UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

JONAS LOBATO SAGICA

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EDOS DE PRIMEIRA ORDEM PELOS MÉTODOS DE EULER COM AUXILIO COMPUTACIONAL

ABAETETUBA-Pará
2022

JONAS LOBATO SAGICA

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EDOS DE PRIMEIRA ORDEM PELOS MÉTODOS DE EULER COM AUXILIO COMPUTACIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus Universitário de Abaetetuba, Universidade Federal do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Rômulo Corrêa Lima.

ABAETETUBA-Pará

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBDSistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará

Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S129s Sagica, Jonas Lobato.
SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EDOS DE PRIMEIRA ORDEMPELOS MÉTODOS DE EULER COM AUXILIO COMPUTACIONAL / Jonas Lobato Sagica. — 2022.xix,19 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Rômulo Correa Lima
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - UniversidadeFederal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de Matemática, Abaetetuba, 2022.

1. Métodos numéricos. 2. Método de Euler explicito. 3.Método de Euler modificado. I. Título.

CDD 518.63

JONAS LOBATO SAGICA

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EDOS DE PRIMEIRA ORDEM PELOS MÉTODOS DE EULER COM AUXILIO COMPUTACIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso orientado pelo Prof. Dr. Rômulo Correa Lima, apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção de grau de licenciado em Matemática.

Aprovado em:14/12/2022.

BANCA EXAMINADORA

Rômulo Correa Lima
PROF. DR. RÔMULO CORRÊA LIMA
Orientador– FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA

Manuel de Jesus dos S. Costa.
PROF. DR. MANUEL DE JESUS DOS S. COSTA
(Examinador Interno - UFPA)

PROF. DR. SEBASTIÃO MARTINS SIQUEIRA CORDEIRO
(Examinador Interno - UFPA)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e sempre estar presente na minha caminhada.

A minha família que sempre ajudou e estiveram presente em mais um ciclo.

Ao professor Rômulo Correa Lima pela orientação.

Por Lohanna Monteiro Nunes que me incentivou e me apoiou durante toda graduação.

E finalmente a todos que contribuíram para realização deste trabalho.

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EDOS DE PRIMEIRA ORDEM PELOS MÉTODOS DE EULER COM AUXILIO COMPUTACIONAL

Autor: Jonas Lobato Sagica
Orientador: Rômulo Correa Lima
Banca: Rômulo Correa Lima, Manuel de Jesus dos Santos Costa, Sebastião Martins Siqueira Cordeiro.

RESUMO

É indispensável para profissionais das ciências exatas equacionar e solucionar de maneira precisa uma variedade de problemas que podem surgir a partir de uma equação diferencial ordinária, assim, a busca por métodos que se aproximem ao máximo da solução exata se faz de extrema importância. Diante disto, buscou-se realizar análise comparativa entre dois métodos de solução numérica, método de Euler e Euler modificado. Para corroborar com o estudo, foi investigado maneiras e exemplos que poderiam ser expressas matematicamente no software Scilab, que foi utilizado como auxílio computacional para a demonstração dos resultados obtidos e análise gráfica. A partir dos resultados, foi possível realizar esta comparação entre os métodos e conclui-se que o método de Euler modificado é mais preciso do que o método de Euler para a apresentação de resultados matemáticos que originam da resolução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

Palavras-chave: Métodos numéricos; Método de Euler explicito; Método de Euler modificado.

ABSTRACT

It is indispensable for professionals in the exact sciences to accurately equate and solve a variety of problems that may arise from an ordinary differential equation, thus, the search for methods that are as close as possible to the exact solution is extremely important. In view of this, we attempted to carry out a comparative analysis between two methods of numerical solution, the Euler method and the modified Euler method. To corroborate the study, ways and examples that could be expressed mathematically in the Scilab software were investigated, which was used as a computational aid for the demonstration of the results obtained and graphical analysis. From the results, it was possible to perform this comparison between the methods and it is concluded that the modified Euler method is more accurate than the Euler method for presenting mathematical results that originate from the resolution of a first order ordinary differential equation.

Keywords: Numerical methods; Explicit Euler method; Modified Euler's Method.

1 – INTRODUÇÃO

Segundo Campos Filho, as equações diferenciais ordinárias (EDO) são equações que envolvem uma ou mais derivadas de uma função desconhecida e todas as derivadas são consideradas

em relação a uma só variável independente. Equações diferencias ordinárias podem ser solucionadas por diversos métodos, dependendo da ordem da EDO, dentre eles, dá-se ênfase ao método de Euler e Euler modificado que será retratado no presente trabalho, que busca realizar uma comparação destas em relação a solução analítica, visto que as EDOs têm uma grande aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento, como engenharia e ciências exatas (DULLUIUS et al, 2013, pg 01), desse modo, a busca por métodos que se aproximem ao máximo da solução exata se faz de extrema importância.

Em suma, o estudo visa comparar a precisão dos métodos sob parâmetros diferenciados, para isso, utilizou-se o software Scilab como auxílio computacional, visto que o mesmo é um software gratuito de código aberto (opensource) de programação numérica, que além de permitir a solução de problemas numéricos e geração de gráficos, além de contar com uma variada coleção de funções matemáticas (PIRES, 2004, pg 04).

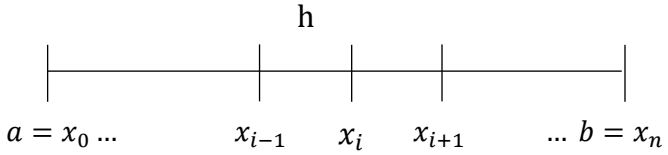
2 – O MÉTODOS DE EULER

Chama-se solução numérica o procedimento empregado no cálculo de uma estimativa para a solução associada a um conjunto de pontos discretos (x_i, y_i), com $i = 0,1, \dots, n$. Para isso, deve-se definir uma malha, dividindo o intervalo $[a, b]$, em n subintervalos de comprimento h conforme mostrado na Figura 1, sendo, portanto:

$$h = \frac{b - a}{n} \tag{1}$$

também conhecido por espaçamento ou passo da malha (CARREIRA, BRANDI, 2016).

Figura 1 - Malha unidimensional de passo h



Fonte: CARREIRA, BRANDI (2016)

O processo de solução é incremental, o que significa que ele é determinado em passos. Ele começa no ponto no qual o valor inicial é fornecido (x_0, y_0). Em seguida, usando a solução conhecida no primeiro ponto, determina-se uma solução em um segundo ponto próximo. Depois, obtém-se uma solução em um terceiro ponto, e assim por diante. Há procedimentos que envolvem uma abordagem de passo simples e outros que consideram uma abordagem multipasso. Na abordagem de passo simples, a solução no ponto seguinte, x_{i+1}, é calculada a partir da solução conhecida no ponto atual, xi. Na abordagem multipasso, a solução em x_{i+1} é calculada a partir das soluções conhecidas em vários pontos anteriores. A ideia é que o valor da função em vários pontos anteriores possa fornecer

uma melhor estimativa para a tendência da solução. Dois tipos de métodos, explícito e implícito, também podem ser usados no cálculo da solução em cada passo. A diferença entre esses métodos está no procedimento usado na solução (GILAT, SUBRAMANIAM, 2008; CARREIRA, BRANDI, 2016).

Dentre os métodos de passo simples encontra-se a metodologia de Euler, cujo nome deve-se ao matemático Leonhard Euler, é um procedimento numérico de primeira ordem para solucionar equações diferenciais ordinárias (EDO) com um problema de valor inicial (PVI) dado, quando se resolve numericamente uma equação diferencial, o enunciado do problema também inclui o domínio da solução, pode-se ajustar previamente o número de pontos nos quais deseja-se obter a solução, ou isso pode ser decidido pelo método. É o método numérico para integração de equações diferenciais ordinárias. Isto é, dada a equação:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2}$$

Com a condição inicial $y(x_1) = y_1$, deseja-se calcular os próximos valores para y, de forma a obter a cada iteração o valor de y_{i+1} para um determinado x_{i+1}, variando x no intervalo $x_0 \leq x \leq x_n$.

O método pode ser formulado de forma explícita ou implícita, que diferenciam entre si pelas metodologias utilizadas na solução, conforme será apresentado nesta seção, (GILAT, SUBRAMANIAM, 2008).

2.1 – Método explícito de Euler

Esse método parte de um ponto inicial e projeta um segundo ponto através da reta tangente. Em um método explícito de passo simples, a solução numérica aproximada (x_{i+1}, y_{i+1}) é calculada a partir da solução conhecida no ponto (x_i, y_i) usando:(GILAT, SUBRAMANIAM, 2008).

$$x_{i+1} = x_i + h \tag{3}$$

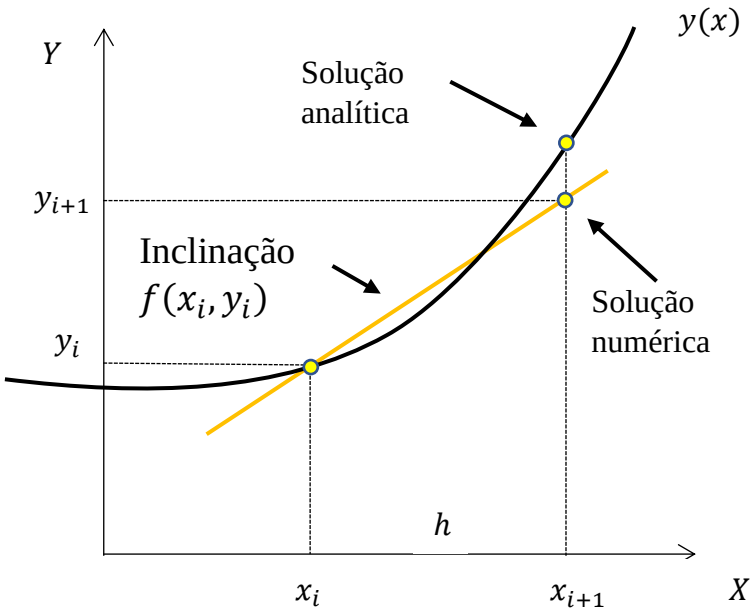
$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\,.h \tag{4}$$

Onde h é a largura do passo de integração e Inclinação é uma constante que estima o valor de $\frac{dy}{dx}$ no intervalo de x_i a x_{i+1},. A solução numérica começa no ponto onde o valor inicial é conhecido. Isso corresponde a $i = 1$ e ao ponto (x_1, y_1). Em seguida, i se torna $i = 2$, e a solução no ponto seguinte, (x_2, y_2), é calculada usando as equações (3) e (4). O procedimento continua com $i = 3$, e assim por diante, até que os pontos cubram todo o domínio da solução.

Muitos métodos explícitos de passo simples usam a forma das equações (3) e (4), a diferença entre os métodos está no valor usado na constante Inclinação que aparece na equação (4) e na forma pela qual ela é determinada. O método explícito mais simples é o método de Euler, no qual a

inclinação é igual à inclinação de $y(x)$ em (x_i, y_i), ilustrado na Figura 2. (GILAT, SUBRAMANIAM, 2008; CHAPRA, CANALE, 2011; MENDONÇA, LIMA, BARROS, MENEZES, MEZZOMO, 2018).

Figura 2 - Representação gráfica do método explícito de Euler.



Fonte: GILAT, SUBRAMANIAM, (2008)

2.1.1 - Dedução do método de Euler usando a integração numérica

Este método pode ser obtido, observando-se que a equação (2) pode ser escrita como um problema de integração após a multiplicação de ambos os seus lados por dx (GILAT, SUBRAMANIAM, 2008; CHAPRA, CANALE, 2011):

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx \tag{5}$$

Realizando a integração no lado esquerdo e isolando y_{i+1}, obtém-se:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx \tag{6}$$

O segundo termo no lado direito da equação é uma integral que precisa ser avaliada, neste caso, foi utilizado o método do retângulo (ANEXO A), onde o integrando é representado de forma aproximada como um valor constante $f(x_i, y_i)$. Usando essa abordagem, a equação (6) se torna:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{7}$$

que é igual à equação (4), já que $h = (x_{i+1} - x_i)$.

2.1.2 - Dedução do método de Euler usando diferenças finitas para aproximar a derivada

Este método pode ser obtido, observando-se que (GILAT, SUBRAMANIAM, 2008; CHAPRA, CANALE, 2011):

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y \tag{8}$$

ou

$$\Delta y = y_{i+1} - y_i \tag{9}$$

Da definição de derivada de uma função tem-se

$$f(x_i, y_i) = \frac{dy(x_i)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{h} \approx \frac{\Delta y}{h}$$

A primeira igualdade é dada pela equação (2). Desta forma,

$$\Delta y \approx f(x_i, y_i)\,.\,h \tag{10}$$

Aplicando (9) em (10), tem-se:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\,.\,h$$

Logo

$$y_{i+1} = y_i + h.f(x_i, y_i) \tag{11}$$

que, juntamente com a equação (3), representa o avanço da solução da EDO pelo método de Euler.

2.2 – Método de Euler modificado

O método de Euler modificado é uma versão aperfeiçoado do método explícito de Euler, o método apresenta uma estratégia para melhorar a estimativa da inclinação, que envolve a utilização de duas derivadas, uma no ponto inicial e outra no ponto final, para obter uma aproximação mais razoável em relação ao valor real, este método visa reduzir erros alterando y_{i+1} para incluir o efeito de variação ao longo do intervalo. O que resulta na média da inclinação no início do intervalo para gerar uma estimativa no final do intervalo. Portanto, modifica-se a formula do método explicito para:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} = f(x_i, y_i) \tag{12}$$

a estimativa para a inclinação no final do intervalo é determinada primeiramente com o cálculo de um valor aproximado para a variável y_{i+1}, escrita como y_{i+1}^{Eu}, usando o método explícito de Euler:

$$y_{i+1}^{Eu} = y_i + f(x_i, y_i)h \tag{13}$$

e depois com a estimativa para a inclinação no final do intervalo com a substituição do ponto (x_{i+1}, y_{i+1}^{Eu}) na equação que envolve $\frac{dy}{dx}$:

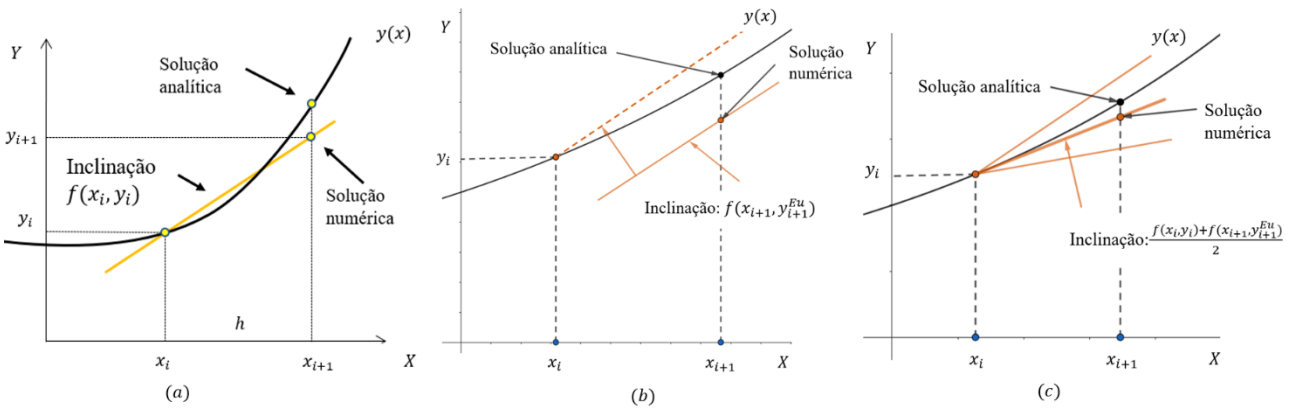
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{y=\, y_{i+1}^{Eu} \\ x\, =\, x_{i+1}}} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{Eu}) \tag{14}$$

uma vez calculadas as duas inclinações, uma melhor estimativa para o valor de y_{i+1} é calculada a partir da média dessas inclinações:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{Eu})}{2}.h \tag{15}$$

O método de Euler modificado é ilustrado esquematicamente na Figura 3. A Figura 3 (*a*) mostra a inclinação no início do intervalo, dada pela equação (12), e o valor de y_{i+1}^{Eu} calculado com a equação (13). A Figura 3 (*b*) mostra a inclinação estimada no final do intervalo, calculada com a equação (14), e a Figura 3 (*c*) mostra o valor de y_{i+1} obtido com a equação (15) a partir da média das duas inclinações. A equação (15) também pode ser deduzida com a integração da EDO ao longo do intervalo $[x_i\ ,\ x_{i+1}]$ usando o método trapezoidal (GILAT, SUBRAMANIAM, 2008; MENDONÇA, LIMA, BARROS, MENEZES, MEZZOMO, 2018).

Figura 3: Método de Euler modificado.



Fonte: GILAT, SUBRAMANIAM, (2008)

Resume-se o método de Euler modificado no seguinte algoritmo.

Algoritmo para o método de Euler modificado por (GILAT, SUBRAMANIAM, 2008)

1. A partir da solução no ponto (x_i, y_i), foi calculado o próximo valor da variável independente:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

2. É calculado $f(x_i, y_i)$.
3. É estimado y_{i+1} usando o método de Euler:

$$y_{i+1}^{Eu} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

4. É calculado $f(x_{i+1}, y_{i+1})$.
5. Foi calculado a solução numérica em $x = x_{i+1}$:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{Eu})}{2}.h$$

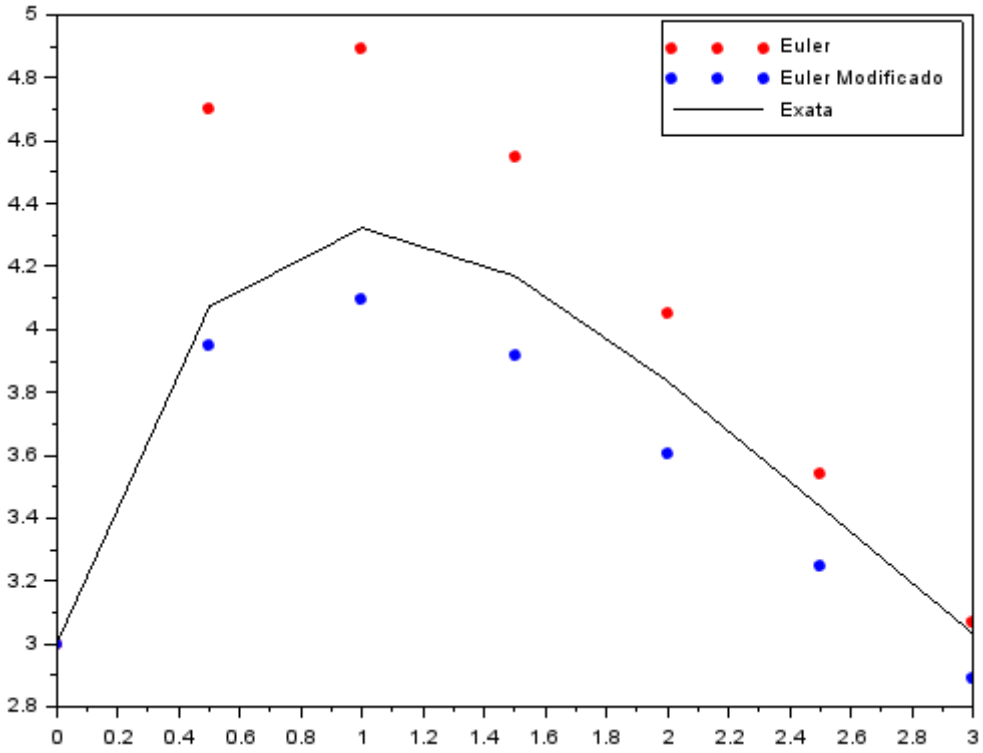
3 – APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE EULER E EULER MODIFICADO NA SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EDOS

Foi utilizado o software gratuito Scilab para a demonstração e solução numérica de EDOs, a versão utilizada foi a de 6.1.1. Aplicando o método de Euler, Euler modificado e solução analítica (ver ANEXO C) para resolver a EDO $\frac{dy}{dx} = -1{,}2y + 7e^{(-0{,}3x)}$ de $x = 0$ a $x = 3$ com a condição inicial $y(0) = 3$ e $h = 0{,}5$. Foi comparado os resultados com a solução analítica: $y = \frac{70}{9}e^{-0{,}3x} - \frac{43}{9}e^{-1{,}2x}$.

SOLUÇÃO

Os comandos (ANEXO B) foram necessários para resolução da equação e traçar um gráfico, que mostrou as soluções numérica e exata.

Figura 4: Gráfico comparando os métodos ao analítico com $h = 0{,}5$.



Fonte: Autoria própria

O gráfico traçado pelo programa é mostrado na Figura 4. A figura mostra que os pontos de Euler modificados calculados estão mais próximos da solução exata do que os pontos de Euler, em que o método explícito de Euler foi empregado usando o mesmo passo de integração. Os valores das soluções numérica e exata, bem como o erro absoluto de y e yEM presente na Tabela 1, que é a diferença entre essas soluções, são:

Tabela 1: resultado numérico

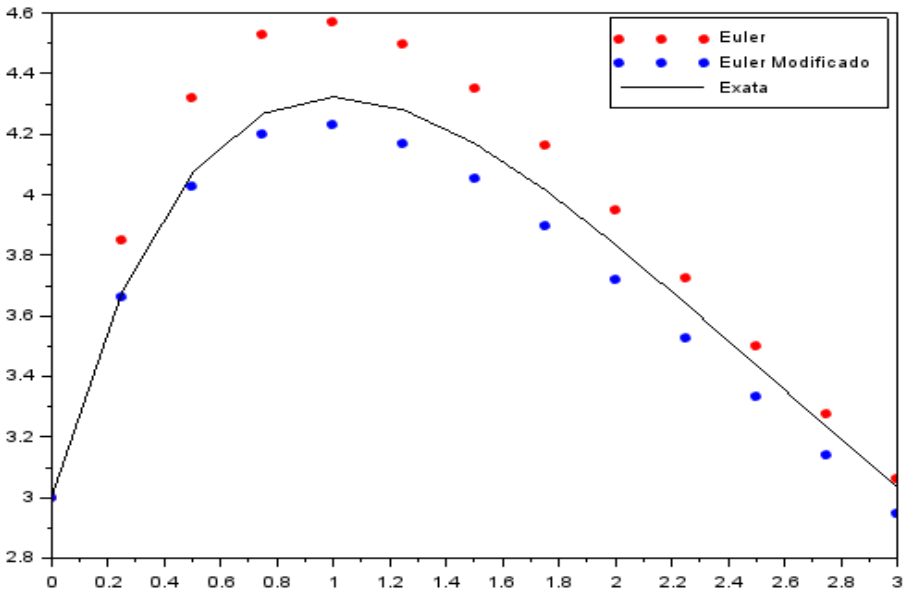
i	x_i	y (euler)	yEM(modificado)	yA (analítico)	Erro $yA - y$	Erro $yA - yEM$
1	0,0	3,0	3,0	3,0	0,0	0,0
2	0,5	4,7	3,9462	4,0723	-0,6277	0,1261
3	1	4,8925	4,0973	4,3229	-0,5696	0,2256
4	1,5	4,5499	3,9154	4,1696	-0,3803	0,2542
5	2	4,0516	3,6016	3,8351	-0,2165	0,2335
6	2,5	3,5415	3,2457	3,4361	-0,1054	0,1904
7	3	3,0699	2,8892	3,0317	-0,0382	0,1425

Fonte – Produzido pelo autor com base nos dados (Scilab, 2022)

A comparação dos erros obtidos, mostra que o erro referente ao método modificado é muito menor.

Ao alterar o passo $h = 0{,}25$ temos:

Figura 5: Gráfico comparando os métodos ao analítico com $h = 0{,}25$.



Fonte: Autoria própria

Tabela 2 - resultado numérico

i	x_i	y (euler)	yEM(modificado)	yA (analítico)	Erro $yA - y$	Erro $yA - yEM$
1	0,0	3,0	3,0	3,0	0,0	0,0
2	0,25	3,85	3,6593	3,6763	-0,1737	0,017
3	0,5	4,3186	4,0275	4,0723	-0,2463	0,0448
4	0,75	4,4292	4,1958	4,2682	-0,161	0,0724
5	1	4,5679	4,2282	4,3229	-0,245	0,0947
6	1,25	4,4939	4,1695	4,2795	-0,2144	0,11
7	1,5	4,3485	4,0511	4,1696	-0,1789	0,1185
8	1,75	4,1598	3,895	4,0159	-0,1439	0,1209
9	2	3,9471	3,7165	3,8351	-0,112	0,1186
10	2,25	3,7234	3,5262	3,639	-0,0844	0,1128
11	2,5	3,4974	3,3315	3,4361	-0,0613	0,1046
12	2,75	3,2748	3,1373	3,2323	-0,0425	0,095
13	3	3,0593	2,9471	3,0317	-0,0276	0,0846

Fonte – Produzido pelo autor com base nos dados (Scilab, 2022)

A Tabela 2 tem resultados da alteração do valor de h que gerou mudanças consideráveis nos métodos, em comparação o erro do y quando o $h = 0{,}5$ e o erro de yEM quando $h = 0{,}25$, mostra que o erro referente ao método modificado é muito menor.

CONCLUSÃO

Foram aplicados e comparados 2 (dois) métodos numéricos para solucionar uma equação diferencial ordinária com o objetivo de utilizar o programa Scilab como ferramenta auxiliar na comprovação e visualização dos resultados. Dessa maneira, buscou-se solucioná-las usando o software como estratégia para agilizar os processos do cálculo com maior precisão, dando ênfase a otimização das resoluções.

Os resultados observados apontam a maior eficácia do método de Euler modificado quando comparado ao método de Euler tradicional, visto que apresentou um erro menor, indicando um resultado mais próximo da solução exata. Foi analisado também, o comportamento dos resultados ao alterar o valor do passo h, a diminuição desse valor implicou em uma melhora significativa de ambos

os métodos quando este era reduzido, entretanto ainda dá-se destaque ao método de Euler modificado nessas circunstâncias, visto que este, se aproximou ainda mais da solução exata.

Como perspectiva sugere-se um estudo mais aprofundado e aplicações de outros métodos para a solução de EDOs que descendem dos conceitos deste trabalho, que podem ser realizadas com o auxílio computacional, não limitando-se apenas a EDOs de primeira ordem, podendo se estender a EDOs de n ordens.

REFERÊNCIAS

CAMPOS FILHO, F, F. **Algoritmos numéricos**-2ª Edição. LTC, 2007.

CARREIRA, B. L.; BRANDI, A. C. Método de Euler aperfeiçoado e modificado para solução de equações diferenciais ordinárias. **C.Q.D. Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 7, p. 4-11, dez. 2016. Disponível em: http://www.fc.unesp.br/# ! /departamentos/matematica/revista-cqd/. Acessado em: 17 nov. 2022.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**-5ª Edição. São Paulo: AMGH, 2011.

DA MOTTA PIRES, P. S. Introduçao ao Scilab Versao 3.0. **Departamento de Engenharia de Computaçao e Automaçao da UFRN,** Natal, RN, julho 2004. Disponível em: www. dca. ufrn. br/pmotta/sciport-3.0. pdf. Acessado em: 4 dez. 2022.

DULLIUS, M. M; VEIT, A. E; ARAUJO, S. I. Dificuldades dos alunos na aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 6, n. 2, p. 207-228, 2013. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6170820 Acessado em: 4 dez. 2022.

GILAT, A; SUBRAMANIAM, V. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas**: uma introdução com aplicações usando o MATLAB. Bookman Editora, 2008.

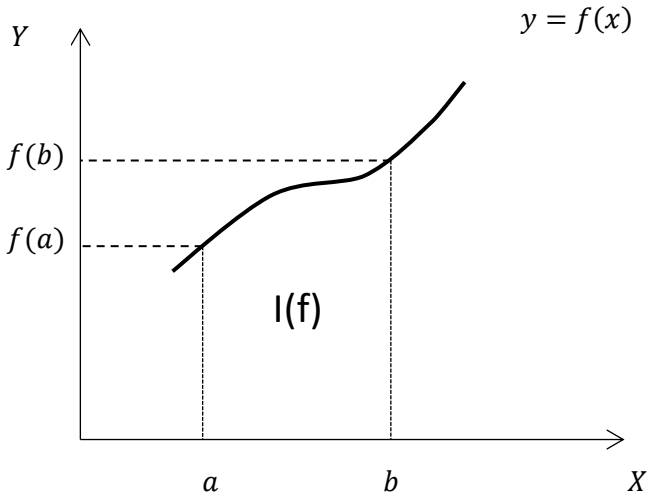
MENDONÇA, V. T. P; LIMA, S. Z. D; BARROS, G. G; MENEZES, S. M; MEZZOMO, I. Comparativo dos Métodos de Euler e Heun na resolução de equações diferenciais de primeira ordem. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, São Carlos, v. 6, n. 1, p. 10070-1-10070-2, 2018. Disponível em: https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/1757/1775. Acessado em: 01 dez. 2022.

ANEXO A

Métodos de integração numérica

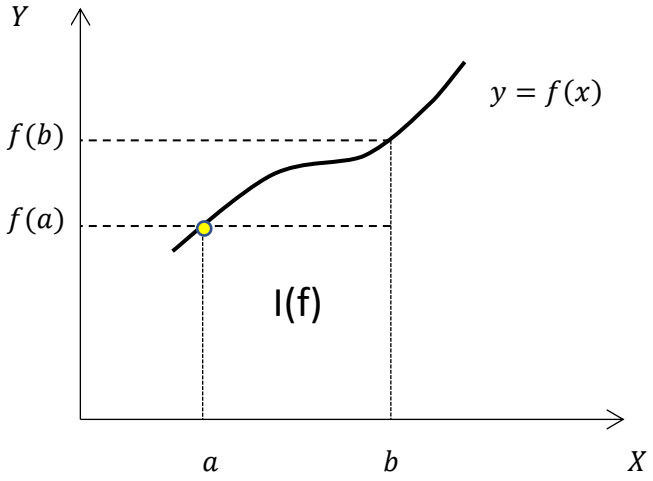
Para solucionar as integrais o método do retângulo é o mais simples para aproximação em $\int_a^b f(x)dx$ consistente em assumir que $f(x)$ ao longo do intervalo $x \in [a, b]$ seja uma constante igual ao valor de $f(x)$ em qualquer um dos pontos finais desse intervalo (Fig. 6).

Figura 6 – Integral exata



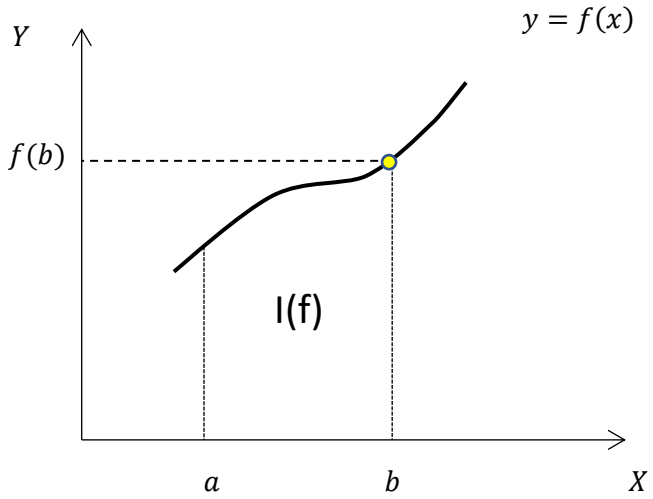
Fonte - GILAT, SUBRAMANIAM, (2008)

Figura 7 – Aproximação da integral usando $f(x) = f(a)$



Fonte - GILAT, SUBRAMANIAM, (2008)

Figura 8 – Aproximação da integral



Fonte – GILAT, SUBRAMANIAN, (2008)

A integral pode ser então calculada de uma das seguintes maneiras:

$$I(f) = \int_a^b f(a)dx = f(a)(b-a) \quad \text{ou} \quad I(f) = \int_a^b f(b)dx = f(b)(b-a) \qquad (16)$$

Como mostra a Fig. 6, a verdadeira integral é aproximada pela área de um retângulo. Obviamente, para a função monotonicamente crescente mostrada na figura, o valor da integral é subestimado quando se assume que $f(x)$ seja igual a $f(a)$, e superestimado quando se assume que $f(x)$ seja igual a $f(b)$. Além disso, o erro pode ser considerável. Quando o integrando for uma função analítica, o erro pode ser significativamente reduzido com o uso do método do retângulo composto (GILAT, SUBRAMANIAM, 2008).

ANEXO B

Código Scilab para a solução numérica da EDO pelos métodos Euler e Euler modificado para a comparação gráfica com a solução analítica.

```
// Programa destinado a comparação entre as soluções numéricas de uma EDO,
// pelo método de Euler e Euler modificado e sua solução analítica.
```

```
clear, clc;

// Condições iniciais
x(1) = 0.0; y(1) = 3.0;
yEM(1) = y(1); yA(1) = y(1); // Condições iniciais que serão utilizados nos méto-
// dos de Euler modificado e na solução exata.
// Intervalo [a, b] do domínio
a = 0.0; b = 2.5;
// Passo h e o número de amostragens
h = 0.5; n = (b-a)/h;
// Definição da função f(x,y)
deff('[y] = f(x,y)','y = -1.2*y +7*%e^(-0.3*x)')

////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
// Soluções Exata e Numéricas
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

for i = 1:n
   x(i+1) = x(i) + h;
   y(i+1) = y(i) + h*f(x(i),y(i)); // Método de Euler
   yEM(i+1) = yEM(i) + h*(f(x(i),yEM(i))+f(x(i+1),y(i+1)))/2; // Método de Euler Modificado
   yA(i+1) = (70/9)*%e^(-0.3*x(i+1))-(43/9)*%e^(-1.2*x(i+1)) // Solução Analítica
end

////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
// Gráficos
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

plot(x,y,'.r',x,yEM,'.b',x,yA,'k')
legend('Euler','Euler Modificado','Exata')
mtlb_axis('xy')

// Autor: Rômulo Correa Lima e Jonas Lobato Sagica
// Data da última atualização: 01/12/2022
```

ANEXO C

Primeiramente resolve-se a EDO (17) para a condição inicial $y = 3$ e $x = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -1{,}2y + 7e^{-0{,}3x} \tag{17}$$

Nota-se que a equação (17) é uma EDO não exata, assim deve-se obter o fator integrante. Assim, ao reescrever (17) obtém-se:

$$(1{,}2y - 7e^{-0{,}3x})\,dx + 1\,dy = 0 \tag{18}$$

Onde:

$$(1{,}2y - 7e^{-0{,}3x}) \rightarrow P(x, y)$$

$$1 \rightarrow Q(x, y)$$

Cujo fator integrante em função de x é dado por:

$$u(x) = e^{-\int h(x)\,dx}$$

Onde $h(x)$ é dada por:

$$h(x) = \frac{\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{Q(x,y)}$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial [17]}{\partial x} = 0$$

E

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial [(1{,}2y - 7e^{-0{,}3x})]}{\partial y} = 1{,}2$$

Assim,

$$h(x) = \frac{0 - 1{,}2}{1} = -1{,}2$$

Logo, o fator integrante é:

$$u(x) = e^{-\int -1{,}2\,dx} = e^{1{,}2x}$$

Multiplicando em ambos os membros da equação (18) pelo fator integrante temos:

$$(1{,}2ye^{1{,}2x} - 7e^{0{,}9x})\,dx + e^{1{,}2x}dy = 0 \tag{19}$$

Assim, a equação (19) é a EDO Exata.

Utilizando o método prático de solução da EDO Exata vamos resolver a equação (19):

Seja $\varphi(x, y)$ a solução da EDO.

$$(1{,}2ye^{1{,}2x} - 7e^{0{,}9x})\,dx + e^{1{,}2x}dy = 0$$

$$(1{,}2ye^{1{,}2x} - 7e^{0{,}9x}) \rightarrow R(x, y)$$

$$e^{1,2x} \rightarrow S(x,y)$$

Então.

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = R(x,y) \tag{20}$$

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = S(x,y) \tag{21}$$

1° passo: Integrando (21) em ambos os membros em relação a y, obtemos

$$\varphi(x,y) = -\int e^{\int 1,2\,x}\, dy$$

$$\varphi(x,y) = ye^{1,2x} + g(x) \tag{22}$$

2° passo: Derivando (22) em relação a x, obtemos

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = 1,2ye^{1,2x} + g'(x) \tag{23}$$

3° passo: Comparando (23) com (20), temos:

$$1,2ye^{1,2x} + g'(x) = 1,2ye^{1,2x} - 7e^{0,9x}$$

$$g'(x) = -7e^{0,9x} \tag{24}$$

4° passo: Integrando (24) em relação a x obtermos:

$$g(x) = \frac{-7}{0,9}e^{0,9x} = \frac{-70}{9}e^{0,9x}$$

Portanto a solução da EDO (19) e dada por

$$\varphi(x,y) = ye^{1,2x} - \frac{70}{9}e^{0,9x}$$

Para as condições iniciais temos:

$$\varphi(0,3) = 3 - \frac{70}{9} = \frac{27-70}{9} = -\frac{43}{9}$$

Logo,

$$= -\frac{43}{9} = ye^{1,2x} - \frac{70}{9}e^{0,9}$$

$$y = \frac{70}{9}e^{0,9}.e^{-1,3x} - \frac{43}{9}e^{-1,2x}$$

$$y = \frac{70}{9}e^{-0,3x} - \frac{43}{9}e^{-1,2x}$$

Solução analítica.