UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

CLEISON DA SILVA VILHENA

RESOLUÇÃO DE LIMITES DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM AUXÍLIO COMPUTACIONAL

ABAETETUBA-Pará
2022

CLEISON DA SILVA VILHENA

RESOLUÇÃO DE LIMITES DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM AUXÍLIO COMPUTACIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus Universitário de Abaetetuba, Universidade Federal do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa

ABAETETUBA-Pará

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará

Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V711r Vilhena, Cleison da Silva.
Resolução de limites de funções trigonométricas com auxílio computacional / Cleison da Silva Vilhena. — 2022.
xxvii, 27 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de Matemática, Abaetetuba, 2022.

1. Limites. Trigonométricos. Computacional.. I. Título.

CDD 515.16

CLEISON DA SILVA VILHENA

RESOLUÇÃO DE LIMITES DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM AUXÍLIO COMPUTACIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso orientado pelo Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa, apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção de grau de licenciado em Matemática.

Aprovado em: 11 / 07 / 2022 .

BANCA EXAMINADORA

Manuel de Jesus dos S. Costa.

Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa
Orientador– FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA

Rômulo Correa Lima

Prof. Dr. Rômulo Correa Lima
Membro – FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA

José Francisco da S. Costa

Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa
Membro – FADECAM/Campus de Abaetetuba/UFPA

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a **Deus** pelo dom da vida e pela oportunidade de finalizar este trabalho foram dias de lutas mais na certeza que iria vencer esta caminhada, quero agradecer a minha mãe **Maria Ferreira Miranda** pela força, ao meu pai **Migue**l **da Silva Quaresma** pelo apoio e a minha avó **Antônia Ferreira Barbosa** pelo incentivo.

Agradeço ao meu orientador **Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa**, pelo imenso apoio e contribuição ao trabalho, proporcionando a realização de um sonho tão importante para mim.

A todos que me ajudaram diretamente e indiretamente nessa conquista.

RESOLUÇÃO DE LIMITES DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM AUXÍLIO COMPUTACIONAL

Autor: Cleison da Silva Vilhena
Orientador: Manuel de Jesus dos Santos Costa
Banca: Manuel de Jesus dos Santos Costa, Rômulo Correa Lima, José Francisco da Silva Costa

RESUMO

O presente trabalho abordou a resolução de limites envolvendo funções trigonométricas com auxílio computacional para comprovar e visualizar os resultados obtidos analiticamente. Nesse sentido, a referida abordagem, foi iniciada com uma contextualização do assunto com base em um breve relato da evolução histórica do cálculo diferencial e integral. Num segundo momento, foi apresentada a teoria que rege a definição de limites, limites laterais, teorema do confronto e o limite trigonométrico fundamental. Posteriormente, foram resolvidos quatro problemas de forma, intuitiva, algébrica e computacional, onde nesta última foi utilizado uma função intrínseca do programa wxMaxima vinculada a uma visualização geométrica.

Palavras-chave: Limites; Limites Trigonométricos; wxMaxima.

ABSTRACT

The present work approached the resolution of limits involving trigonometric functions with computational aid to prove and visualize the results obtained analytically. In this sense, this approach began with a contextualization of the subject based on a brief account of the historical evolution of differential and integral calculus. In a second moment, the theory that governs the definition of limits, lateral limits, confrontation theorem and the fundamental trigonometric limit was presented. Subsequently, four problems of form, intuitive, algebraic and computational were solved, where in the last one an intrinsic function of the program wxMaxima was used linked to a geometric visualization.

Keywords: Limits; Trigonometric Limits; wxMaxima.

1 – INTRODUÇÃO

O cálculo diferencial e integral passou por diversas modificações e contribuições ao longo do tempo, diversos matemáticos contribuíram para seu desenvolvimento, vários paradoxos e métodos intuitivos foram surgindo inicialmente na Grécia antiga do século V a.C. O século XVII foi produtivo no que se refere ao desenvolvimento da matemática, graças, ao leque de várias áreas de pesquisa que nela se abriram. Indubitavelmente, a realização mais notável nesse período foi a invenção do cálculo, perto do final do século, por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) (EVES, 2011).

Nesse sentido, entre as teorias matemáticas que compõe o cálculo quais sejam limite, derivada e integral. Infere-se que o limite é um fundamento matemático que compõe o cálculo diferencial e integral, onde os conceitos, teoremas e propriedades demandam intuitividade, definições, bem como análises, as quais nesta pesquisa serão abordadas a partir da interação entre os fundamentos teóricos, interpretações geométricas e estimativas numéricas. Vale salientar, que o limite abrange conceitos de vizinhança em relação a um ponto, do termo infinito, de limites de funções, por exemplo, exponenciais, trigonométricas e logarítmicas. Desta maneira, no presente trabalho será utilizado as fundamentações teóricas que regem os limites trigonométricos compondo estratégias de pesquisas voltadas para um entendimento teórico, geométrico e prático, onde este último será o utilizado o auxílio computacional. Destaca-se, que o programa a ser utilizado nas experimentações numéricas denomina-se wxMaxima (ver, Anexo A).

2- DEFINIÇÃO FORMAL DE LIMITE

Intuitivamente, diz-se que uma função $f(x)$ apresenta limite L quando x tende para a, se é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, em outras palavras, se x tende a a, $f(x)$ tende a L, desde que tomemos valores de x, com $x \neq a$ suficientemente próximos de a. Diante disso, segue a definição formal de limite (FLEMMING; GONÇALVES, 2006):

Definição: Seja $f(x)$ definida num intervalo aberto I, contendo a , exceto, possivelmente, o próprio a. Dizemos que limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de a é L, e escrevemos:

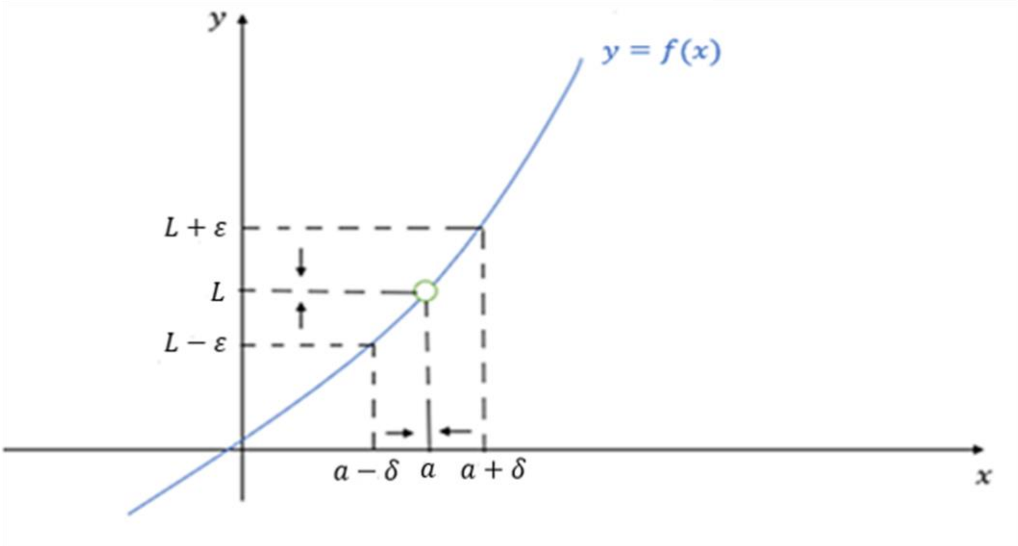
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{1}$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $| f(x) - L | < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

2.1 – Intepretação geométrica do limite

Suponha uma função $f(x)$ com os valores de x tendendo a, e $f(x)$ arbitrariamente próximo de L . Então quando x tende a, e se $f(x)$ aproxima de L, conclui-se que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ (ver Figura 1)

Figura 1 – Intepretação Geométrica do $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$



Fonte: Autoria Própria

3 – LIMITES LATERAIS

A fundamentação teórica referente aos limites laterais será baseada na referência Guidorizzi (2001).

Os limites laterais significam que os valores de x aproximam-se de a, tanto por valores maiores (à direita do a), quanto por valores menores (à esquerda do a) de uma vizinhança estipulada entorno do ponto a.

Diante disso, observar-se-á as definições a seguir:

3.1 - Limites Laterais à direita

Definição: Sejam a um número real, assim tem-se:

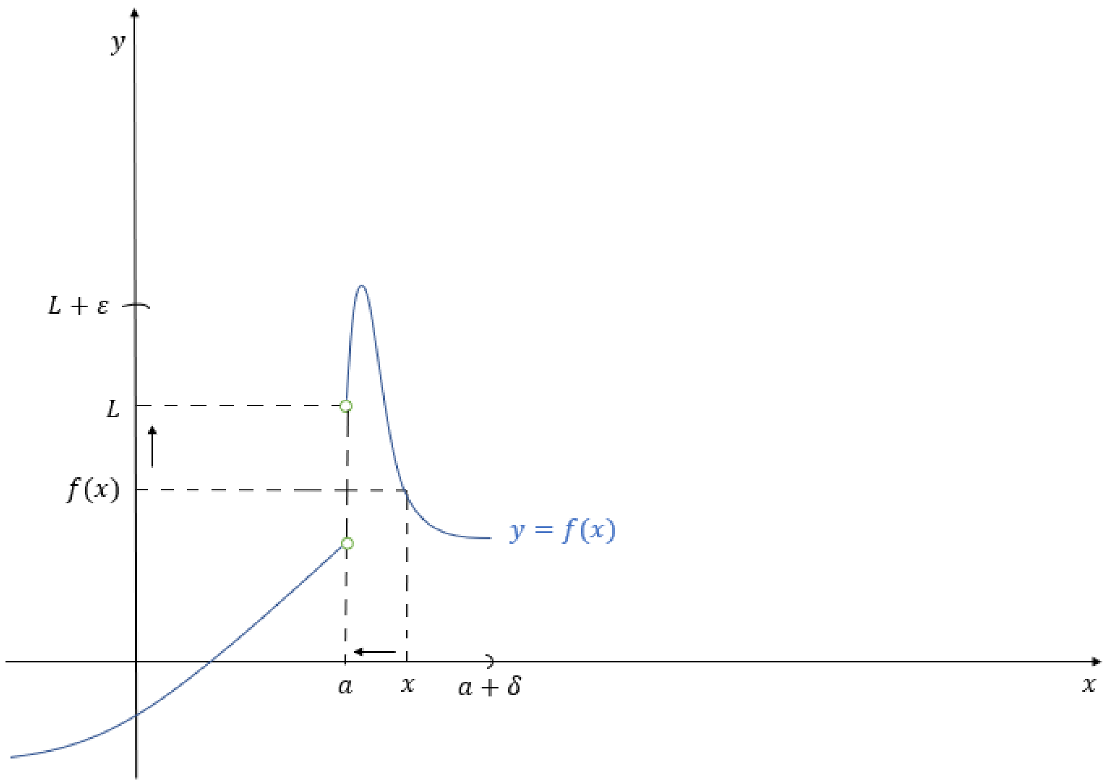
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \iff \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \varepsilon > 0, existe\ \delta > 0\ , tal\ que \\ a < x < a + \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon \end{array} \right\} \quad (2)$$

Observação: A simbologia $x \to a^+$, informa que x tende a a pela direita; o número L, quando existe, é denominado limite lateral à direita de $f(x)$, em a.

3.1.1- **Intepretação geométrica do limite à direita**

Quando os valores de x tende ao a , pela direita, os valores de $f(x)$ se aproximam de L. Daí conclui-se que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ (ver Figura 2).

Figura 2 – Intepretação geométrica do limite $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$



Fonte: Adaptado de GUIDORIZZI, 2001

3.2 - Limites Laterais à esquerda

Definição: Sejam a um número real, assim tem-se:

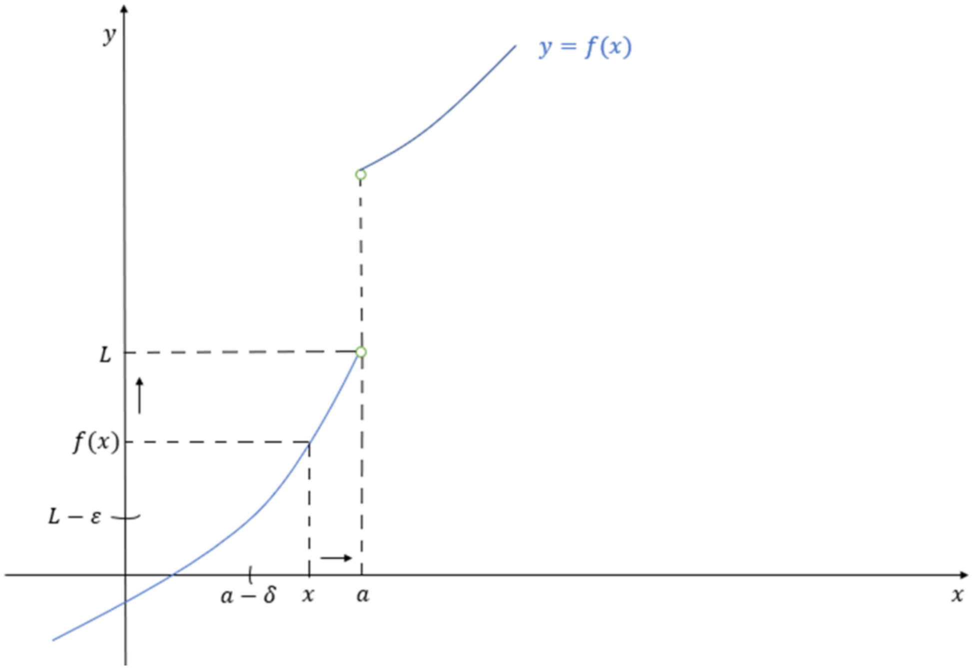
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \iff \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \varepsilon > 0, existe\ \delta > 0\ , tal\ que \\ a - \delta < x < a \to |f(x) - L| < \varepsilon \end{array} \right\} \tag{3}$$

Observação: A simbologia $x \to a^-$, informa que x tende a a pela esquerda; o número L, quando existe é denominado limite lateral à esquerda de $f(x)$, em a.

3.1.2- **Intepretação geométrica do limite à esquerda**

De maneira similar, quando os valores de x tende ao a, pela esquerda, os valores de $f(x)$ se aproximam de L. Portanto, conclui-se que $\lim_{x \to a-} f(x) = L$ (ver, Figura 3).

Figura 3 – Intepretação geométrica do limite $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$



Fonte: Adaptado de GUIDORIZZI, 2001

Em decorrência das definições 3.1 e 3.2, apresenta-se uma consequência imediata das mesmas através do Teorema 1.

3.1.1.2 - Teorema 1

Sejam I um intervalo aberto contendo a e seja $f(x)$ uma função definida para $x \in \mathrm{I} - \{a\}$. Temos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, existirem $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e forem ambos iguais, ou seja, $\lim_{x \to a^+} f(x) = L = \lim_{x \to a^-} f(x)$ (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2013).

No tópico a seguir, será abordado limites de funções trigonométricas, para tanto, será necessário apresentar um teorema importante do cálculo diferencial e integral denominado Teorema do Confronto (Teorema 2).

3.3- Teorema 2

Sejam $g(x)$, $f(x)$ e $h(x)$ três funções, neste sentido, suponhamos que exista $r > 0$, tal que:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \tag{4}$$

para $0 < |x - a| < r$. Nestas condições, se

$$\lim_{x \to a} g(x) = L = \lim_{x \to a} h(x) \tag{5}$$

então, (GUIDORIZZI, 2001):

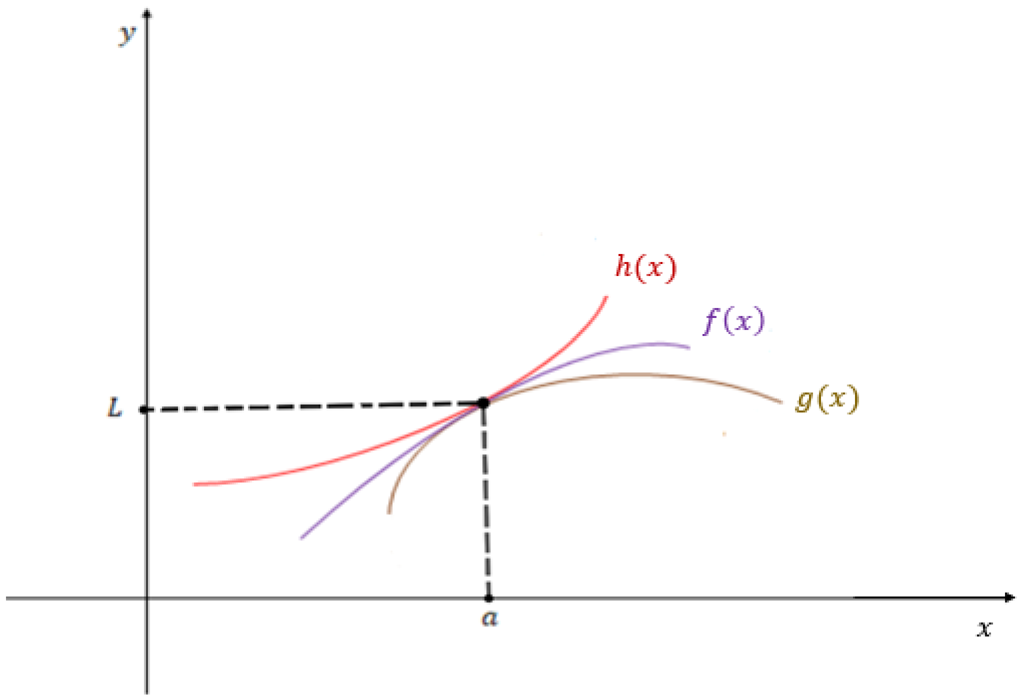
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{6}$$

Infere-se, portanto, que se duas funções apresentam o mesmo limite, imprescindivelmente a função que está entre elas terá o mesmo limite das demais. Para ratificar o que foi apresentado segue a abordagem geométrica do Teorema 2.

3.1.3- Interpretação geométrica do Teorema do Confronto

Considerando três funções hipotéticas $h(x),\ f(x)$ e $g(x)$, onde os $\lim_{x \to a} h(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$, se aproximam do valor L, tem-se $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, logo $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (ver, Figura 4).

Figura 4 – Intepretação Geométrica do Teorema do Confronto

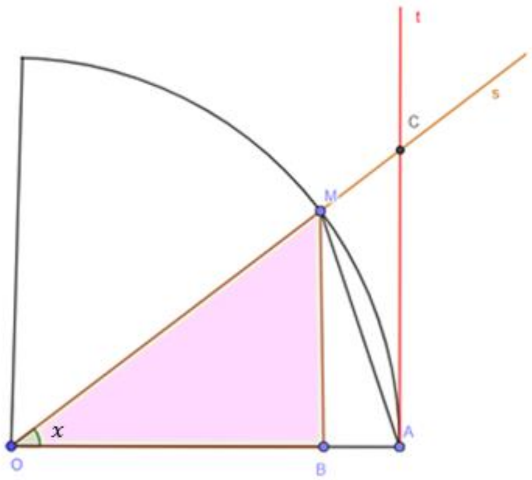


Fonte: Autoria Própria

4 - LIMITES DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Inicialmente civilizações como egípcia, babilônica, grega, árabe, chinesa e hindu impulsionados pela necessidade de resolver situações referentes a sua vida começaram a realizar estudos que são considerados os pilares da atual trigonometria (SOUZA, 2014). A trigonometria é uma abordagem matemática que define relações trigonométricas, a partir de um triângulo retângulo, podendo ser estendidas para um triângulo qualquer, contribuindo atualmente em diferentes áreas do conhecimento científico. No trabalho em questão, será abordado um limite chamado de limite trigonométrico fundamental, o qual é uma ferramenta auxiliar extremamente necessária para solucionar situações que envolvam limites de funções trigonométricas. Dito isso, para provarmos que o valor do limite fundamental trigonométrico é igual a 1, será utilizado uma geometria advinda do chamado ciclo trigonométrico unitário (ver Figura 5).

Figura 5 – Geometria esquemática utilizada para demonstrar o limite fundamental trigonométrico



Fonte: Autoria Própria

Os elementos que compõem a Figura (5), são:

- t é a reta tangente que passa ao círculo no ponto A.
- A reta s corta o eixo das tangentes no ponto C, formando o triângulo COA
- $\widehat{MOA}$ área do setor circular
- ΔMOA
- x é o ângulo central do ΔMOA, sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Vale destacar que a geometria apresentada na Figura (5), pode ser feita para qualquer quadrante.

Observando a Figura 5, constata-se que:

$$\text{A área do } \Delta MOA < \text{área do setor circular } \widehat{MAO} < \text{A área do } \Delta COA \tag{7}$$

Então:

$$\text{Área do } \Delta MOA = \frac{b.h}{2} = \frac{1}{2}.OA.MB = \frac{1}{2}.sen(x) = \frac{sen(x)}{2}$$

$$\text{Área do } \widehat{MOA} = \frac{1}{2}.OA.\widehat{AM} = \frac{1}{2}.1.x = \frac{x}{2}$$

$$\text{Área do } \Delta COA = \frac{1}{2}.OA.AC = \frac{1}{2}.1.tan(x) = \frac{tan(x)}{2}$$

Escrevendo (7) na estrutura de uma desigualdade, segue:

$$\frac{sen(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tg(x)}{2} \tag{8}$$

Simplificando (8), tem-se:

$$sen(x) < x < tg(x) \tag{9}$$

Como $tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$, reescreve-se (10):

$$sen(x) < x < \frac{sen(x)}{cos(x)} \tag{10}$$

Em seguida, multiplicando (10) por $\frac{1}{sen(x)}$, resulta:

$$1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{1}{cos(x)} \tag{11}$$

Nota-se que (11), determina a seguinte desigualdade:

$$cos(x) < \frac{sen(x)}{x} < 1 \tag{12}$$

Agora, aplicando o limite com $x \to 0^+$ em (13), obtém-se:

$$\lim_{x\to 0^+} cos(x) < \lim_{x\to 0^+} \frac{sen(x)}{x} < \lim_{x\to 0^+} 1 \tag{13}$$

ou ainda:

$$1 \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{sen(x)}{x} \leq 1 \tag{14}$$

Portanto, utilizando o **Teorema 2** em (14), define-se que (GUIDORIZZI, 2001; PISKUNOV, 1977):

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{sen(x)}{x} = 1. \qquad (15)$$

Destaca-se, que o processo quando se considera a tendência $x \to 0^-$ é abordada de maneira similar, tendo como suporte geométrico o 3° (terceiro) quadrante do círculo trigonométrico unitário, obtendo-se:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{sen(x)}{x} = 1. \qquad (16)$$

Assim, neste contexto utilizando a fundamentação teórica do **Teorema 1**, define-se o limite fundamental trigonométrico, ou seja:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1. \qquad (17)$$

5 – RESOLUÇÃO COM AUXÍLIO COMPUTACIONAL

Diante do avanço tecnológico houve uma grande crescente no que se refere a utilização de ferramentas computacionais, visto que as mesmas podem potencializar o ensino e a aprendizagem, no entanto, destaca-se que os fundamentos teóricos estão intimamente ligados a uma boa prática computacional, possibilitando desta forma uma interpretação consistente dos resultados obtidos. Para a instrução computacional foi utilizado o programa da wxMaxima.

5.1- Comandos de funções trigonométricas no wxMaxima

Em particular, serão apresentados comandos que define funções trigonométricas no wxMaxima, a Tabela 1, apresenta os comandos para as funções trigonométricas.

Tabela 1- Comandos de Funções Trigonométricas usadas no trabalho

Seno de x	sin(x)
Cosseno de x	cos(x)
Tangente de x	tan(x)

Fonte: Autoria própria

5.1.1 – Resoluções de limites trigonométricos

Os problemas foram retirados dos seguintes livros nessa ordem (IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N, 2013), (PISKUNOV, 1977), (GUIDORIZZI, 2001).

Problema 1:

$$\text{Calcule o limite } L1 = \lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Intuitivamente, fazendo $x \longrightarrow +\infty$, observa-se que os valores de $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ aproximam-se de 1 (ver, Quadro 1).

Quadro 1 - Comportamento da função $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ quando $x \longrightarrow +\infty$

Quando $x \to +\infty$, os valores de $f(x)$ tende a 1.						
$\boldsymbol{x}$	10	100	1000	10000	$\longrightarrow$	$+\infty$
$\boldsymbol{f(x)}$	0,973	0,985	0,993	0,998	$\longrightarrow$	1

Fonte: Autoria própria.

De modo similar, quando $x \to -\infty$, $f(x)$ tende a 1 (ver, Quadro 2).

Quadro 2 - Comportamento da função $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ quando $x \longrightarrow -\infty$

Quando $x \to -\infty$						
$\boldsymbol{x}$	-10	-100	-1000	-10000	$\longrightarrow$	$-\infty$
$\boldsymbol{f(x)}$	0,973	0,985	0,993	0,998	$\longrightarrow$	1

Fonte: Autoria própria.

Para ratificar o estudo intuitivo, será abordado a resolução algébrica, vinculada à intepretação geométrica do problema 1 com auxílio do wxMaxima.

Fazendo uma análise direta em $L1$, utilizando a tendência $x \longrightarrow +\infty$, tem-se que o $\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.\infty$, ou seja, uma constatação de indeterminação. Para solucionar esta inconsistência numérica, será efetivada uma mudança de variável , considerando:

$$t = \frac{1}{x} \implies \begin{cases} x \to +\infty \\ t \to 0 \end{cases} \tag{18}$$

Logo, fazendo a utilização dos novos parâmetros e utilizando o resultado do limite fundamental trigonométrico (ver a equação 17), tem-se:

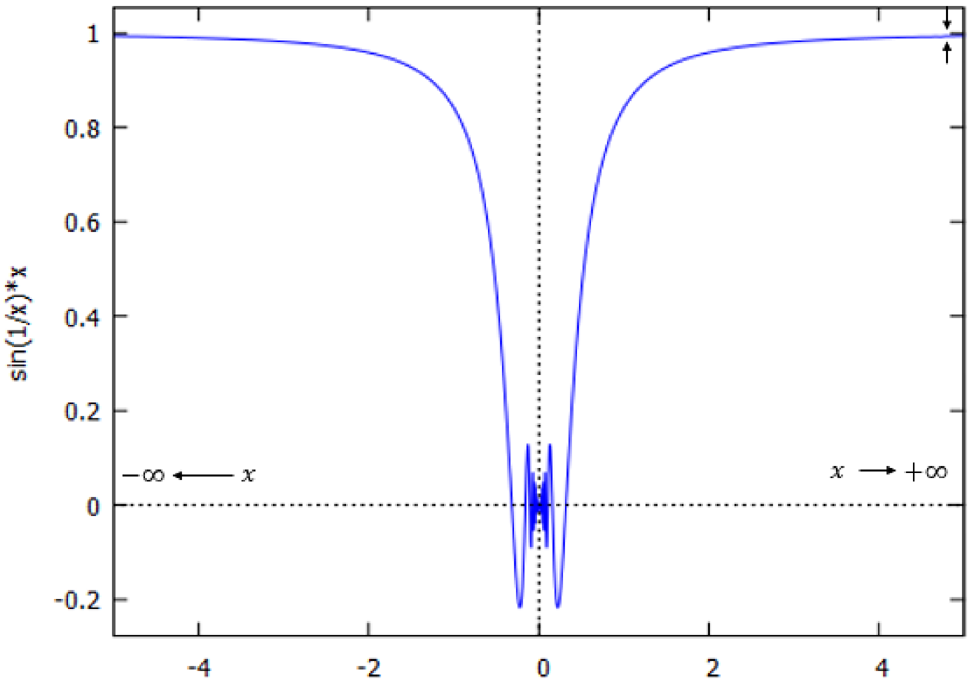
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{sen\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to 0} \frac{sen\, t}{t} = 1$$

Utilizar-se-á o programa wxMaxima como um recurso de comprovação dos resultados obtidos anteriormente, ou seja:

```
limit(x·sin(1/x), x, inf);
1
```

Para uma terceira verificação, utilizando da função intrínseca do wxMaxima "*limit*" será feita uma análise geométrica do problema 1, ratificando o resultado obtido (ver Figura 6).

Figura 6 - Gráfico da função $f(x) = x\, sen\left(\frac{1}{x}\right)$



Fonte: Autoria Própria

Problema 2:

Calcule o limite $L2 = \lim_{x \to 0} \frac{tan(x) - sen(x)}{x^3}$.

Novamente utilizando a noção intuitiva de limite, faz-se $x \longrightarrow 0$ em $f(x) = \frac{tan(x) - sen(x)}{x^3}$, obtendo-se que $f(x) \longrightarrow \frac{1}{2}$ (ver Quadro 3)

Quadro 3 – Comportamento da função $f(x) = \frac{tan(x)-sen(x)}{x^3}$ utilizando a tendência $x \longrightarrow 0$

Quando $x \to 0 -$ (Pela esquerda)								**Quando $x \to 0 +$ (pela direita)**			
x	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	$\longrightarrow$	0	$\longleftarrow$	0,1	0,2	0,3	0,4
$f(x)$	0,521	0,511	0,505	0,501	$\longrightarrow$	$\frac{1}{2}$	$\longleftarrow$	0,501	0,505	0,511	0,521

Fonte: Autoria própria.

Diante disso, segue a resolução algébrica do problema 2, ou seja:

$$L2 = \lim_{x\to 0} \frac{tan(x) - sen(x)}{x^3}$$

Como $tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$, substituindo-se $tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$ em $L2$ obtém-se:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen(x)}{cos(x)} - sen(x)}{x^3}.$$

Agora, fazendo uma manipulação algébrica no numerador $\frac{sen(x)}{cos(x)} - sen(x)$, tem-se:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen(x) - sen(x).cos(x)}{cos(x)}}{x^3},$$

em seguida, procedendo com $sen(x)$ em evidência, determina-se:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x).(1 - cos(x))}{x^3.cos\,(x)}$$

Reagrupando, segue:

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{sin(x)}{x} . \frac{1}{x^2} . \frac{1 - cos(x)}{\cos(x)}\right]$$

Agora, multiplicando por $\frac{1+cos(x)}{1+cos\,(x)}$ a expressão $\frac{sin(x)}{x} . \frac{1}{x^2} . \frac{1-cos(x)}{cos\,(x)}$, segue:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} . \frac{1}{x^2} . \frac{1 - cos(x)}{cos(x)} . \frac{1 + cos(x)}{1 + cos(x)}$$

Simplificando, tem-se:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}.\frac{1}{cos(x)}.\frac{1-cos^2(x)}{x^2}.\frac{1}{1+cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}.\frac{1}{cos(x)}.\frac{sen^2(x)}{x^2}.\frac{1}{1+cos(x)}$$

Finalmente, aplicando a tendência $x \to 0$, simultaneamente com o resultado do limite trigonométrico fundamental no limite supracitado, resulta:

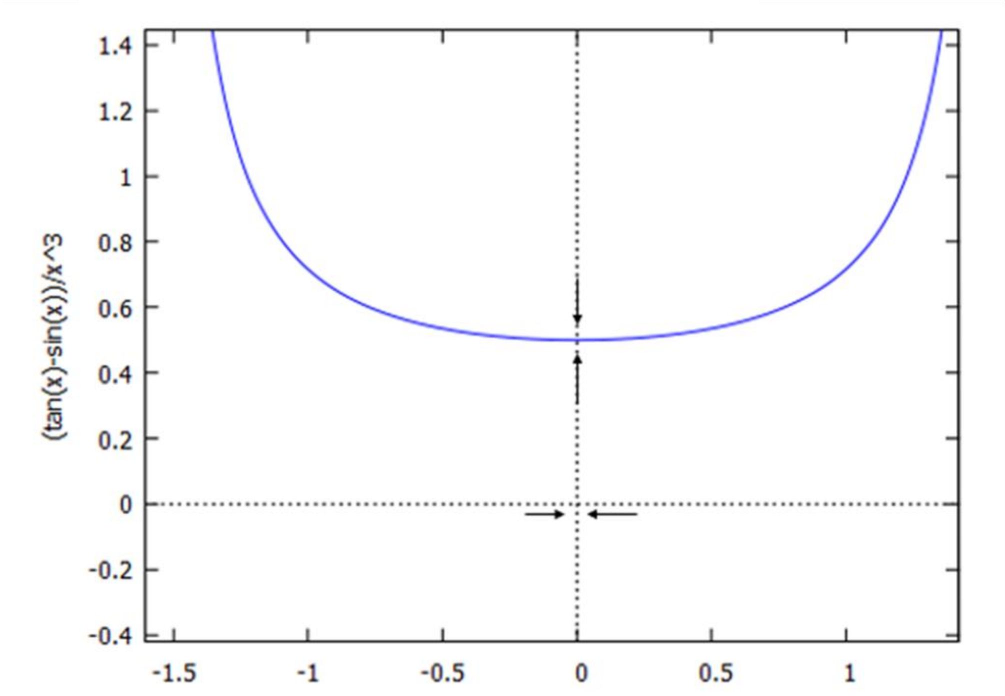
$$L2 = \lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}.\frac{1}{cos(x)}.\frac{sen^2(x)}{x^2}.\frac{1}{1+cos(x)} = 1.1.1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Novamente, utilizando o wxMaxima para ratificar o valor de $L2$ aplica-se a função intrínseca "limit" obtendo-se:

```
→   limit((tan(x)-sin(x))/(x^3), x, 0);
(%o45)  1/2
```

Na intepretação geométrica do problema 2, verifica-se que analisando a tendência $x \longrightarrow 0$, tanto pela direita quanto pela esquerda de 0, determina-se que $\lim_{x\to 0}\frac{tan(x)-sen(x)}{x^3} = \frac{1}{2}$ (ver Figura 7).

Figura 7- Gráfico da função $f(x) = \frac{tan(x)-sen(x)}{x^3}$



Fonte: Autoria Própria

Problema 3:

$$\text{Calcule o limite } L3 = \lim_{x\to 0}\frac{tan\,(x)}{x}$$

Partindo da noção intuitiva de limite, manipula-se $x \longrightarrow 0$ em $f(x) = \frac{tan\,(x)}{x}$ implicando que $f(x) \longrightarrow 1$ (ver Quadro 4).

Quadro 4 – Comportamento da função $f(x) = \frac{tan\,(x)}{x}$ quando $x \to 0$

Quando $x \to 0-$ (Pela esquerda)								**Quando $x \to 0+$ (pela direita)**			
$\boldsymbol{x}$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	$\longrightarrow$	0	$\longleftarrow$	0,1	0,2	0,3	0,4
$\boldsymbol{f(x)}$	1,056	1,031	1,013	1,003	$\longrightarrow$	1	$\longleftarrow$	1,003	1,013	1,031	1,056

Fonte: Autoria própria.

Note que,

$$L3 = \lim_{x\to 0}\frac{tan\,(x)}{x}$$

Novamente, analisando a tendência $x \to 0$ em $L3$, tem-se:

$\lim_{x\to 0}\frac{tan\,(x)}{x} = \frac{tan\,(0)}{0} = \frac{0}{0}$. O que caracteriza uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, dessa forma faremos uma manipulação algébrica na mesma.

Como $tan(x) = \frac{sen(x)}{cos\,(x)}$, substituindo no numerador temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen(x)}{cos\,(x)}}{x}$$

Utilizando divisão de fração, tem-se:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen(x)}{cos\,(x)}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{cos\,(x)}.\frac{1}{x}$$

Organizando a expressão, temos

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{sen(x)}{x}.\frac{1}{cos\,(x)}\right]$$

Utilizando a propriedade o limite do produto, tem-se:

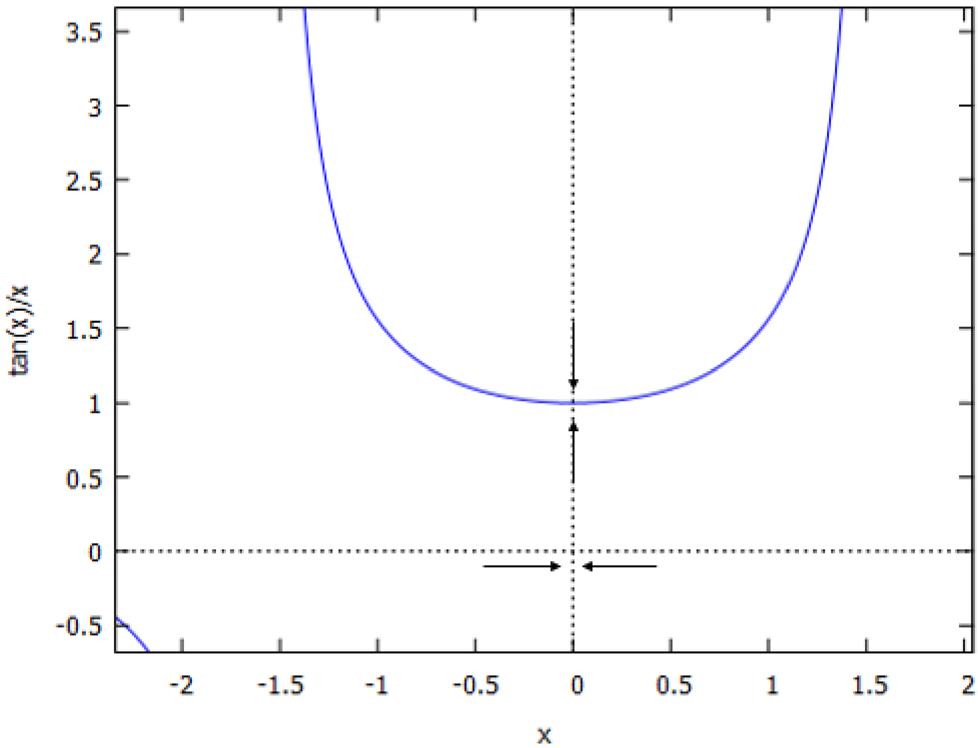
$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos\,(x)} = 1.1 = 1$$

Em síntese, de maneira similar ao que foi abordado nos problemas 1 e 2 para confirmar os resultados faz-se:

```
(%i1) limit(tan(x)/x,x,0);
(%o1) 1
```

Finalmente, analisando a imagem geométrica da função $f(x) = \frac{tan\,(x)}{x}$ quando faz-se $x \longrightarrow 0$, constata-se que $f(x) \longrightarrow 1$, (ver Figura 8).

Figura 8 - Gráfico da função $f(x) = \frac{tan\,(x)}{x}$



Fonte: Autoria Própria

Problema 4:

$$\text{Calcule o limite } L4 = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos\,(x)}{x^2}$$

Utilizando a mesma estratégia de resolução dos problemas 1, 2 e 3 no que concerne as abordagens intuitiva, algébrica e geométrica nesta ordem, tem-se, $x \longrightarrow 0$, tanto por valores menores quanto por valores maiores que 0, $f(x) \longrightarrow \frac{1}{2}$ (ver Quadro 5).

Quadro 5 – Comportamento da $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ quando $x \longrightarrow 0$

Quando $x \to 0-$ (Pela esquerda)								Quando $x \to 0+$ (pela direita)			
$\boldsymbol{x}$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	$\longrightarrow$	0	$\longleftarrow$	$0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}4$
$\boldsymbol{f(x)}$	$0{,}493$	$0{,}496$	$0{,}498$	$0{,}499$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{2}$	$\longleftarrow$	$0{,}499$	$0{,}498$	$0{,}496$	$0{,}493$

Fonte: Autoria própria.

Fazendo uma análise direta em $L4$, utilizando a tendência $x \longrightarrow 0$, tem-se que $L4 = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1-\cos(0)}{0^2} = \frac{0}{0}$, ou seja, uma constatação de indeterminação. Para solucionar esta inconsistência numérica, será efetivada uma manipulação algébrica multiplicando tanto no numerador quanto o denominador pelo termo $(1+\cos(x))$, ou seja:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x).(1+\cos(x))}{x^2.(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2.(1+\cos(x))}$$

Pela relação trigonométrica $sen^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Rightarrow sen^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

Substituindo no numerador temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen^2(x)}{x^2.(1+\cos(x))}$$

Utilizando propriedade de multiplicação de fração, tem-se:

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{sen^2(x)}{x^2} . \frac{1}{(1+\cos(x))}\right]$$

como $\frac{sen^2(x)}{x^2} = \frac{sen(x)}{x} . \frac{sen(x)}{x}$, podemos escrever a expressão assim:

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{sen(x)}{x} . \frac{sen(x)}{x} . \frac{1}{(1+\cos(x))}\right]$$

Aplicando a propriedade de multiplicação de limite, temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} . \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} . \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+\cos(x))}$$

Finalmente, utilizando o resultado do $\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos(x))}=\frac{1}{2}$ concomitantemente com o valor do limite fundamental trigonométrico (ver equação 17) , obtém-se

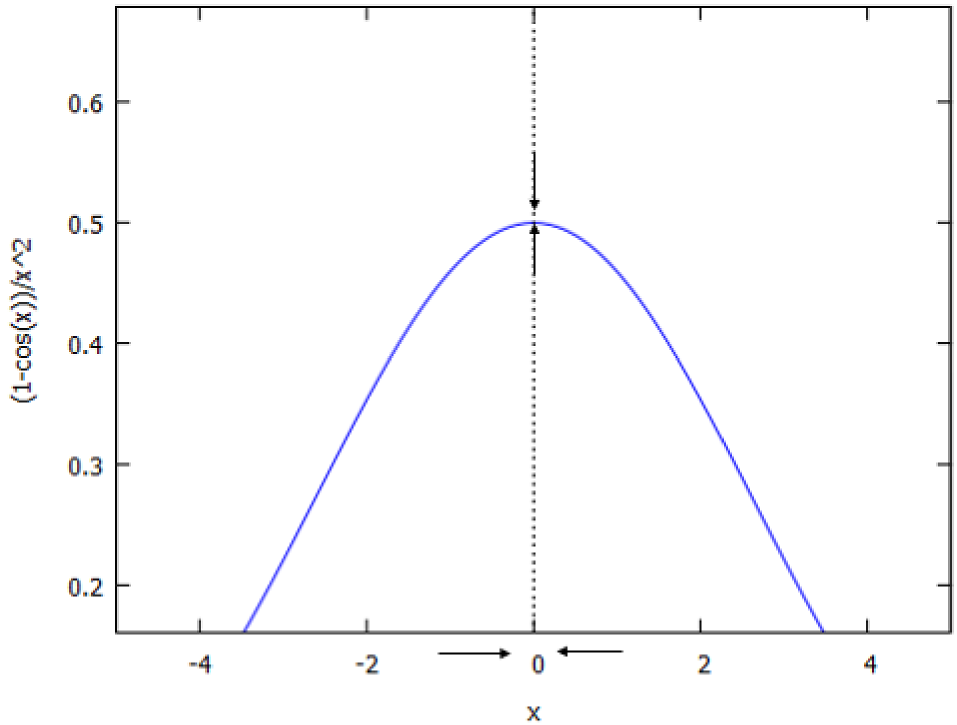
$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos(x))}=1.1.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Agora, utilizando o wxMaxima tem-se:

```
(%i1) limit((1-cos(x))/x^2, x, 0);
(%o1) 1/2
```

Dessa maneira, para finalizar a ratificação dos resultados obtidos intuitivamente e algebricamente, analisa-se a imagem geométrica da função $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$, quando $x \longrightarrow 0$, obtendo-se $f(x)\longrightarrow\frac{1}{2}$ (ver Figura 9).

Figura 9- Gráfico da função $f(x)=\frac{1-\cos(x)}{x^2}$



Fonte: Autoria Própria

6- CONCLUSÃO

Neste trabalho foram resolvidos 4 (quatro) problemas relacionados ao cálculo de limite trigonométricos de maneira intuitiva, analítica, computacional e geométrica, com o objetivo de utilizar o programa wxMaxima como ferramenta auxiliar na comprovação e visualização dos resultados. Dessa maneira, buscou-se a cada problema diversificar a estratégia de resolução destacando a importância do auxilio computacional em situações que necessitam de ratificações dos resultados obtidos, dando ênfase a otimização das resoluções, desde que o usuário possua uma fundamentação teórica consistente para interpretar de forma correta os resultados alcançados.

Como perspectivas indica-se para um estudo mais aprofundado a expansão dos conceitos deste trabalho para situações tridimensionais levando em consideração funções de várias variáveis.

7- REFERÊNCIAS

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FLEMMING, Diva Marília.; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A:** Funções, limite, derivação, integração. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. **Fundamentos da Matemática Elementar**: limites, derivadas e noções de integral. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

PISKUNOV, N. **Cálculo Diferencial e Integral.** 3. ed. Moscou: Editora Mir, 1977.

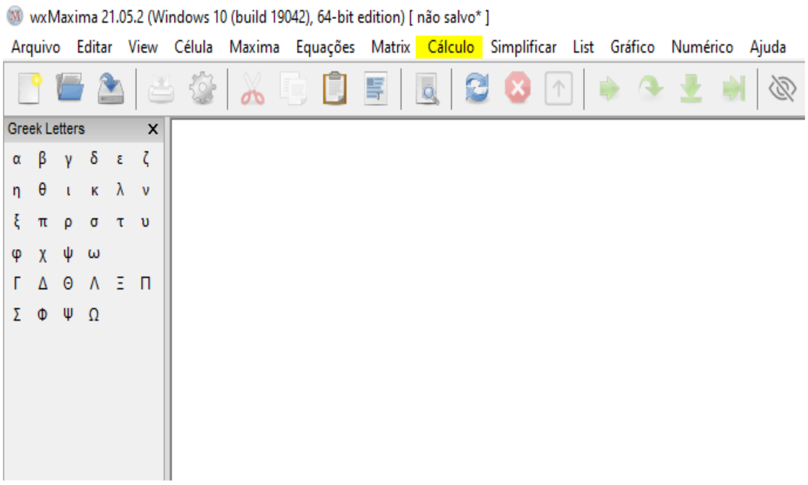
SOUZA, Cleyson Cassimiro de. **O uso da trigonometria no estudo do cálculo diferencial e integral**. 2014. 85f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

8- **ANEXO A – wxMaxima**

Diante do cenário em que vivemos surgem software nas mais diferentes áreas do conhecimento científico, os quais possibilitam análises, robustez e precisões nos resultados obtidos. No presente trabalho foi utilizado o sofware wxMaxima seguindo os seguintes passos:

- **Passo 1:** Clique na aba cálculo como está descrito na Figura A1;

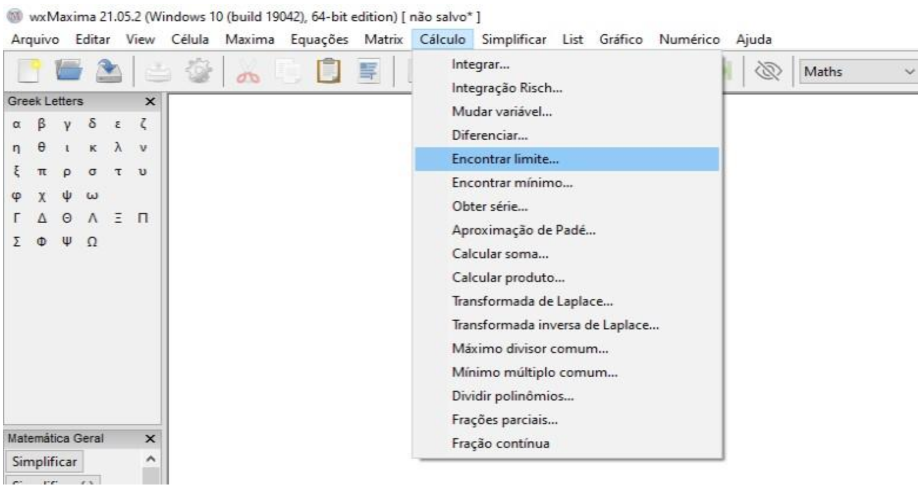
Figura A1- Interface inicial do wxMaxima.



Fonte: Autoria Própria

Passo 2: Após clicar na aba surge um menu onde clica-se na opção encontrar limite (ver, Figura A2);

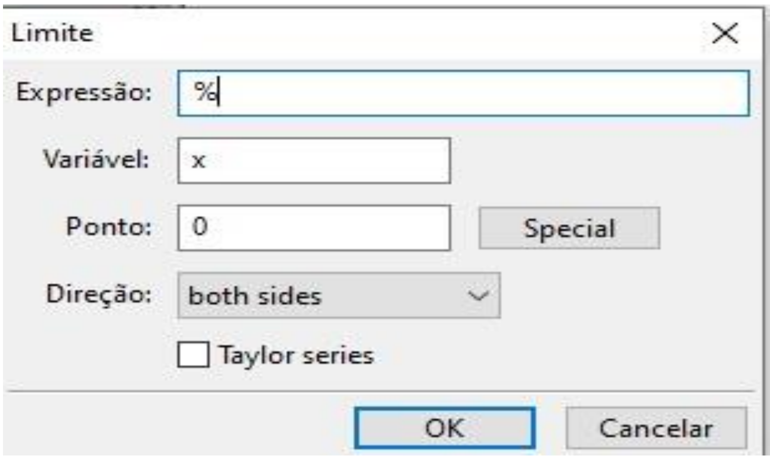
Figura A2- Interface do wxMaxima após clicar na aba cálculo



Fonte: Autoria Própria

Passo 3: Após clicar na opção encontrar limite, o programa disponibiliza uma aba onde será inserida a formulação matemática pelo usuário. Destaca-se que para inserir simbologias matemáticas, basta clicar em Special (ver, Figura A3).

Figura A3- Aba de entrada para inserir a expressão de uma determinada função

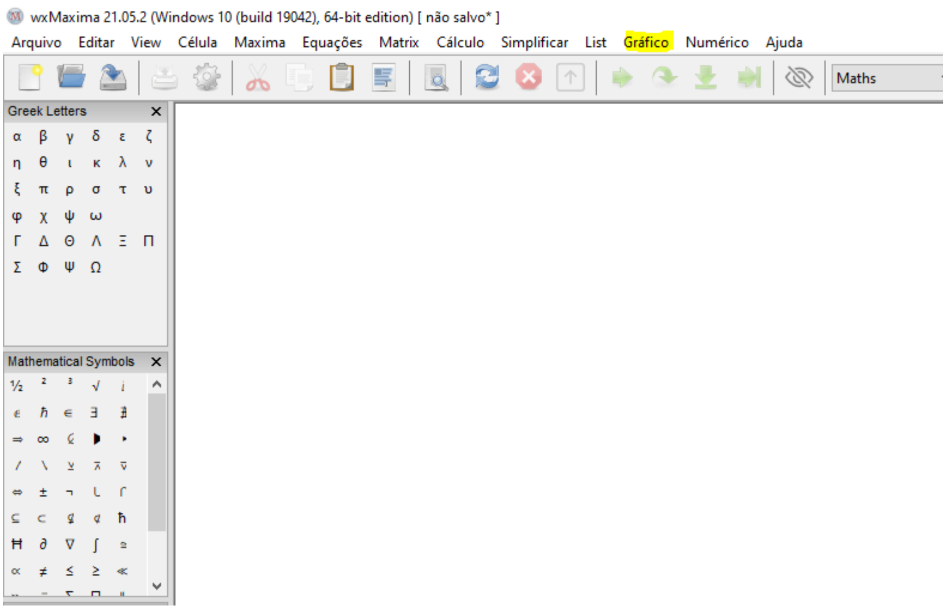


Fonte: Autoria Própria

Para obter as imagens geométricas dos problemas abordados no trabalho, segue-se os passos:

Passo 1: Para obter a análise gráfica do problema clique na aba gráfico (ver, Figura A4).

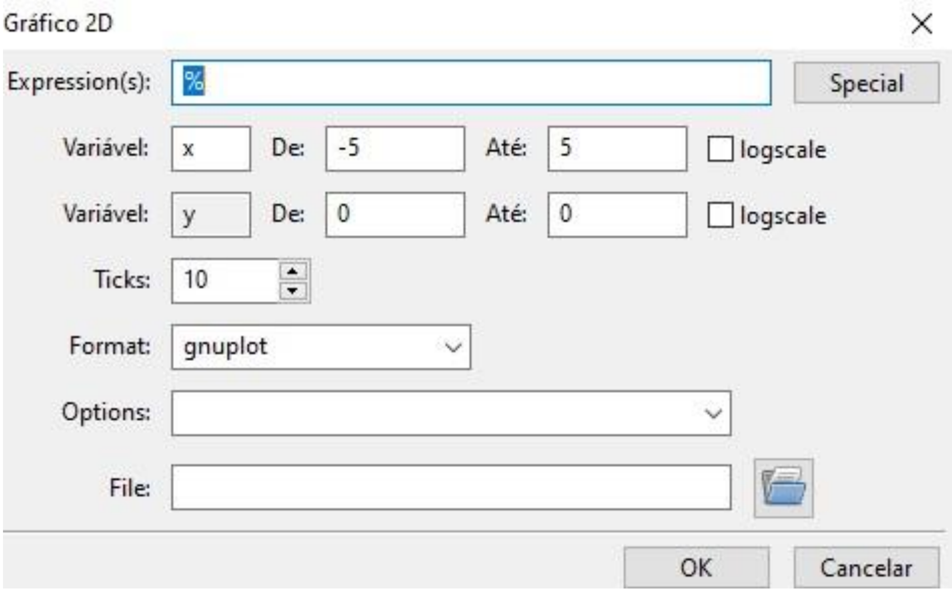
Figura A4 **-** Interface inicial do wxMaxima.



Fonte: Autoria Própria

Passo 2: Em seguida, direciona-se a aba Gráfico 2D (ver, Figura A5).

Figura A5 - Interface do wxMaxima para plotar um gráfico bidimensional



Fonte: Autoria Própria

Ainda como informação, destaca-se que para obter o programa wxMaxima é necessário acessar o endereço eletrônico http://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/. O referido programa pode ser executado nas plataformas Windows, Linux, e macOS. Salienta-se que o programa é de domínio público, sendo disponibilizado um manual acessando os link (http://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/wxmaxima.pdf).