



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS  
FACULDADE DE MATEMÁTICA

WILLIAM MOZART DA SILVA DE BARROS

**EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO E PERDA DE DECAIMENTO PARA  
SISTEMA DE VIGAS DE TIMOSHENKO**

Salinópolis - Pa

2019

WILLIAM MOZART DA SILVA DE BARROS

**EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO E PERDA DE DECAIMENTO PARA  
SISTEMA DE VIGAS DE TIMOSHENKO**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Campus de Salinópolis da Universidade Federal do Pará, como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos

WILLIAM MOZART DA SILVA DE BARROS

**EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO E PERDA DE DECAIMENTO PARA  
SISTEMA DE VIGAS DE TIMOSHENKO**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Campus de Salinópolis da Universidade Federal do Pará, como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos

Data da apresentação: 10/07/2019

Banca examinadora

---

Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos

---

Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro

---

Prof. MSc. Marcos Limas Cardoso

Salinópolis - Pa

2019

# DEDICATÓRIA

*As minhas avós Miraci Silva e Maria Sousa*

# AGRADECIMENTOS

Ao meu pai Irineu Nunes Barros e minha mãe Maria do Socorro Nunes da Silva, por todo amor e carinho que a mim dedicaram, não somente durante a graduação, mas durante todos os dias da minha vida..

Aos meus avós paternos Antero e Adélia Barros, tios paternos Ivanildo, Ivan, Ilson, Ivaldo e Anselmo Barros e tias lêda, Ivana e Kitânia Barros, por todo apoio e incentivo aos estudos e ao ensino.

Aos meus tios maternos Waldemir, Waldecir Nunes da Silva, Walmir Nascimento e tias Waldina Nascimento e Regina Costa, pelo incentivo aos estudos e ajuda nos momentos necessários.

Aos meus irmãos Marc Donald da Silva de Barros e Sara Ingrid da Silva de Barros por serem tudo que eu precisei para superar os momentos de solidão e dificuldades.

Aos meus primos Alex, Pedro e Gabriel Barros de Araújo, Ítalo e German Barros Damasceno, Andrew e Yago Barros e primas Darly, Estefany e Caroline Barros por toda atenção e auxílio.

A minha amada Maria Carolina Miranda Cardoso por ser minha fortaleza, minha companheira e amiga inseparável, por trazer paz para minha vida e por me incentivar quando eu me esmorecí e por tantas outras coisas que não há palavras suficientes para descrever.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos, por todos os ensinamentos, paciência, por toda ajuda que me foi conferida e pela motivação aos estudos e a pesquisa.

Aos meus amigos de graduação, em especial, Danilo Paixão, Dielle Costa, Maysa Fernanda, Werllen Lisboa, Samuel Sarmento, Edson Marcos, Marcel Dias, Valtênis Correa, João Ricardo, Fábria Reis e Carlos Júnior, pela companhia, amizade e por todo o suporte.

Aos amigos de infância Jadson Santa Brígida, Bruno Barros, Jalisson Nunes e Marcos Silva pelo apoio e incentivo aos estudos.

Aos professores Lindomar Ribeiro, Rejane Faria, Mirelson Freitas, Midori Makino, Lília Diniz, Clédson Gonçalves e a todo corpo docente da UFPA Salinópolis, por todo aprendizado e colaboração para a minha formação acadêmica.

# RESUMO

Este trabalho refere-se ao estudo do sistema de vigas de Timoshenko, mostrando que este sofre uma perda de decaimento, quando ocorre uma diferença de velocidades, dada a partir de uma relação entre duas razões que envolvem constantes físicas do sistema. Duas condições de fronteira diferentes são consideradas, a saber, a condição de Dirichlet e a condição de Neumann. Primeiramente será mostrado a energia do sistema, encontrada a partir do método multiplicativo e mostraremos que esta satisfaz uma lei de dissipação característica. A existência e unicidade de solução para o sistema pode ser melhor compreendida através do método de semigrupos, a explicitação do problema na forma variacional, ajustando-o nas condições dadas a partir do teorema de Lax-Milgram, assim como também a inserção deste no problema de Cauchy. A perda de decaimento do sistema pode ser mostrada, mediante o estudo de algumas definições importantes, pertencentes a Análise Funcional e o teorema de Geahart-Pruss.

**Palavras Chaves:** Sistema de vigas; configuração de semi-grupos; perda de decaimento.

# ABSTRACT

Your summary

**Key Words:** ...

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
1.1	A viga: considerações iniciais . . . . .	8
1.2	O modelo de Euler-Bernoulli . . . . .	11
1.3	O modelo de Timoshenko . . . . .	12
1.4	Objetivos do trabalho . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Energia do modelo de Timoshenko</b>	<b>15</b>
2.1	Modelo de Timoshenko . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Espaços e domínio do operador</b>	<b>19</b>
3.1	Espaço de fase e espaço das funções . . . . .	19
3.2	Domínio do operador . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Solução do modelo de Timoshenko</b>	<b>23</b>
4.1	$A$ é um gerador infinitesimal . . . . .	23
4.2	Formulação variacional do problema . . . . .	24
4.3	Existência e unicidade de solução . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Perda de decaimento</b>	<b>29</b>
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>34</b>
	<b>Referências</b>	<b>35</b>

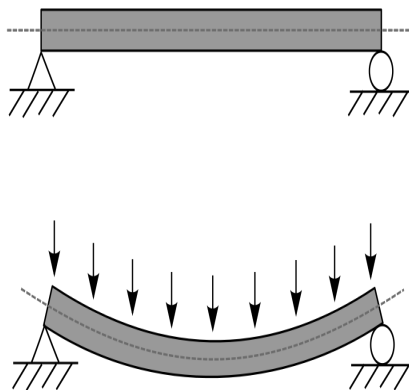
# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 A viga: considerações iniciais

A viga é um elemento estrutural sujeito a cargas transversais. A viga geralmente é usada no sistema laje-viga-pilar para transferir os esforços verticais recebidos da laje para o pilar ou para transferir os esforços verticais recebidos da laje para o pilar ou pra transmitir uma carga concentrada, caso sirva de apoio a um pilar.

Figura 1.1: Esquema de uma viga



Fonte: AutoQi.

A viga é um dos modelos fundamentais de estruturas elásticas, e é utilizada em uma variedade de aplicações como, por exemplo, em hélices de helicópteros, satélites flexíveis, asas de aviões, braços robóticos, trilhos de trens e subsistemas de estruturas mais complexas.

Figura 1.2: Vigas IPN de aço



Fonte: Revolução Artificial.

Figura 1.3: Vigas de concreto armado



Fonte: Autoria própria.

Figura 1.4: Vigas de madeira



Fonte: Autoria própria.

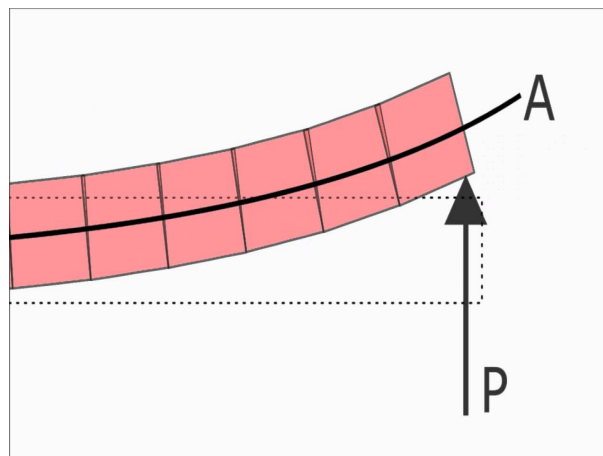
De acordo com [ALMEIDA JR. and SANTOS, 2012], cientistas modernos como Galileu Galilei (1564-1642), Jacob Bernoulli (1654-1705), Daniel Bernoulli (1700-1782) e Leonhard Paul Euler (1707-1783) foram os pioneiros no estudo dos sistemas mecânicos, em especial, na dinâmica de estruturas flexíveis, como as vigas e placas, usando modelos matemáticos. Seus trabalhos foram aperfeiçoados por vários cientistas contemporâneos, dentre os quais destacamos Simeon Denis Poisson (1781-1840), Jacques Antonie Charles Bresse (1822-1883), Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), John William Strutt (1842-1919), também conhecido como lord Rayleigh, Raymond D. Mindlin (1906-1987), Eric Reissner (1913-1996) e Stephen Prokofievich Timoshenko (1878-1972).

Neste trabalho, destacaremos o trabalho de Stephen P. Timoshenko, que produziu um modelo matemático mais eficiente, descrevendo o sistema de vigas considerando determinadas deformações que o sistema pode sofrer.

Segundo [ALMEIDA JR. and SANTOS, 2012], dos trabalhos realizados pelos físicos, matemáticos e engenheiros citados anteriormente, as teorias mais conhecidas são a de Euler, Bernoulli, Rayleigh, Vlasov e Timoshenko.

O modelo de Euler-Bernoulli, datado do século XVIII, descreve um sistema de vigas que leva em consideração apenas a energia potencial da flexão da estrutura, isto é, do deslocamento vertical da viga e a energia cinética do deslocamento lateral.

Figura 1.5: Modelo de Euler-Bernoulli para uma viga elástica. Neste modelo apenas consideramos as energias originadas a partir do deslocamento vertical e lateral.  $P$  é a ação de uma força na extremidade da viga e  $A$  é uma seção longitudinal da viga.



Fonte: <[www.mat.caminos.upm.es](http://www.mat.caminos.upm.es)>. Acesso em 26 de junho de 2019.

Lord Rayleigh, em 1877, aperfeiçoou o modelo de Euler-Bernoulli, considerando que as seções transversais sofrem rotações em relação ao seu eixo central.

Vlasov, em 1949, adicionou sobre as hipóteses de Euler-Bernoulli o efeito de cisalhamento, também conhecida como tensão de corte nas áreas transversais.

Timoshenko, em 1921, aperfeiçoou ainda mais o modelo de Euler-Bernoulli, ao elaborar a sua teoria de vigas, adicionando o efeito potencial a um esforço cortante, assim como também ao efeito de rotação das seções.

Podemos concluir que a evolução histórica dos estudos sobre os sistemas mecânicos sempre teve como objetivo uma melhor compreensão dos fenômenos que acerbam tais sistemas, descrevendo-o de uma forma mais ampla, considerando todos os efeitos físicos significantes que incidem no sistema, utilizando formalismo e rigor matemático para descrevê-los de uma forma mais clara e satisfatória. Esses estudos, de certa forma tornaram-se mais complexos, mas foram bem compreendidos com todo o ferramental matemático desenvolvido desde Isaac Newton, até hoje.

## 1.2 O modelo de Euler-Bernoulli

Em 1750, Leonhard Euler(1707-1783) e Daniel Bernoulli(1700-1782), orientados por Jacob Bernoulli (1654-1705), apresentaram um modelo de viga com a seguinte formulação matemática:

$$A\rho v_{tt}(x,t) = -EIv_{xxxx}(x,t) - f(x,t) - A[kv_t(x,t) + \rho g], \quad (1.1)$$

onde  $I$  é o momento de inércia da área da seção transversal da viga,  $E$  é o módulo de Young da viga,  $\rho$  é a densidade da viga,  $v(x,t)$  é uma função associada ao deslocamento lateral da viga,  $f(x,t)$  uma função associada ao deslocamento vertical,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $k$  é uma constante elástica da viga [ALMEIDA JR. and SANTOS, 2012]. Tal modelo estava regido pelas seguintes hipóteses físicas, elaboradas por esses pesquisadores:

- i) O formato da viga é um prisma reto, cujo comprimento é muito maior que as outras dimensões;
- ii) A viga é constituída de um material linearmente elástico;
- iii) O coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) é desprezível;
- iv) A seção transversal é simétrica em relação ao plano vertical, de forma que a linha neutra está contida nele;
- v) Planos perpendiculares à linha neutra permanecem planos e perpendiculares depois da deformação;
- vi) O ângulo de rotação é muito pequeno;
- vii) Os efeitos de momento de inércia de rotação é desprezado;
- viii) A energia envolvida no cisalhamento é desprezada;
- ix) A viga é constituída de um material homogêneo com densidade  $\rho$ .

### 1.3 O modelo de Timoshenko

Em 1921, Stephen Timoshenko apresentou o seguinte modelo de vigas:

$$\rho A \varphi_{tt} = S_x(x, t), \quad (1.2)$$

$$\rho I \psi_{tt} = M_x(x, t) - S(x, t), \quad (1.3)$$

onde  $t$  denota a variável tempo e  $x$  a distância ao longo da linha de centro da viga em configuração de equilíbrio. A função  $\varphi$  denota o deslocamento vertical da viga em relação a linha de centro e  $\psi$  é uma função relacionada a rotação da seção transversal da viga. De forma análoga ao modelo de Euler-Bernoulli,  $\rho$  é a densidade do material da viga,  $M$  é o momento fletor da viga,  $S$  é a força de cisalhamento,  $A$  é a área da seção transversal da viga e  $I$  é o momento fletor da área de seção transversal da viga.

As relações de tensão-distorção do comportamento elástico da viga são dadas por

$$M(x, t) = EI \psi_x(x, t), \quad (1.4)$$

$$S(x, t) = kAG(\varphi_x + \psi)(x, t), \quad (1.5)$$

onde  $E$  é o módulo de Young,  $G$  é o módulo de cisalhamento e  $k$  é o fator de cisalhamento.

Observe que, diferente do modelo de Euler-Bernoulli, o modelo de Timoshenko se trata de um sistema acoplado, em que considera a rotação e o cisalhamento da viga (isto é, desconsidera as hipóteses *vi*, *vii* e *viii* do modelo de Euler-Bernoulli).

Timoshenko estabeleceu as seguintes equações diferenciais parciais para vibrações mecânicas sem a presença de qualquer mecanismo dissipativo:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (1.6)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \quad (1.7)$$

onde  $\rho_1 = \rho A$ ,  $\kappa = KGA$ ,  $\rho_2 = \rho I$  e  $b = EI$ .

Formalizando o sistema de viga de Timoshenko, temos:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \gamma \varphi_t = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T) \quad (1.8)$$

$$\rho_2 \Psi_{tt} - b \Psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \Psi) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, T) \quad (1.9)$$

com condições iniciais

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \Psi(\cdot, 0) = \Psi_0, \Psi_t(\cdot, 0) = \Psi_1, \forall x \in (0, L), \quad (1.10)$$

e condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = 0, \Psi(0, t) = \Psi(L, t) = 0, \forall t \geq 0, \quad (1.11)$$

onde  $L$  é o comprimento da viga e  $T$  é o instante de tempo final considerado [ALMEIDA JR. and SANTOS, 2012]. O termo  $\gamma$  é um fator de amortecimento que age somente no deslocamento vertical da viga.

A estabilidade do modelo de Timoshenko (em domínios limitados) tem recebido muita atenção nos últimos anos, e um grande número de resultados relativos a decaimento de energia uniforme e assintótico foram estabelecidos [ALMEIDA JR. and SANTOS, 2012].

Basicamente, três tipos de mecanismos dissipativos são considerados para estes modelo:

- i) A dissipação de atrito, obtida pela introdução de um amortecimento por atrito que pode estar atuando tanto nas extremidades da viga, quanto em uma vizinhança dessas extremidades;
- ii) A dissipação térmica, que é obtida pela condução de calor, considerando a lei de Fourier ou a lei de Cattaneo;
- iii) A dissipação visco-elástica dada pelos efeitos de memória.

considerando os mecanismos dissipativos citados acima, um questionamento importante sobre o modelo de Timoshenko é o seguinte:

*"Qual é a quantidade de termos dissipativos para obter o decaimento exponencial para sistemas dissipativos indimensionais de Timoshenko?"*

Sobre o questionamento anterior, podemos dizer que, em toda literatura para sistemas unidimensionais de Timoshenko, quando a dissipação é efetiva em ambos, isto é, na equação de deslocamento vertical e na equação de rotação angular, a conclusão é de que o decaimento exponencial é obtido independentemente de quaisquer relações entre coeficientes do sistema e, portanto, as velocidades de propagação de ondas não desempenham qualquer papel no comportamento assintótico do sistema [ALMEIDA JR. and SANTOS, 2012].

Outro fator importante a ser considerado, é a resposta à questão anterior. Nessa direção, as velocidades das ondas desempenham um papel importante. A relação

$$\chi := \frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2}, \quad (1.12)$$

é um número importante para saber sobre o comportamento assintótico das soluções para

sistemas Timoshenko fracamente dissipativos [ALMEIDA JR. and SANTOS, 2012].

Para o nosso conhecimento, este comportamento assintótico foi notado pela primeira vez por Soufyane [SOUFYANE, ]. Ele provou que o decaimento exponencial para um sistema dissipativo de Timoshenko com um único amortecimento localmente distribuído e condições de contorno homogêneas de Dirichlet é verdadeiro se e somente se

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} = 0. \quad (1.13)$$

## 1.4 Objetivos do trabalho

O objetivo principal deste trabalho consiste em estudarmos o modelo de Timoshenko e mostrarmos a energia do modelo, provando que ela satisfaz uma lei de dissipação característica. Além disso, mostraremos que o problema possui solução e além disso ela é única. Por último mostraremos que o sistema sofre uma perda de decaimento exponencial, quando ocorre a diferença de velocidades mostrada acima.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

1. No Capítulo 2, consideramos o modelo de Timoshenko e mostraremos a energia do modelo usando técnicas multiplicativas.
2. No Capítulo 3, mostraremos os espaços em que as funções do problema estão contidas e explicitaremos o domínio do operador do problema usando a teoria de semigrupos de operadores lineares.
3. No Capítulo 4, provamos a existência e unicidade de solução para o modelo usando a teoria de semigrupos de operadores lineares.
4. No Capítulo 5, provamos a perda de decaimento exponencial do modelo, usando o teorema de Geahart-Huang-Pruss.

# Capítulo 2

## Energia do modelo de Timoshenko

Neste capítulo consideramos o modelo de Timoshenko com um amortecimento na primeira equação. Aqui nosso objetivo é mostra a energia do problema usando técnicas multiplicativas.

### 2.1 Modelo de Timoshenko com amortecimento na primeira equação

Consideremos o sistema de Timoshenko abaixo

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \gamma \varphi_t = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T) \quad (2.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, T) \quad (2.2)$$

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = 0, \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \forall t \geq 0, \quad (2.3)$$

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1, \forall x \in (0, L), \quad (2.4)$$

onde vimos que  $\rho_1, \rho_2, b, \kappa$  são constantes positivas e  $\gamma > 0$  é o coeficiente de amortecimento. Para encontrarmos a energia do sistema (2.1)–(2.2), provaremos a seguinte proposição abaixo:

**Proposição 2.1.1** *A energia total do sistema (2.1)–(2.2) é dada por*

$$E(t) := \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx, \quad (2.5)$$

e satisfaz a lei de dissipação

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\gamma \int_0^L |\varphi_t|^2 dx, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.6)$$

**Prova:** Primeiramente usaremos o método multiplicativo para encontrar a energia. Tal método consiste em multiplicarmos as equações por um termo específico, afim de encontrarmos uma expressão que nos mostre detalhes sobre a energia mecânica do sistema. Multiplicando a equação (2.1) por  $\varphi_t$  e integrando por partes em  $(0,L)$ , temos que:

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_t dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \varphi_t dx + \gamma \int_0^L |\varphi_t|^2 dx = 0. \quad (2.7)$$

Pelas condições de contorno, temos que  $\kappa(\varphi_x + \psi)\varphi_t$ , que varia de 0 a  $L$ , é igual a 0. Logo resulta em

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_t dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_{xt} dx + \gamma \int_0^L |\varphi_t|^2 dx = 0. \quad (2.8)$$

Usando a identidade

$$\varphi_{tt} \varphi_t = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varphi_t|^2 \quad (2.9)$$

em (2.8), temos que:

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_{xt} dx + \gamma \int_0^L |\varphi_t|^2 dx = 0. \quad (2.10)$$

De forma análoga, multiplicamos a equação (2.2) por  $\psi_t$  e integramos por partes em  $(0,L)$ :

$$\rho_2 \int_0^L \psi_{tt} \psi_t dx - b \int_0^L \psi_{xx} \psi_t dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = 0. \quad (2.11)$$

Usando uma identidade análoga a (2.8) em (2.11), segue que:

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + b \int_0^L \psi_x \psi_{xt} dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = 0. \quad (2.12)$$

O termo  $b\psi_x \psi_t$ , que varia de 0 a  $L$ , some da expressão acima, devido as condições de contorno. Usando mais uma vez uma identidade semelhante a (2.8) em (2.12), temos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = 0. \quad (2.13)$$

Somando as expressões (2.10) e (2.13), segue que:

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_{xt} dx + \gamma \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \quad (2.14)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = 0. \quad (2.15)$$

Organizando os termos semelhantes, resulta em:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[ \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx \right] + \\ & \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_{xt} dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \gamma \int_0^L |\varphi_t|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Note que, na expressão acima:

$$\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_{xt} dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) (\varphi_{xt} + \psi_t) dx \quad (2.17)$$

$$\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_{xt} dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) (\varphi_x + \psi)_t dx. \quad (2.18)$$

Usando uma identidade semelhante a (2.8) em (2.18), segue que:

$$\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_{xt} dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = \frac{d}{dt} \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx. \quad (2.19)$$

Assim, substituindo a igualdade (2.19) em (2.16) e organizando esta expressão temos:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \right] + \quad (2.20)$$

$$\gamma \int_0^L |\varphi_t|^2 dx = 0. \quad (2.21)$$

Definindo a energia da forma

$$E(t) := \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx, \quad (2.22)$$

temos em (2.16) que:

$$\frac{d}{dt} E(t) + \gamma \int_0^L |\varphi_t|^2 dx = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\gamma \int_0^L |\varphi_t|^2 dx = 0, \forall t \geq 0, \quad (2.24)$$

o que prova a Proposição 2.1.1. ■

# Capítulo 3

## Espaços e domínio do operador

Neste capítulo iremos mostrar os espaços em que estão contidas as funções do modelo de Timoshenko, além de mostrarmos o domínio do operador do modelo. Tal atividade requer ferramentas avançadas de matemática, chamado de semigrupo de operadores lineares [Pazy, 1983].

### 3.1 Espaço de fase e espaço das funções

A energia total do modelo de Timoshenko, dada em (5.16), nos motiva a definirmos o espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_*^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L), \quad (3.1)$$

baseado no vetor solução

$$U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)^T. \quad (3.2)$$

Por outro lado, temos que:

i)  $\|\varphi_x + \psi\|_{L^2} < \infty$ ;

ii)  $\|\psi\|_{L^2} < \infty$ ,

o que nos afirma que a norma das funções  $\varphi$  (sua derivada em  $x$ ) e  $\psi$  são limitadas, dentro do espaço  $L^2$ .

Note que

$$\|\varphi_x\|_{L^2} = \|(\varphi_x + \psi) - \psi\|_{L^2} \leq \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2}. \quad (3.3)$$

Observe também que

$$\|\varphi_x\|_{L^2} < \infty \Rightarrow \|\varphi\|_{L^2} \leq c \|\varphi_x\|_{L^2} < \infty, \quad (3.4)$$

com  $c > 0$ . Com base nos itens i) e ii), podemos obter as seguintes informações sobre  $\varphi$ :

- i)  $\varphi \in L^2(0, L)$ ;
- ii)  $\varphi_x \in L^2(0, L)$ .

Devido as condições de contorno do tipo Neumann ( $\varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t)$ ), definimos os seguintes espaços

$$L_*^2(0, L) := \left\{ f : f \in L^2(0, L), \int_0^L f dx = 0 \right\} \quad (3.5)$$

$$H_*^1(0, L) := H^1(0, L) \cap L_*^2(0, L). \quad (3.6)$$

Note que  $\varphi \in L_*^2(0, L) \subset L^2(0, L)$ .

## 3.2 Domínio do operador

Consideremos o operador

$$A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad (3.7)$$

com

$$\mathcal{H} = H_*^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L_*^2(0, L). \quad (3.8)$$

Tomando  $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)^T \in D(A)$ , temos que, na forma matricial:

$$AU := \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \frac{\kappa}{\rho_1} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x} - \frac{\gamma}{\rho_1} \varphi_t \\ \psi_t \\ -\frac{b}{\rho_2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x} - \frac{\kappa}{\rho_2} (\varphi_x + \psi) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Note que:

- i)  $\varphi_t \in H_*^1(0, L) \subset L^2(0, L)$ ;
- ii)  $\frac{\kappa}{\rho_1} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x} - \frac{\gamma}{\rho_1} \varphi_t \in L^2(0, L)$ ;
- iii)  $\psi_t \in H_0^1(0, L) \subset L^2(0, L)$ ;
- iv)  $-\frac{b}{\rho_2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x} - \frac{\kappa}{\rho_2} (\varphi_x + \psi) \in L_*^2(0, L) \subset L^2(0, L)$ .

Então podemos considerar o seguinte domínio para o operador  $A$ , tomando (3.6) e as

informações acima:

$$D(A) = H^1(0, L) \cap L_*^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times H^2(0, L) \times H_0^1(0, L). \quad (3.10)$$

Estamos interessados em encontrar mais informações sobre os espaços em que estão contidos as funções do problema. Para isso, façamos as seguintes observações:

a) De *i*), temos que  $\frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\gamma}{\rho_2}\varphi_t \in L^2$ . Logo podemos afirmar que a norma

$$\left\| \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\gamma}{\rho_1}\varphi_t \right\| < \infty \quad (3.11)$$

$$\left\| \frac{\gamma}{\rho_1}\varphi_t \right\| < \infty. \quad (3.12)$$

Por outro lado, temos que:

$$\frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x = \left[ \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\gamma}{\rho_1}\varphi_t \right] + \frac{\gamma}{\rho_1}\varphi_t. \quad (3.13)$$

Passando a norma em ambos os membros, e usando a desigualdade triangular, segue que

$$\left\| \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \right\|_{L^2} \leq \left\| \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\gamma}{\rho_1}\varphi_t \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\gamma}{\rho_1}\varphi_t \right\|_{L^2}. \quad (3.14)$$

Logo podemos concluir que

$$\left\| \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \right\|_{L^2} < \infty, \quad (3.15)$$

e assim,  $\frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \in L^2(0, L)$ .

b) De forma análoga ao item (3.14), temos que;

$$\left\| \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi) \right\|_{L^2} \leq c \left\| \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \right\|_{L^2} < \infty, \quad (3.16)$$

com  $c > 0$ . Logo,

$$\left\| \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi) \right\|_{L^2} < \infty, \quad (3.17)$$

e assim,  $\frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi) \in L^2(0, L)$ .

Daí, concluímos que  $\varphi_x + \psi \in L^2(0, L)$ ,  $(\varphi_x + \psi)_x \in L^2(0, L)$ , o que leva a relação  $\varphi_x + \psi \in H^1(0, L)$ .

c) De *iv*), temos que  $-\frac{b}{\rho_2}\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) \in L_*^2(0, L) \subset L^2(0, L)$ .

Pelo fato de haver esta inclusão, podemos afirmar que:

$$\left\| -\frac{b}{\rho_2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} - \frac{\kappa}{\rho_2} (\varphi_x + \psi) \right\|_{L^2} < \infty. \quad (3.18)$$

Assim, de forma análoga aos itens (3.15), (3.17) e (3.18), temos que:

$$\left\| -\frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} \right\|_{L^2} < \infty. \quad (3.19)$$

Daí concluímos que  $\psi_{xx}$ ,  $\psi_x$  e  $\psi \in L^2(0, L)$ , o que leva a relação  $\psi \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ .

Portanto o domínio do operador será

$$D(A) = \{U \in \mathcal{H}; \varphi, \psi \in H^2(0, L), \psi_t \in H_0^1, \varphi_t \in H_*^1, \varphi_x \in H_0^1\}. \quad (3.20)$$

# Capítulo 4

## Solução do modelo de Timoshenko

Neste item usaremos a abordagem de semigrupos [Pazy, 1983] para o modelo e mostraremos a existência e unicidade de solução para o sistema de Timoshenko. Para isso, devemos proceder da seguinte maneira:

- a) Enquadrar o modelo nos conceitos de produto interno e utilizar o Teorema de Lumer-Phillips, afim de explicitar algumas características do problema, e mostrar que o operador  $A$  é um gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupos de contrações;
- b) Ajustar o modelo em uma forma bilinear, afim de utilizar o Teorema de Lax-Milgram, que provará a existência e unicidade da solução para o modelo.

### 4.1 $A$ é um gerador infinitesimal

Consideremos o operador

$$A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}. \quad (4.1)$$

Provaremos que  $A$  é um gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupos de contrações usando o seguinte teorema:

**Teorema 4.1.1 (Lumer-Phillips)** *Seja o operador  $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  um gerador infinitesimal de  $C_0$ -semigrupo  $S(t)$  de contração sobre  $\mathcal{H}$ . Logo podemos afirmar que:*

- i)  $A$  é dissipativo;*
- ii)  $0 \in \rho(A)$ .*

**Prova:** Provaremos que  $A$  é dissipativo. De fato, dado  $U \in D(A)$ , temos que, seguindo a lei de dissipação,

$$\langle AU, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq \gamma_1 \int_0^L |\varphi_1|^2 dx \quad (4.2)$$

$$\langle AU, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma_1 \int_0^L |\varphi_1|^2 dx \leq 0, \quad (4.3)$$

logo  $A$  é dissipativo. Agora mostraremos que  $0 \in \rho(A)$ . Dado  $\lambda \in \rho(A)$ , escrevemos o seguinte produto:

$$(\lambda I - A)U = F, \quad (4.4)$$

onde  $U = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)^T$  e  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$  é um espaço de funções teste, com  $U \in D(A)$ .

Fazendo o produto  $-AU = F$  e resolvendo o sistema formado, encontramos as seguintes igualdades:

$$-\kappa(\varphi_{0x} + \psi_0)_x = \gamma f_1 + \rho_1 f_2, \quad (4.5)$$

$$\kappa(\varphi_{0x} + \psi_0) - b\psi_{0xx} = \rho_2 f_4. \quad (4.6)$$

As igualdades acima nos motiva a buscarmos outras ferramentas matemáticas para enquadrar o problema nas condições do teorema de Lax-Milgram, afim de encontrarmos solução para o mesmo. É o que veremos a seguir.

## 4.2 Formulação variacional do problema

A formulação variacional do modelo de Timoshenko nos mostra o comportamento das funções  $\varphi$  e  $\psi$  dentro do vetor solução  $U$ , além de ser uma ferramenta especial para encontrarmos a solução do modelo de Timoshenko. Encontraremos agora a formulação variacional do problema.

Primeiramente consideremos o espaço

$$\mathcal{D}(0, L) = \{v \in C^\infty(0, L); v(0) = 0 = v(L).\} \quad (4.7)$$

Multiplicamos a igualdade (4.5) por  $\varphi'_0 \in \mathcal{D}(0, L)$  e integramos por partes em  $(0, L)$ .

$$-\kappa \int_0^L (\varphi_{0x} + \psi_0)_x \varphi'_0 dx = \int_0^L (\gamma f_1 + \rho_1 f_2) \varphi'_0 dx. \quad (4.8)$$

Devido as condições de contorno do problema, o termo  $-\kappa(\varphi_{0x} + \psi_0)\varphi'_0$ , que varia de 0 a  $L$ , é zero. Assim temos:

$$\kappa \int_0^L (\varphi_{0x} + \psi_0) \varphi'_0 dx = \int_0^L (\gamma f_1 + \rho_1 f_2) \varphi'_0 dx. \quad (4.9)$$

De forma análoga, multiplicamos a equação (4.6) por  $\psi'_0 \in \mathcal{D}(0,L)$  e integramos por partes em  $(0,L)$ .

$$\kappa \int_0^L (\varphi_{0x} + \psi_0) \psi'_0 dx - b \int_0^L \psi_{0xx} \psi'_0 = \rho_2 \int_0^L f_4 \psi'_0 dx. \quad (4.10)$$

O termo  $-b\psi_{0xx}\psi'_0$ , que varia de 0 a L, tende a zero pelas condições de contorno. Assim, expressão acima, resulta que:

$$\kappa \int_0^L (\varphi_{0x} + \psi_0) \psi'_0 dx + b \int_0^L \psi_{0x} \psi'_{0x} = \rho_2 \int_0^L f_4 \psi'_0 dx. \quad (4.11)$$

Somando as expressões (4.9) e (4.11), temos que:

$$\kappa \int_0^L (\varphi_{0x} + \psi_0) (\varphi'_{0x} \psi'_0) dx + b \int_0^L \psi_{0x} \psi'_{0x} dx = \gamma \int_0^L f_1 \varphi'_0 dx + \rho_1 \int_0^L f_2 \varphi'_0 dx + \rho_2 \int_0^L f_4 \psi'_0 dx.$$

Agora definimos a forma

$$a((\varphi_0, \psi_0), (\varphi'_0 \psi'_0)) := \kappa \int_0^L (\varphi_{0x} + \psi_0) (\varphi'_{0x} \psi'_0) dx + b \int_0^L \psi_{0x} \psi'_{0x} dx. \quad (4.12)$$

$$a((\varphi_0, \psi_0), (\varphi'_0 \psi'_0)) = \int_0^L (\gamma f_1 + \rho_1 f_2) \varphi'_0 dx + \rho_2 \int_0^L f_4 \psi'_0 dx. \quad (4.13)$$

Definindo as seguintes expressões abaixo,

$$U := (\varphi_0, \psi_0), \quad (4.14)$$

$$U' := (\varphi'_0, \psi'_0), \quad (4.15)$$

$$g_1 := (\gamma f_1 + \rho_1 f_2) \quad (4.16)$$

e

$$g_2 := \rho_2 f_4, \quad (4.17)$$

temos que, na expressão (4.13):

$$a(U, U') = \int_0^L g_1 \varphi'_0 dx + \rho_2 \int_0^L g_2 \psi'_0 dx. \quad (4.18)$$

Logo podemos escrever o seguinte produto interno:

$$a(U, U') = \langle (g_1, g_2), (\varphi'_0, \psi'_0) \rangle_{L^2}, \quad (4.19)$$

com  $(\varphi'_0, \psi'_0) \in \mathcal{D}(0, L) \times \mathcal{D}(0, L)$ . Como  $\mathcal{D}(0, L) \times \mathcal{D}(0, L) \supset H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ , podemos escrever a seguinte formulação variacional

$$a(U, U') = \langle G, U' \rangle, \quad (4.20)$$

com  $U' \in H_0^1(0, L)$  e  $G := (g_1, g_2)$ .

### 4.3 Existência e unicidade de solução

Note que chegamos a um resultado semelhante a uma forma bilinear. Iremos verificar se essa hipótese é verdadeira. Primeiramente iremos Mas para isso, usaremos o seguinte teorema para provarmos que existe uma única solução para o sistema.

**Teorema 4.3.1 (Lax-Milgram)** *Seja  $a(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear, contínua e coerciva sobre o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  e  $G$  uma forma linear contínua em  $\mathcal{H}$ . Então o problema variacional  $a(U, U') = \langle G, U' \rangle, \forall U' \in \mathcal{H}$ , possui uma única solução.*

**Prova:** Primeiramente provaremos que  $a(\cdot, \cdot)$  é uma forma bilinear. De fato, tomando  $U = (U_0, U_1)$  e  $V = (V_0, V_1)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , temos que provar que:

$$a(U + \alpha V, U') = a(U, U') + \alpha a(V, U'), \quad (4.21)$$

e escrever a forma

$$a((U_0 + \alpha V_0, U_1 + \alpha V_1), (\varphi'_0, \psi'_0)). \quad (4.22)$$

Note que, tomando (4.22) na expressão (4.18), temos que:

$$a(U + \alpha V, U') = b \int_0^L (U_{1x} + \alpha V_{1x}) \psi'_{0x} dx + \kappa \int_0^L (U_{0x} + \alpha V_{0x} + U_1 + \alpha V_1) (\varphi'_{0x} + \psi'_0) dx. \quad (4.23)$$

$$a(U + \alpha V, U') = b \int_0^L U_{1x} \psi'_{0x} dx + \kappa \int_0^L (U_{0x} + U_1) (\varphi'_{0x} + \psi'_0) dx +$$

$$\alpha b \int_0^L V_{1x} \psi'_{0x} dx + \alpha \kappa \int_0^L (V_{0x} + V_1) (\varphi'_{0x} + \psi'_0) dx. \quad (4.24)$$

### 4.3. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA SOLUÇÃO DO MODELO DE TIMOSHENKO

Assim, podemos escrever a forma

$$a(U + \alpha V, U') = a(U, U') + \alpha a(V, U'), \quad (4.25)$$

o que prova a propriedade (4.21). Além disso,  $a(\cdot, \cdot)$  é simétrica, pois:

$$a(U, U') = a(U', U), \quad (4.26)$$

logo  $a(\cdot, \cdot)$  é bilinear.

Agora provaremos que  $a(\cdot, \cdot)$  é contínua. De fato, tomando a forma  $a(U, U')$  em (5.56), temos que:

$$a(U, U') = b \int_0^L \psi_{0x} \psi'_{0x} dx + \kappa \int_0^L (\varphi_{0x} + \psi_0)(\varphi'_{0x} + \psi'_0) dx. \quad (4.27)$$

Aplicando o módulo em (4.27), temos a seguinte expressão, em termos de norma:

$$|a(U, U')| \leq b \|\psi_{0x}\|_{L^2} \cdot \|\psi'_{0x}\|_{L^2} + \kappa \|\varphi_{0x} + \psi_0\|_{L^2} \cdot \|(\varphi'_{0x} + \psi'_0)\|_{L^2} \quad (4.28)$$

$$|a(U, U')| \leq b^{\frac{1}{2}} \|\psi_{0x}\|_{L^2} \cdot b^{\frac{1}{2}} \|\psi'_{0x}\|_{L^2} + \kappa^{\frac{1}{2}} \|\varphi_{0x} + \psi_0\|_{L^2} \cdot \kappa^{\frac{1}{2}} \|(\varphi'_{0x} + \psi'_0)\|_{L^2} \quad (4.29)$$

$$|a(U, U')| \leq (b \|\psi_{0x}\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (b \|\psi'_{0x}\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} + \kappa \|\varphi_{0x} + \psi_0\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \cdot (\kappa \|\varphi'_{0x} + \psi'_0\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.30)$$

$$|a(U, U')| \leq (b \|\psi_{0x}\|_{L^2}^2 + \kappa \|\varphi_{0x} + \psi_0\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (b \|\psi'_{0x}\|_{L^2}^2 + \kappa \|\varphi'_{0x} + \psi'_0\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.31)$$

Definimos a norma  $\|\cdot\|_E$  por

$$\|U\|_E^2 := b \|\psi_{0x}\|_{L^2}^2 + \kappa \|\varphi_{0x} + \psi_0\|_{L^2}^2, \quad (4.32)$$

onde  $U = (\varphi_0, \psi_0)$ .

Substituindo (4.32) em (4.31), temos:

$$|a(U, U')| \leq \|U\|_E \cdot \|U'\|_E. \quad (4.33)$$

Usando a equivalência de normas

$$k_1 \|U\|_{H^1} \leq \|U\|_E \leq k_2 \|U'\|_{H^1}, \quad (4.34)$$

### 4.3. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA SOLUÇÃO DO MODELO DE TIMOSHENKO

temos:

$$|a(U, U')| \leq k_2 \|U\|_{H^1} \cdot k'_2 \|U'\|_{H^1} \quad (4.35)$$

$$|a(U, U')| \leq c \|U\|_{H^1} \cdot \|U'\|_{H^1}, \quad (4.36)$$

onde  $c = k_2 \cdot k'_2$ .

Portanto  $a(\cdot, \cdot)$  é contínua.

Agora mostraremos que  $a(\cdot, \cdot)$  é coerciva. De fato, tomando  $U = U'$ , temos:

$$a(U, U') = b \int_0^L |\psi_{0x}|^2 dx + \kappa \int_0^L |\varphi_{0x} + \psi_0|^2 dx. \quad (4.37)$$

$$a(U, U') = \|U\|_E^2 \geq k_1^2 \|U\|_{H^1}^2 \quad (4.38)$$

$$a(U, U') \geq k_1^2 \|U\|_{H^1}^2. \quad (4.39)$$

Portanto  $a(\cdot, \cdot)$  é coerciva.

Logo, pelo Teorema de Lax-Milgram, garantimos a existência e unicidade de solução para o sistema, e conseqüentemente, para o modelo de Timoshenko. Com isso, provamos também o Teorema de Lumer-Phillips. ■

# Capítulo 5

## Perda de decaimento

Este capítulo é dedicado à prova do Teorema de Geahart-Huang-Pruss, que nos mostra a perda de decaimento para o modelo de Timoshenko.

Mostraremos que o modelo de Timoshenko sofre uma perda de decaimento, quando ocorre a relação

$$\frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} \neq 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\kappa}{\rho_1} \neq \frac{b}{\rho_2} \quad (5.2)$$

$$\kappa\rho_2 \neq b\rho_1 \quad (5.3)$$

$$\kappa\rho_2 - b\rho_1 \neq 0, \quad (5.4)$$

isto é, quando as velocidades de propagação de ondas que agem no sistema forem distintas, conforme foi observado por SOUFYANE, . Para encontrarmos esse resultado, teremos que provar o seguinte teorema:

**Teorema 5.0.1 (Geahart-Huang-Pruss)** *Seja  $S(t) = e^{At}$  um  $C_0$ -semigrupo de contração sobre o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Então  $S(t)$  é exponencialmente estável se, e somente se,*

i)  $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ ;

ii)  $\limsup \|i\lambda I - A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1} < \infty$ .

**Prova:** Usaremos a forma contrapositiva do teorema de Geahart-Huang-Pruss. De fato, se

i)  $i\mathbb{R} \not\subset \rho(A)$ ;

ii)  $\limsup \|i\lambda I - A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1} \geq \infty$ , isso implica que  $S(t) = e^{At}$  não será exponencialmente estável.

Provaremos i). Se  $i\mathbb{R} \not\subset \rho(A)$ , então  $i\mathbb{R} \subset \sigma(A)$ . Primeiramente, consideremos a forma de Cauchy

$$U_t = AU \quad (5.5)$$

$$U(0) = U_0. \quad (5.6)$$

O problema de auto valor associado a forma de Cauchy é dado por

$$AU = \lambda_n U, \lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, \quad (5.7)$$

onde  $\lambda_n$  é o autovalor e  $U \neq 0$  é o autovetor.

O conjunto  $\sigma(A)$  dado por

$$\sigma(A) = \{\lambda_n \in \mathbb{C}; (\lambda_n I - A)U = 0\}, \quad (5.8)$$

é denotado conjunto espectro de A. Por outro lado, o conjunto

$$\rho(A) = \{\lambda_n \in \mathbb{C}; (\lambda_n I - A)U \neq 0 = F\}, \quad (5.9)$$

é denotado conjunto resolvente de A.

Supondo que  $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ , temos que no problema de autovalor,

$$(i\lambda_n I - A)U = F. \quad (5.10)$$

Multiplicando (5.10) com  $(\lambda_n I - A)^{-1}$ , temos que:

$$\frac{(i\lambda_n I - A)U}{(i\lambda_n I - A)} = \frac{F}{(i\lambda_n I - A)} \quad (5.11)$$

$$U = (i\lambda_n I - A)^{-1}F. \quad (5.12)$$

Como  $U = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in D(A) \subset \mathcal{H}$  e  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \subset \mathcal{H}$ , podemos afirmar que

$$F \in \mathcal{H} \Rightarrow \|F\|_{\mathcal{H}} < \infty, \quad (5.13)$$

e

$$\|U\|_{\mathcal{H}} < \infty \Rightarrow \|(i\lambda_n I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty. \quad (5.14)$$

Aplicando o produto  $i\lambda_n I$  ao problema de Cauchy e colocando na forma de sistema, temos que:

$$i\lambda_n \varphi_0 - \varphi_1 = f_1 \quad (5.15)$$

$$-\frac{\kappa}{\rho_1} \varphi_{0xx} + i\lambda_n \varphi_1 + \frac{\gamma}{\rho_1} \varphi_1 - \frac{\kappa}{\rho_1} \psi_{0x} = f_2 \quad (5.16)$$

$$i\lambda_n \psi_0 - \psi_1 = f_3 \quad (5.17)$$

$$\frac{\kappa}{\rho_2} \varphi_{0x} - \frac{b}{\rho_2} \psi_{0xx} + \frac{\kappa}{\rho_2} \psi_0 + i\lambda_n \psi_1 = f_4. \quad (5.18)$$

Tomando  $f_1 = f_3 = 0$  e substituindo no sistema acima, temos que:

$$-\frac{\kappa}{\rho_1} (\varphi_{0x} + \psi_0)_x - \lambda_n^2 \varphi_0 + i\lambda_n \frac{\gamma}{\rho_1} \varphi_0 = f_2 \quad (5.19)$$

$$\frac{\kappa}{\rho_2} (\varphi_{0x} + \psi_0) - \frac{b}{\rho_2} \psi_{0xx} - \lambda_n^2 \psi_0 = f_4. \quad (5.20)$$

Observando as condições de contorno e o domínio do operador  $D(A) \subset \mathcal{H}$ , escolhemos duas funções  $\varphi_0(x)$  e  $\psi_0(x)$  da forma

$$\varphi_0(x) = A \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (5.21)$$

e

$$\psi_0(x) = B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (5.22)$$

Substituindo essas funções e suas derivadas na expressão (5.19), e fazendo os cálculos temos:

$$A \left[ \frac{\kappa}{\rho_1} \left(\frac{n\pi}{L}\right) - \lambda_n^2 + i\lambda_n \frac{\gamma}{\rho_1} \right] - \frac{\kappa}{\rho_1} B \left(\frac{n\pi}{L}\right) = 1. \quad (5.23)$$

De forma análoga, substituímos as funções e suas derivadas na expressão (5.20). Fazendo os cálculos temos o seguinte resultado:

$$B \left[ \frac{\kappa}{\rho_2} + \frac{b}{\rho_2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \lambda_n^2 \right] - \frac{\kappa}{\rho_2} A \left(\frac{n\pi}{L}\right) = 1. \quad (5.24)$$

Definindo  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  da forma

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{b}{\rho_2}} \left( \frac{n\pi}{L} \right), \forall n \in \mathbb{N}, \quad (5.25)$$

e substituindo na expressão (5.23) e (5.24), encontramos os seguintes resultados:

$$A = \frac{\rho_2 \left( \rho_1 + \frac{n\pi}{L} \rho_2 \right)}{\frac{n\pi}{L} \left( -\frac{n\pi}{L} b \rho_1 + i\gamma \sqrt{\frac{b}{\rho_2}} \rho_2 \right)} \quad (5.26)$$

$$B = \frac{\rho_2 \left( \kappa \rho_1 + \frac{n\pi}{L} \kappa \rho_2 - \frac{n\pi}{L} b \rho_1 + i\gamma \sqrt{\frac{b}{\rho_2}} \rho_2 \right)}{\kappa \left( -\frac{n\pi}{L} b \rho_1 + i\gamma \sqrt{\frac{b}{\rho_2}} \rho_2 \right)} \quad (5.27)$$

Aplicando o limite em (5.26) e (5.27) com  $n \rightarrow \infty$ , temos que:

$$A = 0 \quad (5.28)$$

$$B = \frac{\rho_2 b \rho_1 - \kappa \rho_2}{\kappa \rho_1 b}. \quad (5.29)$$

Note na expressão (5.29) temos a relação de velocidades, conforme foi observado por [SOUFYANE, ] e evidenciado em (5.4). Considerando  $B \neq 0$  e a norma do vetor solução da forma

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \rho_2 \int_0^L |\psi'_n|^2 dx, \quad (5.30)$$

podemos considerar a seguinte igualdade:

$$\rho_2 \int_0^L |\psi'_n|^2 dx = \rho_2 \int_0^L \left| \lambda_n B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right|^2 dx. \quad (5.31)$$

Aplicando o limite em (5.30) e (5.31) com  $n \rightarrow \infty$  e considerando

$$\chi := \frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} \neq 0, \quad (5.32)$$

temos que:

$$\lim \|U_n\|_{\mathcal{H}^2} \geq \lim \rho_2 \|\psi'_n\|'_{L^2} = \infty, \quad (5.33)$$

o que implica em

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty. \quad (5.34)$$

Logo temos um exemplo que prova o item ii) da contra-positiva do Teorema de Geahart-Pruss, o que mostra que  $S(t)$  não é exponencialmente estável, desde que

$$\chi := \frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} \neq 0, \quad (5.35)$$

isto é,  $\kappa\rho_2 - b\rho_1 \neq 0$ . ■

## Capítulo 6

### Considerações finais

Neste trabalho estudamos algumas propriedades quantitativas e qualitativas do modelo de vigas de Timoshenko. Os principais resultados obtidos neste trabalho são: a energia total, a existência e unicidade de solução para o mesmo e a perda de decaimento exponencial do sistema, mediante algumas condições a serem observadas. A energia foi encontrada utilizando o método multiplicativo, a busca pela solução do problema foi realizada pelos conceitos de semigrupos de operadores lineares e a perda de decaimento só foi esclarecida mediante a prova do Teorema de Geahart-Pruss e a análise feita por [SOUFYANE, ] sobre as velocidades de propagação de ondas que age no sistema . O próximo passo seria encontrar a estabilidade do modelo e provar o decaimento polinomial para o mesmo, além de utilizar os conceitos vistos aqui para estudarmos outros sistemas.

# Referências

- [ALMEIDA JR. and SANTOS, 2012] ALMEIDA JR., D. S., R. J. E. M. and SANTOS, M. L. (2012). Stability to weakly dissipative Timoshenko systems. **Mathematical Method in the Applied Sciences**, 1(1).
- [Haraux, 1989] Haraux, A. (1989). Une remarque sur la stabilisation de certains systemes du deuxieme ordre en temps. *Portugaliae mathematica*, 46(3):245–258.
- [Pazy, 1983] Pazy, A. (1983). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer New York.
- [SOUFYANE, ] SOUFYANE, A. Stabilisation de la poutre de Timoshenko.