contribuições, principalmente, para os campos das propriedades magnéticas da matéria, mecânica quântica e relatividade. Em 1945 ele ganhou o prêmio Nobel pelo princípio da exclusão, também conhecido como princípio de Pauli (O'CONNOR e ROBERTSON, 2003).

da ciência e tecnologia existem grandes chances de ainda mais aplicações serem descobertas com o passar dos anos.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo dos séculos, os números complexos se estabeleceram como uma ferramenta poderosa e indispensável na matemática, ciência e tecnologia. Sua história, desde os primeiros desafios na resolução de equações cúbicas até as aplicações modernas na física quântica e engenharia, destaca a importância e a versatilidade desses números.

O estudo da resolução das equações cúbicas por matemáticos como Del Ferro, Fontana, Cardano e Bombelli foi o ponto de partida para o desenvolvimento dos números complexos. Descartes, Wallis, Wessel e Gauss expandiram essas ideias, estabelecendo as bases para a interpretação geométrica dos números complexos no plano complexo.

A contribuição de De Moivre e Euler foi fundamental para o estabelecimento das propriedades e fórmulas dos números complexos. Euler explorou a relação entre os números complexos, as funções exponenciais e as séries de potências, enquanto De Moivre desenvolveu a fórmula que leva seu nome, permitindo a potenciação de números complexos e estabelecendo uma conexão entre a trigonometria e os números complexos.

O trabalho de Cauchy na criação e desenvolvimento das funções complexas trouxe uma nova dimensão ao estudo dos números complexos. Suas contribuições permitiram uma compreensão mais profunda das propriedades e comportamento das funções complexas, abrindo caminho para avanços subsequentes na análise complexa.

Exploramos as aplicações dos números complexos em ciência e tecnologia. Nos circuitos elétricos, os números complexos fornecem uma descrição precisa de grandezas elétricas e simplificam a análise de circuitos complexos. O processamento de sinais se beneficia do uso de números complexos para representar e manipular sinais analógicos e digitais, permitindo a transmissão e a análise eficiente de informações.

A mecânica quântica, uma das teorias mais fundamentais da física moderna, incorpora os números complexos em sua formulação matemática. As funções de onda, que descrevem o comportamento dos sistemas quânticos, são expressas em termos

de números complexos. Essa abordagem permite uma descrição precisa de fenômenos quânticos, levando a avanços significativos na compreensão do mundo microscópico.

Em conclusão, os números complexos têm uma “história rica” e uma aplicabilidade abrangente. Desde o desenvolvimento de suas propriedades matemáticas até sua aplicação em áreas como eletricidade, processamento de sinais e mecânica quântica, os números complexos desempenham um papel crucial na compreensão e na resolução de problemas de difíceis. Sua interpretação geométrica, propriedades algébricas e conexões com outras áreas da Matemática tornam-nos uma ferramenta indispensável para cientistas, engenheiros e matemáticos em sua busca pelo conhecimento e avanço tecnológico.

REFERÊNCIAS

ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew N.O. Fundamentals of eletric circuits. 4^a ed. Estados Unidos: McGraw-Hill Companies. 2009. p. 366- 414.

BIRCHAK, Gabrielle. Was it for the math? Or the money?. Math! Science! History!, 2022. Disponível em <<https://mathsciencehistory.com/2022/05/03/math-or-money/>>. Acesso 21 de agosto de 2023

BIRCHAK, Gabrielle. Who murdered Ferrari and why, 2022. Disponível em <<https://mathsciencehistory.com/2022/05/17/who-murdered-ferrari-and-why/>>. Acesso 22 de agosto de 2023

BOYER, Carl B. A history of mathematics. 2^a ed. Estados Unidos: John Wiley e Sons, 1991. 715 p.

FisicaModernaUFF. Oscilador Harmônico Quântico. Youtube, 19 de julho de 2011. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=kSP1LI5h7Yo/>>. Acesso em 19 de setembro de 2023

GALLAGER, Robert G. Principles of digital communication. 1^a ed. Estados Unidos: Cambridge University Press. 2008. p. 87- 109

KVASNIKOV. Leonid A. Schrödinger equation. Encyclopedia of Matemathics. 2016 Disponível em <https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Schr%C3%B6dinger_equation/> Acesso 18 de setembro de 2023

MERINO, ORLANDO. A short history of complex numbers. University of Rhode Island. 2006. Disponível em <<https://www.math.uri.edu/~merino/spring06/mth562/ShortHistoryComplexNumbers2006.pdf/>>. Acesso em 9 de setembro de 2023

NAHIN, Paul J. An imaginary tale: The story of [The square root of minus one]. 2. ed. Estados Unidos: Princeton University Press, 1998. 267 p.

O'CONNOR, John J; ROBERTSON Edmund F. Abraham de Moivre. MacTutor. 2004 Disponível em <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Moivre/>. Acesso em 9 de setembro de 2023

O'CONNOR, John J; ROBERTSON Edmund F. Jean Baptiste Joseph Fourier. MacTutor. 1997 Disponível em <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fourier/>>. Acesso em 13 de novembro de 2023

O'CONNOR, John J; ROBERTSON Edmund F. Rafael Bombelli. MacTutor. 2000. Disponível em <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bombelli/>>. Acesso em 27 de agosto de 2023

O'CONNOR, John J; ROBERTSON Edmund F. Wolfgang Ernst Pauli. MacTutor. 2003 Disponível em <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pauli/>>. Acesso em 13 de novembro de 2023

PROAKIS, John G.; MANOLAKIS, Dimitris G. Digital Signal Processing: Principles, algorithms and applications. 3^a ed. Estados Unidos: Prentice-Hall. 1996. p. 230-247

SHANKAR, Ramamurti. Principles of quantum mechanics. 2^a ed. Estados Unidos: Plenum press. 1994. 676p

SOARES, Marcio G. Cálculo em uma variável complexa. 5^a ed. Brasil: IMPA, 2009. p. 34- 58.

VERITASIIUM. How Imaginary Numbers Were Invented. YouTube, 01 de novembro de 2021. Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=cUzklzVXJwo> >. Acesso em 22 de agosto de 2023