



**SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA**

LEANDRO PEREIRA BARROS

**COMPARAÇÃO ENTRE AS SOLUÇÕES ANALÍTICA E NUMÉRICA DA
EQUAÇÃO DA ONDA**

**ABAETETUBA - PA
2018**

LEANDRO PEREIRA BARROS

**COMPARAÇÃO ENTRE AS SOLUÇÕES ANALÍTICA E NUMÉRICA DA
EQUAÇÃO DA ONDA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, como requisito final para obtenção do grau de Licenciado em Física, sob orientação do Prof. Dr. Rômulo Correa Lima.

ABAETETUBA – PA

2018

LEANDRO PEREIRA BARROS

**COMPARAÇÃO ENTRE AS SOLUÇÕES ANALÍTICA E NUMÉRICA DA
EQUAÇÃO DA ONDA**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado e aprovado, para a obtenção do título de Licenciado em Física pelo corpo docente da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba.

Abaetetuba, 21 de dezembro de 2018.

Prof. Dr. Rômulo Correa Lima
UFPA
Orientador

Prof. Dr. Messias de Souza Costa
UFPA
Examinador

Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa
UFPA
Examinador

"Hey, eu tive fé no impossível, recuar não é possível, vou fazer o impossível virar, meu medo não é perder o que eu ganhei é perder o que eu já tinha desde antes de começar."

(RASHID)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida, a sabedoria me dada que me proporcionou chegar até aqui e me dando forças para não desistir. A família maravilhosa que tenho, em especial aos extraordinários pais que Deus me deu, meu pai Noé Barros, minha mãe Waldilene Barros, que fizeram de tudo que podiam para eu alcançar meus sonhos e objetivos, os quais tiveram grande importância na construção do meu caráter. Aos meus irmãos Lucas, Mariana, Guilherme, Rafael e Fernanda pelo companheirismo por todos esses anos. Aos meus tios pelo amor e carinho, em especial ao Daniel Ferreira que hoje não está mais entre nós, mas onde estiver será sempre lembrado com imensurável carinho, e todos familiares por toda a dedicação e paciência, contribuindo diretamente para minha formação pessoal e profissional.

Agradeço também ao meu colega e amigo o qual tenho grande admiração Luciano Quaresma pela ajuda, dedicação e paciência durante todos esses anos de curso, sem ele com certeza essa caminhada seria mais difícil. Agradeço a esta instituição de ensino e aos professores por ter me dado as oportunidades e as ferramentas que permitiram chegar hoje ao final desse ciclo de maneira satisfatória.

À minha turma Física 2013 pelo ótimos momentos proporcionadas, pelas muitas risadas, brincadeiras e também as discursões e brigas durante esses anos, mas acima de tudo pelas experiencias vivenciadas, e umas dos momentos que deixaram saudades serão as aulas do nosso grupo de estudo que era mais para conversar do que para estudar, mas também foram de suma importância para o aprendizado das disciplinas, e pelos amigos que o curso me deu em especial minhas amigas Celina Carvalho, Jaqueline Souza, Lubiana Cristina e Nadiane Gonçalves. Ao grupo do vôlei que proporcionou conhecer pessoas maravilhosas, as quais pretendo levar para toda vida, principalmente aos meus amigos Ariennilce Sacramento, Daniel Moraes, Guilherme Barros, Laércio Costa, Lorena Kida e Manderson Rodrigues. E a todos os meus amigos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, especialmente aos meus amigos de longa data Ednilson Pinheiro e Gracileia Silva.

Ao meu orientador Dr. Rômulo Lima, pela paciência e apoio no decorrer deste trabalho de conclusão de curso e pelo seu conhecimento repassado nas suas aulas, agradeço pela aprendizagem que ele me proporcionou, e a esta banca examinadora pela disponibilidade.

MUITO OBRIGADO A TODOS!

RESUMO

Um dos problemas fundamentais da física é a ondulatória, a qual envolve equações diferenciais parciais. Dentre os métodos empregados na solução da equação da onda unidimensional, destacam-se os métodos de separação de variáveis e diferenças finitas. Para isso, realizou-se uma descrição dos conceitos fundamentais sobre ondas com ênfase em ondas mecânicas. Para a equação da onda unidimensional foram feitas três demonstrações distintas para sua obtenção, a qual se trata de uma equação diferencial de segunda ordem dependente de uma variável temporal e uma espacial. Através dos métodos de separação de variáveis e diferenças finitas, encontrou-se suas soluções analíticas e numéricas, respectivamente. Foram feitas as comparações entre elas em dois problemas, e apresentou-se um problema para a análise de estabilidade do método numérico. Verificou-se pelos gráficos um ajuste satisfatório entre as soluções analítica e numérica, tornando uma alternativa a utilização do método numérico, em especial para resolver problemas que não exista solução exata pelo método analítico.

Palavras-chave: Equação da onda. Método de separação de variáveis. Método de diferenças finitas.

ABSTRACT

One of the fundamental problems of physics is the wave, which involves partial differential equations. Among the methods used in the solution of the one-dimensional wave equation, the methods of separating variables and finite differences stand out. For this, a description of the fundamental concepts about waves with emphasis in mechanical waves was realized. For the one-dimensional wave equation, three distinct demonstrations were made to obtain it, which is a second-order differential equation dependent on a temporal and a spatial variable. Through the methods of separating variables and finite differences, we found their analytical and numerical solutions, respectively. Comparisons were made between them in two problems, and a problem was presented for the stability analysis of the numerical method. The graphs showed a satisfactory fit between the analytical and numerical solutions, making an alternative the use of the numerical method, especially to solve problems that do not exist exact solution by the analytical method.

Keywords: Wave Equation. Method of Separation of Variables. Finite Difference Method.

ÍNDICES DE ILUSTRAÇÕES

Figuras

| | |
|--|----|
| Figura 1: Onda transversal produzida em uma corda. | 13 |
| Figura 2: Pistão comprimindo um gás e retornando a posição inicial, produzindo uma onda longitudinal. | 14 |
| Figura 3: Pulso de onda se deslocando ao longo de uma corda. Em (a) $t = 0$, o pulso é da forma $u = f(x)$. Em (b) é no tempo posterior a zero sendo a forma do pulso a mesma, sua função é dada por $u' = f(x')$ | 15 |
| Figura 4: Onda em uma corda, (a) onda em uma corda de comprimento l , (b) seguimento da corda. | 19 |
| Figura 5: Pulso de onda a partir de um referencial que se move com a mesma velocidade e sentido do pulso, dando a impressão que os elementos da corda se movem no sentido contrário ao observador. | 23 |
| Figura 6: Diferenciação numérica usando aproximação por diferenças finitas. | 35 |

Tabelas

Tabela 1: Velocidade da onda para casos distintos.25

Tabela 2: Amplitudes das ondas $Y_1(x, t)$, $Y_2(x, t)$ e $u(x, t)$ nos pontos da corda.51

Gráficos

| | |
|---|----|
| Gráfico 1: Representação gráfica dos resultados analíticos e numéricos da onda parabólica, sendo as linhas em azul e as em vermelho pontilhada as funções de onda numérica e analítica, respectivamente. | 47 |
| Gráfico 2: Representação analítica das equações (100), (101) e (102) para $t = 0$ | 50 |
| Gráfico 3: Representação gráfica dos resultados analíticos e numéricos, sendo as linhas em vermelho pontilhado e em azul as em as funções analítica e numérica, respectivamente. | 51 |
| Gráfico 4: Representação gráfica dos resultados numéricos obedecendo a condição de estabilidade. | 53 |
| Gráfico 5: Representação gráfica dos resultados numéricos não obedecendo a condição de estabilidade. | 53 |

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| INTRODUÇÃO | 10 |
| CAPÍTULO 1 - TIPOS DE ONDAS E MODOS DE DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO | 12 |
| 1.1 Movimento ondulatório e classificação das ondas | 12 |
| 1.2 Ondas Progressivas | 14 |
| 1.2.1 Dedução da equação da onda por ondas progressivas..... | 16 |
| 1.3 Dedução da equação da onda usando as Leis de Newton | 19 |
| 1.4 Dedução da equação de onda senoidal..... | 21 |
| 1.5 Velocidade das ondas..... | 22 |
| CAPÍTULO 2 - SOLUÇÃO ANALÍTICA | 26 |
| 2.1 Solução analítica da equação da onda pelo método de separação de variáveis | 26 |
| CAPÍTULO 3 - SOLUÇÃO NUMÉRICA | 35 |
| 3.1 Solução numérica da equação da onda pelo método de diferenças finitas | 35 |
| 3.1.1 Series de Taylor..... | 35 |
| 3.2 Condição de estabilidade do método explícito | 38 |
| CAPÍTULO 4 - APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL | 43 |
| 4.1 Problema de onda parabólica | 43 |
| 4.2 Problema de superposição ondulatória | 48 |
| 4.3 Problema de estabilidade do método de diferenças finitas | 52 |
| CONSIDERAÇÕES FINAIS..... | 55 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 56 |

INTRODUÇÃO

O estudo da ondulatória compreende uma das áreas fundamentais da física. Essa importância se deve pelo fato de praticamente qualquer situação apresenta algum fenômeno ondulatório, por exemplo, um músico ao fazer seus acordes em um violão, ele está causando perturbações nas cordas, criando assim, ondulações que se propagam ao longo da corda e os sons emitidos pelo instrumento são ondas sonoras que são percebidas pelo músico.

Problemas que envolve pulsos de onda em um meio podem ser representadas matematicamente por equações diferenciais parciais. Essas equações são conhecidas como equações da onda, a qual determina a taxa de variação propagação em relação a posição e do tempo dos elementos da onda.

As equações diferenciais parciais (EDP) são de grande importância no campo das ciências exatas, pois através dessas expressões podemos determinar o comportamento de diversos problemas. Porém, nem todas as equações diferenciais são simples de resolver, podendo tornar-se complexa sua resolução ou até mesmo as quais não se consegue obter as soluções exatas pelos métodos analíticos existentes.

Por este motivo, com o avanço computacional e o aumento na necessidade de se obter soluções de problemas cada vez mais sofisticados de equações diferenciais, surgiram também os métodos numéricos para tentar sanar essas questões. Sendo assim, a base desse método, o processo de discretização, que reduz o problema contínuo (número infinitos de pontos), em um número finito de variáveis, podendo assim ser resolvido computacionalmente. Apesar do método numérico ser uma aproximação é possível utilizá-los sem problema dentro da margem de estabilidade do método.

Dessa forma, este trabalho tem como objetivo geral o estudo da equação da onda unidimensional, de forma a analisar o seu comportamento no decorrer do tempo, e fazer uma comparação entre os métodos da solução analítica e numérica. E os objetivos específicos são mostrar as deduções da equação da onda unidimensional por métodos diferentes e se aprofundar na sua solução analítica pelo método de separação de variáveis, deduzir a equação da onda numericamente pelo método de diferenças finitas e comprovar que esse método é eficaz em comparação a solução exata.

Portanto, para alcançar os objetivos propostos, este trabalho é dividido em quatro capítulos. No capítulo 1 serão abordados os conceitos de fenômenos ondulatórios e os métodos de obtenção da equação da onda. O capítulo 2, tem como finalidade obter a solução analítica do problema ondulatório através do método de separação de variáveis. No capítulo 3, utilizar o método de diferenças finitas, para obter a solução numérica, e para que a método numérico seja válido calculou-se o parâmetro de estabilidade, no qual a solução numérica deve obedecer para que o erro da aproximação não seja excessivamente alto. O capítulo 4, finaliza com a comparação entre o método analítico e numérico em dois problemas, analisando os resultados graficamente, e para análise de estabilidade um problema obedecendo os critérios de estabilidade e outro excedendo este parâmetro, analisando assim seu comportamento para ambos os casos.

CAPÍTULO 1 - TIPOS DE ONDAS E MODOS DE DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO

O conceito de ondas é dos principais fundamentos da física, sendo esse assunto amplamente estudado pelos pesquisadores devido sua importância para o entendimento das leis da física, onde até mesmo Einstein já estudava sobre ondas gravitacionais, dessa forma, sucedendo que em 2017 os pesquisadores Rainer Weiss, Barry Barish e Kip Thorne receberam o prêmio Nobel de física pela detecção das ondas gravitacionais abrindo assim uma nova janela para o entendimento do universo. Nesse capítulo será abordado de forma conceitual os principais tipos de ondas, classificando de acordo com suas características, bem como o próprio conceito de onda e será desenvolvida uma representação matemática para dedução da equação da onda unidimensional por três métodos. Por análise de ondas progressivas será desenvolvido a função de onda progressiva, utilizada para a dedução da equação da onda. Outra dedução será pelas Lei de Newton partindo de uma perturbação numa corda. E outra forma usada foi através da onda senoidal. É também mostrado nesse capítulo uma dedução física e matemática da velocidade da onda, visto que a velocidade faz parte da equação da onda, sendo que ela pode ser diferente dependendo do meio que a onda se propaga.

1.1 Movimento ondulatório e classificação das ondas

O estudo dos fenômenos ondulatórios, tanto das ondas mecânicas quanto das ondas eletromagnética, é um dos conceitos fundamentais da física e um dos que mais se desenvolveu no último século, devido está diretamente ligado ao cotidiano e suas diversas aplicações tecnológicas.

Na experiência cotidiana, um dos fenômenos mais perceptivos são as ondas produzidas na superfície da água, por exemplo, pode se observar pequenas ondulações radiais produzidas por uma goteira em cima de uma piscina, outro exemplo, são as ondas sonoras produzidas em uma corda como as de um violão, na qual uma perturbação provocada pelas mãos do músico faz com que a corda entre em vibração produzindo os sons musicais.

No mundo moderno, o estudo de ondas eletromagnéticas proporcionou um grande avanço tecnológico. Ondas de rádio e redes Wi-fi utilizam ambas as ondas eletromagnéticas para fins de emprega-las nas telecomunicações. Na indústria médica aparelhos de raio-X, por exemplo, permitem que os profissionais obtenham imagem mais precisas de fraturas nos pacientes. Há outros exemplos de ondas, como ondas sísmicas e ondas gravitacionais, as quais são mais complexas e também não serão abordadas neste trabalho.

Para Nussenzveig (2002, p. 98) “uma onda é qualquer sinal que se transmite de um ponto a outro de um meio, com velocidade definida, sem que haja transporte de matéria”. A maioria das ondas podem ser categorizadas de duas formas segundo sua natureza. As ondas mecânicas são as que necessitam de um meio para se propagar, a ondulação na água produzida por uma pedra arremessada na superfície de um lago e uma onda sonora, para a qual o ar é o meio de propagação, são exemplos de ondas mecânicas. As ondas eletromagnéticas são uma classe especial de onda que não há necessidade de um meio para se propagar; as ondas luminosas, de rádio e TV são exemplos familiares (NUSSENZVEIG, 2002; SERWAY e JEWETT, 2004).

Uma onda mecânica ocorre devido uma perturbação em um meio. Por exemplo, quando uma corda sob tensão é tocada, o pulso produzido se propagará ao longo do comprimento da corda como uma onda. A perturbação nesse caso é a alteração na forma da corda, a partir de sua forma de equilíbrio, produzindo assim a onda. A propagação é consequência da interação entre cada segmento do fio e os segmentos adjacentes.

Devido as mudanças na configuração da onda, elas podem ser classificadas de acordo com sua forma. Tomando exemplo do fio, à medida que o pulso se propaga através do meio como mostra a Figura 1, seus segmentos oscilam para e cima e para baixo, ou seja, se movem na direção y , perpendicular a direção de propagação da onda. Uma onda com esta propriedade, em que o movimento do meio em uma corda, por exemplo, é perpendicular a direção de propagação, são chamadas ondas transversais ou cisalhantes. Outro exemplo importante de ondas transversais são as ondas eletromagnéticas (TIPLER e MOSCA, 2009; NUSSENZVEIG, 2002).

Figura 1: Onda transversal produzida em uma corda.

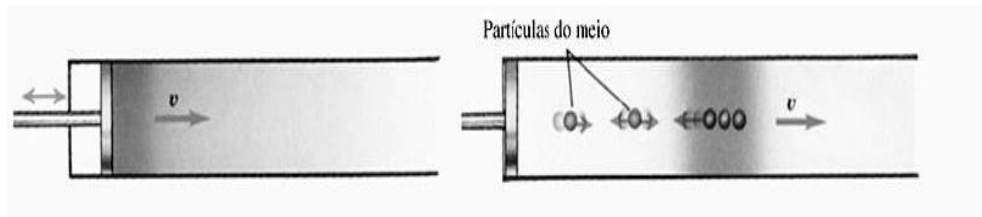


Fonte: Young e Freedman, 2003

Comparando essa onda com outro tipo de pulso, um se movendo para frente e outro para trás, produzidas por um pistão móvel em um tubo de paredes rígidas com ar em seu interior como ilustrado na Figura 2. Ao deslocar o pistão bruscamente para a direita e posteriormente para a esquerda, uma perturbação de deslocamento e variação de pressão se

propagaram ao longo do meio. Neste caso as partículas do meio se propagaram para frente e para trás ao longo da mesma direção de propagação da onda, esse movimento é chamado de onda longitudinal ou compressionais. Ondas sonoras e ondas produzidas em molas com compressão e rarefação são exemplos de ondas longitudinais (HALLIDAY, RESNICK e WALKER, 2009; YOUNG e FREEDMAN, 2003).

Figura 2: Pistão comprimindo um gás e retornando a posição inicial, produzindo uma onda longitudinal.



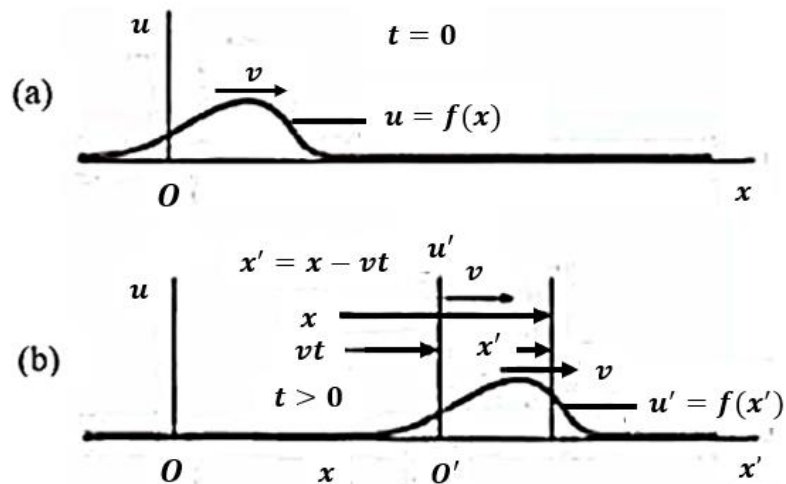
Fonte: Young e Freedman, 2003

As ondas podem ser classificadas de acordo com o grau de liberdade de sua propagação. Ondas unidimensionais são as que se propagam em uma única direção, como por exemplo ondas produzidas em cordas. As ondas bidimensionais são as quais se propagam num plano, como as ondas produzidas na água ou em membrana de instrumentos de percussão. Ondas tridimensionais se propagam nas três direções, como as ondas sonoras e luminosas.

1.2 Ondas Progressivas

Considerando uma fonte de vibração na extremidade esquerda de uma corda de comprimento l e esticada, gerando assim um pulso se deslocando para a direita com velocidade v como mostra a Figura 3. O pulso se comporta como uma onda transversal, ou seja, ela se propaga ao longo do eixo x e o deslocamento dos elementos da corda são para cima e para baixo, e são descritos pelo eixo u (SERWAY e JEWETT, 2004).

Figura 3: Pulso de onda se deslocando ao longo de uma corda. Em (a) $t = 0$, o pulso é da forma $u = f(x)$. Em (b) é no tempo posterior a zero sendo a forma do pulso a mesma, sua função é dada por $u' = f(x')$.



Fonte: adaptado de Tipler e Mosca, 2009

O perfil da onda na corda num dado momento t é a forma do pulso, qualquer que seja pode ser representada pela função que descreve o movimento como $u(x, t)$. A Figura 3 (a) está representando a forma e a posição do pulso no instante $t = 0$. Então, o perfil da onda pode ser escrito por uma função matemática como $u(x, 0) = f(x)$. Essa função descreve a posição vertical u do elemento da corda localizado para cada valor de x no tempo $t = 0$. Como a velocidade do pulso é v , então ele se deslocou para a direita a uma distância vt no tempo, Figura 3 (b), considerando que o pulso se propagou a partir da origem.

Tomando o exemplo como um modelo ideal, no qual a perturbação é uma onda progressiva que desloca para a direita sem alterar de forma com a passar do tempo. Ao adotar um novo referencial inercial $O'x' u'$ que se desloca com mesma velocidade da onda, então o perfil da onda não muda no decorrer do tempo para esse novo referencial, ou seja

$$u'(x, t) = u'(x', 0) = f(x'),$$

é uma função somente de x' devido a onda não mudar de forma com o passar do tempo. Então a relação entre os dois referenciais é dada por uma transformação de Galileu, logo, x' pode ser escrito como

$$x' = x \pm vt,$$

assim, a função de uma onda progressiva pode ser representada da seguinte forma

$$u(x, t) = f(x \pm vt), \quad (1)$$

sendo o pulso deslocando-se para a direita $x' = x - vt$, assim

$$u(x, t) = h(x - vt), \quad (2)$$

seguindo a mesma análise, se o pulso se desloca para a esquerda, a posição de um elemento da corda é

$$u(x, t) = g(x + vt). \quad (3)$$

Em uma corda pode ocorrer de ter ondas progressivas propagando-se apenas num sentido, para a direita ou para esquerda antes de tocar nas bordas, por exemplo. Ao atingir uma extremidade a onda é refletida, gerando outra onda progressiva em um sentido oposto. Consequentemente em uma corda finita, ocorrerá de ter simultaneamente ondas progressivas se propagando nos dois sentidos (esquerda e direita), então matematicamente tem-se (NUSSENZVEIG, 2002)

$$u(x, t) = h(x - vt) + g(x + vt).$$

A equação (1) é conhecida como função de onda progressiva. A função de onda $u(x, t)$ representa a coordenada y de qualquer ponto P situado na posição x em qualquer momento t , ou seja, para ondas em corda ela representa o deslocamento transversal da corda. Para ondas sonoras no ar, a função pode ser o deslocamento longitudinal das moléculas no ar. Estas funções de onda são soluções de uma equação diferencial conhecida como equação da onda (TIPLER e MOSCA, 2009).

1.2.1 Dedução da equação da onda por ondas progressivas

Conhecendo os conceitos de ondas progressivas, pode-se deduzir a equação da onda por meio da função de ondas progressivas. Utilizando o mesmo exemplo de ondas progressivas em uma corda esticada, Figura 3 (mostrado na seção 1.2), usa-se (1) generalizada para demonstrar a equação da onda.

$$u(x, t) = f(x'); \quad x' = x \pm vt \quad (4)$$

Pode-se utilizar essa expressão para combinar a equação de movimento com a de propagação de onda em qualquer ponto da corda, para isso, calcula-se a aceleração num dado ponto P. Fixando P e derivando em relação ao tempo, encontraremos a velocidade vertical v_u e derivando novamente a velocidade em relação ao tempo, o resultado será a aceleração vertical a_u , o que leva a tomar derivadas parciais. No caso da corda, por exemplo, o ponto P desloca-se apenas verticalmente, sendo assim, sua coordenada x permanece constante (SERWAY e JEWETT, 2004). A velocidade transversal e sua aceleração transversal no ponto P e no instante t são, conseqüentemente

$$v_u = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t), \quad (5)$$

$$a_u = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t). \quad (6)$$

Pela equação (1), onde u só depende de t através da variável $x' = x - vt$ (onda progressiva se deslocando para a direita), de modo que as derivadas se calculam pela regra da cadeia (TIPLER e MOSCA, 2009)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{dx'} \frac{\partial x'}{\partial t} = -v \frac{df}{dx'}$$

usando $\frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (x - vt) = -v$. Analogamente, derivando o valor encontrado na equação acima, temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{df}{dx'} \right) = -v \frac{d}{dx'} \left(\frac{df}{dx'} \right) \frac{\partial x'}{\partial t},$$

$\frac{\partial x'}{\partial t} = -v$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dx'^2}, \quad (7)$$

por outro lado, como $\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x - vt) = 1$, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dx'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{df}{dx'}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx'^2} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dx'^2} \quad (8)$$

Comparando as equações (7) e (8), vemos que $u(x, t)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (9)$$

que pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

A equação (9) que se chama equação de ondas unidimensional é uma das equações fundamentais e física. Encontra-se o mesmo resultado se utilizar a equação (3), uma onda progressiva que se desloca para a esquerda (NUSSENZVEIG, 2002).

É importante salientar que a equação (9) modela um vasto número de outros problemas ondulatórios, além das ondas transversais que se propaga em uma corda elástica. Logo, basta interpretar a função u e a constante v adequadamente para se ter problemas de ondas do mar, ondas acústicas, ou eletromagnéticas, ou ondas elásticas que se propaga em um corpo sólido. Dependendo das dimensões espaciais do problema a equação de onda pode ser generalizada para mais de uma dimensão (BOYCE e DIPRIMA, 2010). A equação de onda para duas dimensões é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (10)$$

Esta equação se adequaria por exemplo se para problemas envolvendo o movimento de uma superfície fina elástica, como a membrana de instrumento de percussão. Analogamente, em três dimensões a equação de onda é

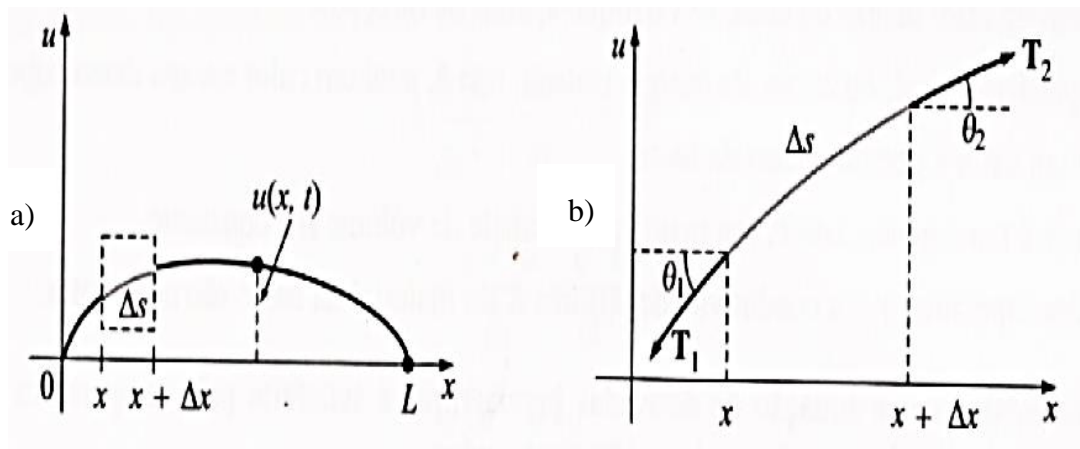
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (11)$$

Em afinidade com as equações em duas e três dimensões, as condições de contorno e iniciais também tem que ser generalizadas de maneira adequada (BOYCE e DIPRIMA, 2010).

1.3 Dedução da equação da onda usando as Leis de Newton

Para deduzir a equação da onda usando as leis de Newton, vamos usar uma análise mecânica de um pulso deslocando-se por uma corda esticada com tensão \vec{T} . Considerando que esse pulso está se movendo para a direita com velocidade constante v , a partir de um referencial inercial estacionário, como a terra por exemplo, como mostra a Figura 4 (a). Porém, como as leis de Newton são validas apenas para referenciais inerciais, deve se tomar um observador com referencial que se mova com a mesma velocidade do pulso de forma que para este referencial o pulso esteja em repouso, como na Figura 4 (b). Nesse sistema de referencial para observador o pulso estará fixo e os elementos de corda que se moveram para a esquerda através da forma do pulso (SERWAY e JEWETT, 2004).

Figura 4: Onda em uma corda, (a) onda em uma corda de comprimento l , (b) seguimento da corda.



Fonte: Saiji, 2006

Aplica-se a segunda lei de Newton em um pequeno elemento da corda, de comprimento Δs , para deduzir uma equação diferencial conhecida como equação da onda, que relaciona as derivadas parciais de $u(x, t)$ com suas derivadas temporais. A Figura 4 (b) mostra um pequeno segmento da corda, onde forma dois ângulos θ_1 e θ_2 . Sendo, Δs o comprimento do segmento da corda, considerando sua massa como $m = \mu \Delta s$, onde μ é a massa por comprimento unitário da corda supondo que a corda é homogênea (TIPLER e MOSCA, 2009; SERWAY e JAWETT, 2004).

Para deslocamento vertical, a força é horizontal resultante é zero e tração é uniforme e constante, isto é

$$\sum T_x = T_2 \cos \theta_2 - T_1 \cos \theta_1 = 0, \quad (12)$$

pela série de Taylor vemos que para ângulos muito pequenos pode-se aproximar $\cos \theta = 1$, então

$$\sum T_x = T_2 - T_1 = 0,$$

assim

$$T = T_1 = T_2.$$

Analisando o segmento se movendo verticalmente a força resultante nesta direção será

$$\sum T_y = T \sin \theta_2 - T \sin \theta_1, \quad (13)$$

e pela série de Taylor tem-se que para ângulos pequenos $\sin \theta \approx tg \theta$

$$\sum T_y = T(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \approx T(tg \theta_2 - tg \theta_1).$$

A inclinação da linha tangente da corda é o próprio ângulo formado pela corda com a horizontal. Sendo a inclinação S a primeira derivada de $u(x, t)$ em relação a x , para t constante. Nesse caso, tratasse de uma derivada parcial visto que a função $u(x, t)$, depende de duas variáveis quando é aplicada a derivação em relação a uma delas com a outra variável sendo mantida constante. A derivada parcial de u em a x é dada da seguinte forma $\partial u / \partial x$ (TIPLER e MOSCA, 2009). Assim

$$S = tg \theta = \frac{\partial u}{\partial x},$$

logo,

$$\sum T_y = T(S_2 - S_1) = T \Delta S,$$

onde S_1 e S_2 são as inclinações das duas extremidades do segmento da corda e ΔS a variação da inclinação. Sabendo que

$$F = m \cdot a, \quad (14)$$

sendo $m = \mu\Delta x$ e $a = \partial^2 u / \partial t^2$, assim

$$T\Delta S = \mu\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (15)$$

tomando $F = T_y$, temos

$$T \frac{\Delta S}{\Delta x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (16)$$

no limite de Δx tendendo a zero, tem-se

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

então, no limite de $\Delta x \rightarrow 0$, a equação (16) se torna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (17)$$

A equação (17) é a equação da onda unidimensional deduzida pelas leis de Newton. Onde $v^2 = T/\mu$ é a rapidez da onda em uma corda.

1.4 Dedução da equação de onda senoidal

Outra forma de demonstrar a equação de onda é através do movimento harmônico simples, onde cada elemento da corda vibra com a mesma frequência (SERWAY e JEWETT, 2004). Pode-se verificar que a equação da onda é satisfeita pela função de onda senoidal

$$u(x, t) = A \sin(kx - \omega t). \quad (18)$$

A equação (18) representa uma onda se deslocando para a direita, sendo a velocidade da onda senoidal $v = \frac{\omega}{k}$, k o número de onda angular e ω a frequência angular. Podemos calcular explicitamente pelas derivadas parciais $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ devido $u(x, t)$ depender tanto de x como de t , como feito na seção 1.2.1, porém com $u = A \text{sen}(kx - \omega t)$

$$v_u = \frac{\partial}{\partial t} [A \text{sen}(kx - \omega t)] = -\omega A \cos(kx - \omega t), \quad (19)$$

$$a_u = \frac{\partial^2}{\partial t^2} [-\omega A \cos(kx - \omega t)] = -\omega^2 A \text{sen}(kx - \omega t). \quad (20)$$

Derivando a função de onda em relação a posição em um instante fixo, similarmente ao processo anterior

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [A \text{sen}(kx - \omega t)] = k A \cos(kx - \omega t), \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [k A \cos(kx - \omega t)] = -k^2 A \text{sen}(kx - \omega t), \quad (22)$$

comparando as equações (20) e (22), tem-se

$$-\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (24)$$

A equação (24) também é conhecida como equação de onda linear, que comparando com a equação (9) obtém-se $v = k/\omega$, conforme já comentado. Ao analisar uma situação qualquer e ao encontrar esse tipo de relação entre as derivadas parciais, portanto nesse caso está ocorrendo um movimento ondulatório (SERWAY e JEWETT, 2004)

1.5 Velocidade das ondas

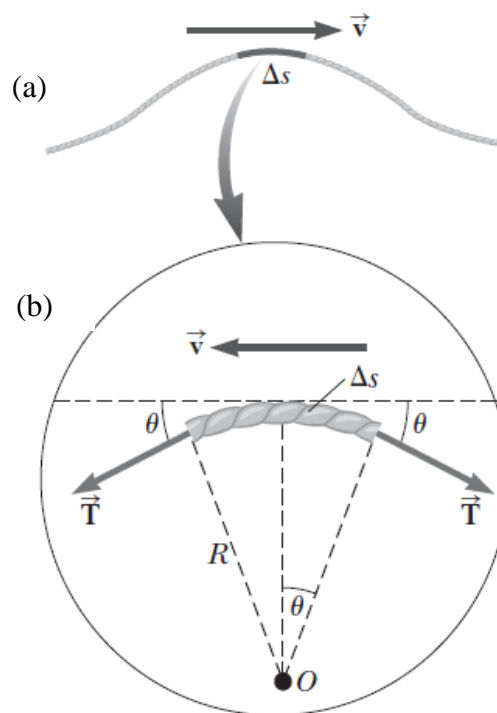
Nas expressões acima, v é a rapidez de propagação da onda em relação ao meio, logo, sua rapidez dependerá do meio, mas independerá da fonte geradora de onda. Por exemplo, a

velocidade da luz de um farol de um carro depende apenas de propriedades do ar, e não da velocidade do carro (TIPLER e MOSCA, 2009).

Tomando o exemplo de uma onda se propagando em uma corda de massa m por unidade de comprimento Δl , na qual chamamos a razão da massa pelo comprimento de massa específica linear μ da corda, e sua equação é dada por $\mu = m/\Delta l$. Para que a onda se propague na corda ela precisará estar esticada por uma força de tensão \vec{T} o que significa que ela foi alongada e mantida assim por forças aplicadas nas suas extremidades, sendo a tensão da corda o módulo comum das duas forças.

Considerando um único pulso simétrico, com a onda se movendo-se da esquerda para a direita com velocidade v , por conveniência adotaremos um referencial se movendo na mesma direção e sentido do pulso com velocidade constante, desse modo o pulso permanece estacionário. Nesse sistema de referência em movimento inercial, os elementos da corda se moveram da direita para a esquerda com velocidade v (HALLIDAY, RESNICK e WALKER, 2009; SERWAY e JAWETT, 2004). Usando um pequeno segmento da corda de comprimento Δl formará um arco aproximado de um círculo de raio R , como mostra na Figura 5

Figura 5: Pulso de onda a partir de um referencial que se move com a mesma velocidade e sentido do pulso, dando a impressão que os elementos da corda se movem no sentido contrário ao observador.



Fonte: Serway, 2004

Enquanto os elementos da corda se deslocam através do arco, essa partícula estará em movimento circular uniforme, então esse elemento apresentara uma aceleração centrípeta de

v^2/R , considerando que esse elemento tenha comprimento Δl , onde está sujeito à força de tensão \vec{T} cujo o modulo é a tensão da corda. A força \vec{T} atua tangencialmente nesse elemento nas duas extremidades do arco, como mostra a Figura 5. O modulo da força de tensão \vec{T} é a mesma em ambos os lados, então as componentes horizontais da força cancelam, e as componentes verticais se somam resultando em uma força restauradora radial \vec{F} (HALLIDAY, RESNICK e WALKER, 2009; SERWAY e JAWETT, 2004). Em modulo, tem-se

$$F = 2T \text{sen}\theta \approx T(2\theta), \quad (25)$$

foi utilizado a aproximação de pequenos ângulos, ou seja, $\text{sen}\theta$ por θ . Com base na Figura 5 (b) o segmento da corda poder ser descrita como $\Delta l = R(2\theta)$. Convém usar a segunda lei de Newton combinando os termos conhecidos ate aqui, temos assim

$$F = m \cdot a = \frac{\mu \Delta l v^2}{R}, \quad (26)$$

$$T(2\theta) = \frac{\mu R(2\theta)v^2}{R}, \quad (27)$$

então, explicitando a velocidade v , obtém-se

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (28)$$

A equação mostra que a velocidade da onda é diretamente proporcional força de tração, ou seja, quanto mais esticada a corda estiver, mais rápido a onda se propagará. Sendo também a velocidade da onda inversamente proporcional a massa especifica da corda, logo, as ondas se propagam com velocidade maior em uma corda leve do que em uma corda muito densa, quando submetidas à mesma força de tração.

Neste exemplo se restringiu ao cálculo da velocidade da onda em uma corda, entretanto, a velocidade pode ser dada de outras formas, dependendo do meio de propagação, na Tabela 1 será mostrado outras expressões da velocidade da onda para outros meios.

Tabela 1: Velocidade da onda para casos distintos.

| Expressões para velocidade de onde em meios diferentes | |
|--|-----------------------------------|
| Ondas em corda | $v = \sqrt{\frac{T}{\omega}}$ |
| Onda senoidal | $v = \frac{\omega}{k}$ |
| Ondas sonoras em um fluido | $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$ |
| Ondas sonoras em um gás | $v = \sqrt{\frac{\gamma RT'}{M}}$ |

Fonte: Adaptado de Tipler e Mosca, 2009

Portando, pode-se dizer que mantidas as características físicas de um dado meio a velocidade de propagação da onda é constante (TORRES, FERRARO, *et al.*, 2013). Outro fator que pode influenciar a velocidade da onda é a frequência com que a onda realiza os ciclos em determinado tempo. Se uma corda é perturbada de em um movimento periódico, realizando assim um movimento harmônico simples (TIPLER e MOSCA, 2009). E sua velocidade pode ser calculada por

$$v = \frac{\lambda}{T_t} = \lambda \cdot f$$

Essa relação é conhecida como equação fundamental das ondas, em que λ é o comprimento de onda é f é a frequência e T_t é o período da onda, o mesmo pode ser entendido como o inverso da frequência, ou seja, o período $T_t = 1/f$ é o tempo necessário para a onda realizar um ciclo completo.

CAPÍTULO 2 - SOLUÇÃO ANALÍTICA

São muitos os problemas de suma importância da física onde existe duas ou mais variáveis independentes, como a equação da onda que envolve uma variável espacial e uma variável temporal, tornando assim o modelo matemático correspondente a essa equação uma EDP. Este capítulo trata da solução analítica da equação da onda através de um método importante na resolução de problemas envolvendo equações diferenciais parciais, conhecido como método de separação de variáveis. Sua característica principal é a substituição da equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, que têm de ser resolvidas sujeitas a condições de iniciais ou de contorno. Neste capítulo será abordado o problema da corda com extremidades fixas e será utilizado o método de separação de variáveis e o método de Fourier para resolver uma série de senos.

2.1 Solução analítica da equação da onda pelo método de separação de variáveis

Segundo Boyce e DiPrima (2010, p. 486) “uma das equações diferenciais parciais que ocorrem com frequência na física e em matemática aplicada é a equação da onda”. A equação de onda, aparece praticamente em qualquer análise matemática de fenômenos envolvendo a propagação de onda em meio contínuo, por exemplo, em estudos de ondas acústicas, ondas de água, ondas eletromagnéticas e ondas sísmicas, sendo estas baseadas todas na equação de onda.

Tomando o exemplo de cordas vibrantes de comprimento l , supondo que ela sofra uma perturbação, de modo a vibrar verticalmente denotando assim uma função $u(x, t)$ onde essa satisfará a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 \leq x \leq l, t \geq 0. \quad (29)$$

Para descrever matematicamente o que acontece com a corda é necessário especificar condições iniciais e de contorno adequadas para o deslocamento $u(x, t)$. Supõe-se uma corda com suas extremidades fixas, como em uma corda de violão, por exemplo, assim suas condições de contorno são

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0; \quad t \geq 0.$$

Como a equação da onda é uma equação diferencial de segunda ordem em relação ao tempo t , então é necessário usar duas condições iniciais. Sendo uma delas em relação a posição inicial da corda,

$$u(x, 0) = f(x); 0 \leq x \leq l$$

e uma para sua velocidade inicial,

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x); 0 \leq x \leq l$$

onde f e g são funções dadas para que as equações das condições de iniciais sejam consistentes e para extremidades fixas temos

$$f(0) = f(l) = 0; g(0) = g(l) = 0$$

O problema então é definir uma solução particular (não identicamente nula) da equação da onda que satisfaça também as condições de contorno e as condições iniciais. Então este é um problema de valor inicial na variável temporal t e um problema de valores de contorno na variável espacial x (BOYCE e DIPRIMA, 2010). Para solucionar este problema o método de separação de variáveis sob uma forma de produto de duas funções $u_1(x)$ e $u_2(t)$ na qual a primeira depende somente da variável espacial e a segunda exclusivamente da variável temporal (PISKUNOV, 1997).

Esse método consiste, inicialmente, em usar separação de variáveis para determinar uma função real $u(x, t)$ não nula, definida em $0 \leq x \leq l$ para $t > 0$, que satisfaça a equação (29). Utilizando o método de Fourier para determinar funções que satisfaçam a equação da onda e as condições de contorno (FIGUEIREDO, 2009).

Levando em conta que $u(x, t)$ pode ser escrita como o produto de outras duas funções, uma dependente exclusivamente de x e outra dependente somente de t , ou seja

$$u(x, t) = u_1(x) \cdot u_2(t), \quad (30)$$

Substituindo na equação da onda, tem-se

$$\frac{\partial^2(u_1(x) \cdot u_2(t))}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2(u_1(x) \cdot u_2(t))}{\partial x^2}, \quad (31)$$

$$u_1(x) \frac{d^2(u_2)}{dt^2} = v^2 u_2(t) \frac{d^2(u_1)}{dx^2}. \quad (32)$$

Como a derivada de uma função vezes uma constante é igual a constante vezes a derivada da função, então ao derivar a função $(u_1(x) \cdot u_2(t))$ em relação ao tempo t , $u_1(x)$ é constante, então sai da derivada. E a função $u_2(t)$ é constante ao se derivar em relação a x , então o mesmo sai da derivação, dessa forma a equação se torna uma EDO (GUIDORIZZI, 2001). Organizando a equação, chega-se

$$\frac{1}{v^2 u_2(t)} \frac{d^2(u_2(t))}{dt^2} = \frac{1}{u_1} \frac{d^2(u_1(x))}{dx^2}. \quad (33)$$

Nota-se que sendo o lado esquerdo dependente somente de t e o lado direito depende apenas de x , implicando que cada membro da equação é independente de x e de t . Logo, os membros podem ser igualados a uma constante λ (FIGUEIREDO, 2009), então

$$\frac{1}{u_1(x)} \frac{d^2(u_1(x))}{dx^2} = \lambda, \quad (34)$$

$$\frac{1}{v^2 u_2(t)} \frac{d^2(u_2(t))}{dt^2} = \lambda, \quad (35)$$

temos duas EDO linear e homogênea de 2ª ordem (34) e (35). Utiliza-se os métodos a seguir para determinar suas soluções

$$\frac{d^2(u_1(x))}{dx^2} = \lambda u_1(x)$$

$$\frac{d^2(u_1(x))}{dx^2} - \lambda u_1(x) = 0, \quad (36)$$

sabendo que a função exponencial ao ser derivada é a própria função vezes uma constante, então tomando

$$u_1(x) = ce^{rx} \quad (37)$$

derivando até a segunda ordem, temos

$$\frac{d(u_1(x))}{dx} = re^{rx},$$

$$\frac{d^2(u_1(x))}{dx^2} = r^2 e^{rx},$$

substituindo em (36)

$$r^2 e^{rx} - \lambda e^{rx} = 0, \quad (38)$$

isolando e^{rx}

$$e^{rx}(r^2 - \lambda) = 0,$$

para que essa igualdade seja verdadeira $(r^2 - \lambda) = 0$, então

$$r = \pm\sqrt{\lambda}, \quad (39)$$

então a solução geral é uma combinação linear das soluções com cada valor. Assim, substituindo a equação (39), na equação (37) para cada valor de r , então pode ser reescrita como

$$u_1(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}. \quad (40)$$

O mesmo processo feito para determinar a solução da função dependente do espaço pode ser feita para determinar a solução em função do tempo, assim

$$\frac{d^2(u_2(t))}{dt^2} - \lambda v^2 u_2 = 0, \quad (41)$$

encontra-se,

$$s = \pm\sqrt{\lambda}v,$$

logo sua solução é

$$u_2(t) = c_3 e^{\sqrt{\lambda}vt} + c_4 e^{-\sqrt{\lambda}vt}, \quad (42)$$

Substituindo as equações (40) e (42) na equação (30), temos

$$u(x, t) = (c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}) (c_3 e^{\sqrt{\lambda}vt} + c_4 e^{-\sqrt{\lambda}vt}). \quad (43)$$

Aplicando as condições de contorno $u(0, t) = u(l, t) = 0$, na solução geral (43), temos então

$$u(0, t) = (c_1 e^0 + c_2 e^0) (c_3 e^{\sqrt{\lambda}vt} + c_4 e^{-\sqrt{\lambda}vt}) = 0, \quad (44)$$

$$u(l, t) = (c_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}l}) (c_3 e^{\sqrt{\lambda}vt} + c_4 e^{-\sqrt{\lambda}vt}) = 0, \quad (45)$$

nota-se que para a equação (44) seja nula, as constantes devem ser $c_1 = -c_2$. Isolando c_1 na equação (45), tem-se

$$c_1 (e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0,$$

então para que a equação seja nula, tem-se que $(e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0$, desta forma

$$e^{\sqrt{\lambda}l} = e^{-\sqrt{\lambda}l},$$

$$\frac{e^{\sqrt{\lambda}l}}{e^{-\sqrt{\lambda}l}} = 1,$$

$$e^{2\sqrt{\lambda}l} = 1,$$

comparando com a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad (46)$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta, \quad (47)$$

onde i é a unidade complexa e para $\theta = 2n\pi$, sendo n é um número inteiro ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$) temos

$$e^{i2n\pi} = \frac{\cos 2n\pi}{1} + \frac{i\sin 2n\pi}{0},$$

sendo assim $e^{i2n\pi} = 1$, fazendo a seguinte relação

$$e^{2\sqrt{\lambda}l} = e^{i2n\pi}, \quad (48)$$

vê-se que

$$\sqrt{\lambda} = \frac{in\pi}{l}, \quad (49)$$

reescrevendo a equação (43), para cada n termos, obtém-se

$$u_n(x, t) = \left(c_1 e^{\frac{in\pi x}{l}} - c_1 e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right) \left(c_3 e^{\frac{in\pi vt}{l}} + c_4 e^{-\frac{in\pi vt}{l}} \right), \quad (50)$$

$$u_n(x, t) = c_1 \left(e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right) \left(c_3 e^{\frac{in\pi vt}{l}} + c_4 e^{-\frac{in\pi vt}{l}} \right), \quad (51)$$

isso indica que existem infinitas soluções para cada n possível, portanto, $u_n(x, t)$ é uma solução para cada valor de n . Utilizando as equações (46) e (47) obtém-se

$$c_1 \left(e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right) = c_1 \left(\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right),$$

$$c_1 \left(e^{\frac{in\pi x}{l}} + e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right) = 2c_1 i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$c_3 e^{\frac{in\pi vt}{l}} + c_4 e^{-\frac{in\pi vt}{l}} = c_3 \cos\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) + c_3 i \operatorname{sen}\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) + c_4 \cos\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) - c_4 i \operatorname{sen}\left(\frac{vn\pi t}{l}\right),$$

$$c_3 e^{\frac{in\pi vt}{l}} + c_4 e^{-\frac{in\pi vt}{l}} = (c_3 + c_4) \cos\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) + i(c_3 - c_4) \operatorname{sen}\left(\frac{vn\pi t}{l}\right),$$

desse modo, as soluções gerais são da forma

$$u_1(x) = c'_1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (52)$$

$$u_2(t) = c'_3 \cos\left(\frac{vn\pi t}{l}\right) + c'_4 \operatorname{sen}\left(\frac{vn\pi t}{l}\right), \quad (53)$$

sendo que $c'_1 = 2c_1i$, $c'_3 = c_3 + c_4$, $c'_4 = i(c_3 - c_4)$, são constantes arbitrárias. Substituindo as expressões (52) e (53) na equação (51), obtém-se:

$$u_n(x, t) = \left(c'_1 \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \right) \left(c'_3 \cos \left(\frac{vn\pi t}{l} \right) + c'_4 \text{sen} \left(\frac{vn\pi t}{l} \right) \right), \quad (54)$$

assim

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \left(\frac{n\pi vt}{l} \right) + B_n \text{sen} \left(\frac{n\pi vt}{l} \right) \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right). \quad (55)$$

Onde A_n e B_n são constantes arbitrarias, obtidas da definição de c'_1 , c'_3 e c'_4 , da forma que $A_n = c'_1 \cdot c'_3$ e $B_n = c'_1 \cdot c'_4$. Como a equação da onda (29) é linear homogênea, a soma das soluções também é solução. Essa equação apresenta as características da série de Fourier, a qual é dada por:

$$u(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \left(\frac{n\pi t}{l} \right) + B_n \text{sen} \left(\frac{n\pi t}{l} \right) \right). \quad (56)$$

Sendo assim o passo seguinte é aplicar as condições iniciais $u(x, 0) = f(x)$ e $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x)$ de tal modo que sejam satisfeitas na forma da série de Fourier e determinar as constantes da série. Aplicando a terceira condição de contorno $u(x, 0) = f(x)$ na equação (55), tem-se

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right), \quad (57)$$

isto é, a função $f(x)$ é de tal modo que pode desenvolvê-la em series de Fourier de senos no intervalo $(0, l)$. Então a constante A_n pode ser determinada pela propriedade de ortogonalidade da função seno. Multiplicando a equação (57) por $\text{sen} \left(\frac{m\pi x}{l} \right)$ e integrando os termos, tem-se

$$\int_0^l f(x) \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{l} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^l \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{l} \right) dx,$$

para os casos de $n \neq m$ e $n = m$, obtém-se

$$\int_0^l \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ \frac{l}{2}, & \text{se } n = m \end{cases}$$

tomando o caso de $n = m$

$$\int_0^l \left(\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)^2 dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{l}\right)}{\frac{2n\pi}{l}} \right) \Bigg|_0^l = \frac{l}{2},$$

então

$$\int_0^l f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{l}{2}$$

isolando a constante A_n tem-se

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx. \quad (58)$$

Derivando a equação (55) em relação a t , tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{n\pi v}{l} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi v t}{l}\right) + B_n \frac{n\pi v}{l} \cos\left(\frac{n\pi v t}{l}\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (59)$$

aplicando a quarta condição $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \frac{n\pi v}{l} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (60)$$

analogamente ao caso da determinação de A_n pode-se realizar o mesmo processo para determinar B_n , dessa forma tem-se

$$B_n \frac{n\pi v}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx,$$

então obtém-se

$$B_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^l g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx. \quad (61)$$

Portanto, a solução formal da equação da onda com as condições dadas nesse capítulo é dada equação (55), onde os coeficientes A_n e B_n são calculados pela série de Fourier em senos, expressas nas equações (58) e (61) (FIGUEIREDO, 2009).

CAPÍTULO 3 - SOLUÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo será abordado o método numérico conhecido como método de diferenças finitas para obter uma solução aproximada da equação da onda com problema de valor inicial. Para o entendimento deste método será abordado neste capítulo conceitos sobre a expansão da series de Taylor para formular a equação do método de diferenças finitas, e para garantir a estabilidade do método será determinado o intervalo de estabilidade.

3.1 Solução numérica da equação da onda pelo método de diferenças finitas

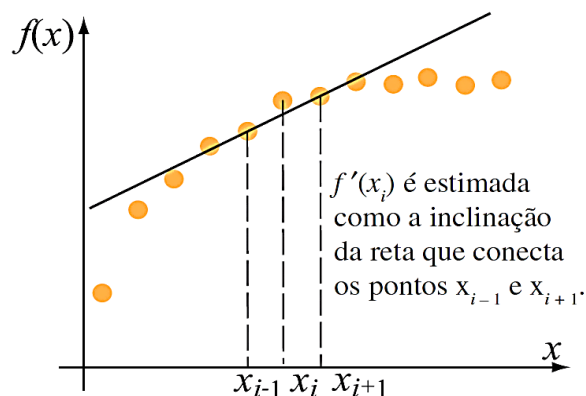
A vantagem na utilização do Método de Diferenças Finitas em problemas de modelo contínuos consiste em tais esquemas serem mais rápido e práticos se comparado a outros métodos numéricos, para a montagem do sistema linear de equações algébricas resultante, devido a facilidade das operações a serem usadas, tornando assim uma alternativa confiável para resolução de equações diferenciais (NOVAIS e CUNHA, 2012).

O método numérico das diferenças finitas é usado como intuito de obter uma solução aproximada de uma equação diferencial parcial, por intermédio da adoção de expansões de Series de Taylor, em pontos discretos da função. A ideia básica desse método é transformar a resolução de uma equação diferencial em um sistema de equações algébricas, substituindo as derivadas por diferenças finitas. Quando o domínio tem mais de uma variável, a ideia acima é aplicada para cada uma das variáveis separadamente (RUGGIERO e LOPES, 1996).

3.1.1 Series de Taylor

A série de Taylor é uma série de funções, mais precisamente uma expansão de uma função analítica $f(x)$ na vizinhança de um ponto $x = x_i$ em que x assume um valor qualquer, como mostra a Figura 6.

Figura 6: Diferenciação numérica usando aproximação por diferenças finitas.



Como mostra na Figura 6, a derivada no ponto x_i é aproximada pela inclinação da reta nos pontos vizinhos antes e depois do ponto. A exatidão da aproximação por diferenças finitas depende dos pontos do conjunto dados, do espaçamento entre os pontos e o método da solução usada na aproximação (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008).

Esta expansão é uma maneira de encontrar o valor dessa função em um ponto próximo a algum ponto conhecido, ou seja, onde se conhece o valor da função, o valor obtido através da série de Taylor é apenas uma aproximação.

A expansão em série de Taylor para uma função $f(x)$, $0 \leq x \leq l$ de uma única variável é dada por:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{df}{dx} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}. \quad (62)$$

A expansão da série de Taylor para uma função com duas variáveis é resolvida com derivadas parciais (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008). Sendo sua expansão de $f(x, t)$, em torno do ponto (x_0, t_0) é dada por

$$\begin{aligned} f(x, t) = & f(x_0, t_0) + \left[(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x} + (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t} \right] \\ & + \frac{1}{2!} \left[(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(x - x_0)(t - t_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right. \\ & \left. + (t - t_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right] + \dots \\ & + \frac{1}{n!} \left[\sum_{m=0}^n \frac{n!}{m! (n - m)!} (x - x_0)^m (t - t_0)^{n-m} \frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial t^{n-m}} \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

Utilizando a expansão em série de Taylor em função da variável temporal t , na forma avançada, ou seja, no tempo t_{k+1} , tomando que $k = \Delta t = t - t_0$

$$u(x_i, t_{k+1}) = u(x_i, t_k) + k \frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial t^2} + \dots + \frac{k^n}{n!} \frac{\partial^n u(x_i, t_k)}{\partial t^n}, \quad (64)$$

fazendo agora a expansão de Taylor na forma regressiva, ou seja, no tempo t_{k-1}

$$u(x_i, t_{k-1}) = u(x_i, t_k) - k \frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial t^2} - \dots + \frac{k^n}{n!} \frac{\partial^n u(x_i, t_k)}{\partial t^n}, \quad (65)$$

representando $u(x_i, t_k) = u_i^k$, então somando as expressões (64) e (65), obtém-se

$$u_i^{k+1} + u_i^{k-1} = 2u_i^k + k^2 \frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial t^2} + \frac{k^4}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, t_k)}{\partial t^4} + \dots$$

truncando esta série do termo de quarta ordem em diante e isolando a derivada de segunda ordem, chega-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{k^2} + \vartheta(\delta t)^2. \quad (66)$$

O termo $\vartheta(\delta t)^2$ significa o erro local de truncamento, devido os termos truncados da série de Taylor, a partir da derivada de quarta ordem (NOVAIS e CUNHA, 2012). O truncamento pode ser definido como a soma de todos os termos do polinômio de grau n limitando a mesma em um grau menor, ou seja, o método numérico usa uma aproximação para resolver o problema. Como a série está sendo aproximada para um número finitos de termos ocorrerá uma diferença do valor real (exato) da solução da EDP e o valor aproximado da solução da equação de diferenças finitas. Este erro de aproximação é chamado de erro de truncamento (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008).

Pode-se obter uma aproximação para a derivada no espaço de forma semelhante, tomando que $h = \Delta x = x - x_0$, desta forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + \vartheta(\delta x)^2, \quad (67)$$

então substituindo os valores encontrados na equação (66) e (67) na equação da onda (9), obtém-se

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{k^2} = v^2 \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2}, \quad (68)$$

isolando o termo da função temporal na forma avançada, tem-se que

$$u_i^{k+1} = 2u_i^k - u_i^{k-1} + \left(\frac{v^2 k^2}{h^2}\right) (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k),$$

tomando $\frac{v^2 k^2}{h^2} = \alpha$ e distribuindo na equação

$$u_i^{k+1} = -u_i^{k-1} + \alpha(u_{i+1}^k + u_{i-1}^k) + 2(1 - \alpha)u_i^k. \quad (69)$$

A equação (69) representa a equação da onda pelo método numérico de diferenças finitas que será utilizada para fazer as aproximações dos exemplos de propagação da onda na corda. Que na forma matricial pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ u_3^{k+1} \\ \vdots \\ u_n^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_1^{k-1} \\ -u_2^{k-1} \\ -u_3^{k-1} \\ \vdots \\ -u_n^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (2 - 2\alpha) & \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & (2 - 2\alpha) & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & (2 - 2\alpha) & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (2 - 2\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ u_3^k \\ \vdots \\ u_n^k \end{bmatrix} \quad (70)$$

A matriz (70) é conhecida como matriz tridiagonal, devido que somente a diagonal central e as adjacentes apresentam coeficientes diferentes de zero. A matriz só é válida de u_2 a u_{n-1} , onde deve-se programar adequadamente no software a ser utilizado as condições de contorno do problema a ser analisado.

Como as soluções numéricas em geral não são exatas, dois tipos de erros podem ocorrer quando se utilizar o método numérico na resolução de algum problema. São eles, o erro de arredondamento e erro de truncamento como já foi mencionado. Erros de arredondamento depende do procedimento usado pelos computadores para realizar os cálculos. Erros de truncamento são causados pela natureza aproximada do método usado para calcular a solução em cada incremento (passo). Nesse sentido, dependendo dos métodos usados, mais sujeita à instabilidade o método numérico apresentará (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008).

3.2 Condição de estabilidade do método explícito

A maioria das equações diferenciais pode ser resolvida numericamente e dessa forma é importante considerar as informações qualitativas obtidas da resolução da equação. Então ao resolver numericamente uma EDP espera-se que o erro introduzido em cada passo não se propague à medida que está avançando a solução da equação.

Uma maneira de tornar estável a solução numérica é variar o passo de integração h e a discretização temporal k e analisar seu comportamento para que não ocorra nenhum erro grave na solução do problema. Conforme diminui o passo de integração h , a solução numérica fica mais precisa, porém em algumas situações o erro numérico cresce, nesse caso tornar-se a solução instável (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008).

No caso do método das diferenças finitas, uma maneira de estabilizar a solução numérica é escolher convenientemente os valores de $\frac{k^2}{h^2}$ (SAIKI, 2006). Para determinar as condições de estabilidade, considera-se uma solução da forma:

$$u_{n,m} = e^{i\beta nh} \theta^{mk}, \quad (71)$$

sendo, β um parâmetro, $i = \sqrt{-1}$, n sendo números inteiros para os passos na variável espacial h e m sendo números inteiros para os passos na variável temporal k . Substituindo a expressão (71) na equação (69), obtém-se

$$\begin{aligned} e^{i\beta nh} \theta^{(m+1)k} &= -e^{i\beta nh} \theta^{(m-1)k} + \alpha(e^{i\beta(n+1)h} \theta^{mk} + e^{i\beta(n-1)h} \theta^{mk}) \\ &+ 2(1 - \alpha)e^{i\beta nh} \theta^{mk}, \end{aligned} \quad (72)$$

dividindo ambos os lados por $e^{i\beta nh} \theta^{mk}$

$$\theta^k = -\theta^{-1k} + \alpha(e^{i\beta h} + e^{-i\beta h}) + 2(1 - \alpha), \quad (73)$$

sabendo que

$$\cos(\beta h) = \frac{e^{i\beta h} + e^{-i\beta h}}{2}, \quad (74)$$

tem se

$$\theta^k + \theta^{-1k} = 2(1 - \alpha) + 2\alpha \cos(\beta h), \quad (75)$$

fazendo a relação trigonométrica do cosseno

$$\cos(\beta h) = 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\beta h}{2}\right), \quad (76)$$

substituindo (76) em (75), obtém-se

$$\theta^k + \theta^{-1k} = 2(1 - \alpha) + 2\alpha \left(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) \quad (77)$$

$$\theta^k + \frac{1}{\theta^k} - 2 + 4\alpha \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) = 0,$$

Multiplicando os membros da equação (77) por θ

$$\theta^{2k} + 1 - 2 \left(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) \theta^k = 0, \quad (78)$$

nota-se que a equação (78) é uma equação do segundo grau, cuja solução é dada pela formula de Bhaskara: $\theta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, onde

$$a = 1,$$

$$b = -2 \left(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right),$$

$$c = 1,$$

logo sua solução é

$$= \frac{2 \left(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) \pm \sqrt{\left\{ 2 \left(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) \right\}^2 - 4}}{2},$$

simplificando

$$\theta = \left(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) \pm \sqrt{\left(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right)^2 - 1}, \quad (79)$$

como a raiz não pode ser negativa para que a solução esteja nos reais, então

$$\left(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right)^2 > 1$$

logo

$$1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) > 1, \quad (80)$$

ou

$$1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) < -1$$

Visto que $\alpha \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)$ é sempre maior ou igual a 0, tonando assim a inequação (80) incorreta para os números reais. Então é necessário reescrever na forma de números complexões, sendo $i = \sqrt{-1}$

$$\theta = \left(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right) \pm i \sqrt{1 - \left(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)^2}, \quad (81)$$

para

$$\left(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)^2 \leq 1,$$

para o valor absoluto de θ , tem-se

$$|\theta|^2 = \left(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)^2 + \left(\sqrt{1 - \left(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)^2}\right)^2, \quad (82)$$

$$\theta^2 = \left(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)^2 + 1 - \left(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)^2 = 1,$$

portanto, o esquema será estável quando

$$\left(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)^2 \leq 1 \quad (83)$$

ou seja,

$$-1 \leq \left(1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) \leq 1, \quad (84)$$

Portanto, conclui-se que a equação será estável se $\alpha = \left(\frac{kv}{h} \right)^2 \leq 1$, sendo $\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \leq 1$. O erro atrelado a solução do problema não crescerá desde que $\frac{k}{h} \leq \frac{1}{v}$. Pois como α depende do problema proposto, (84) delimita a largura para o passo de integração para ser utilizado no problema. Isso significa que o erro de truncamento não crescerá à medida que a solução avança independente da largura do passo de integração.

CAPÍTULO 4 - APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL

No presente capítulo serão mostrados os resultados analítico e numérico e será feito uma comparação entres os métodos para problemas como valores iniciais de contorno. Primeiro será abordado à forma de resolução analítica, e posteriormente a solução numérica. Onde o objetivo é comparar os dois métodos de resoluções e analisa-las. Para o método analítico será utilizado o método de separação de variáveis abordado na seção 2.1 e para a solução numérica será aplicado o método de diferenças finitas abordado na seção 3.1 com auxilio computacional.

4.1 Problema de onda parabólica

Considere uma corda de um metro de comprimento com suas extremidades fixas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad t > 0 \quad (85)$$

com as condições de contorno

$$u(0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = 0,$$

e as condições iniciais

$$u(x, 0) = x(1 - x),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Tomando $u(x, t)$ um produto de duas funções como a equação (30), uma função dependendo só de x e outra do t onde, $u(x, t) = u_1(x) \cdot u_1(t)$, e resolvendo pelo método de separação de variáveis, assim como no capítulo 2. Obtém-se a expressão (43) e aplicando as condições de contorno $u(0, t) = u(1, t) = 0$, na qual chegará as soluções (44) e (45), concluindo assim que $c_1 = -c_2$, então fazendo a relação (48) e sabendo que $l = 1$ temos

$$\sqrt{\lambda} = in\pi, \quad (86)$$

então a solução geral ficará

$$u(x, t) = c_1(e^{in\pi x} - e^{-in\pi x})(c_3e^{in\pi vt} + c_4e^{-in\pi vt}), \quad (87)$$

fazendo a relação (46) e (47), temos

$$e^{in\pi x} = \cos n\pi x + i\operatorname{sen}(n\pi x),$$

$$e^{-in\pi x} = \cos n\pi x - i\operatorname{sen}(n\pi x),$$

subtraindo as equações

$$e^{in\pi x} - e^{-in\pi x} = i\operatorname{sen}(n\pi x),$$

então

$$u(x, t) = c'_1\operatorname{sen}(n\pi x)(c_3e^{v\sqrt{\lambda}t} + c_4e^{-v\sqrt{\lambda}t}), \quad (88)$$

a constante $c'_1 = ic_1$ aplicando novamente a relação (46) e (47), temos

$$e^{in\pi t} = \cos(vn\pi t) + i\operatorname{sen}(vn\pi x),$$

$$e^{-in\pi t} = \cos(vn\pi t) - i\operatorname{sen}(vn\pi x),$$

somando as equações

$$c_3e^{v\sqrt{\lambda}t} + c_4e^{-v\sqrt{\lambda}t} = c_3\cos(vn\pi t) + c_3i\operatorname{sen}(vn\pi x) + c_4\cos(vn\pi t) - c_4i\operatorname{sen}(vn\pi t),$$

$$c_3e^{v\sqrt{\lambda}t} + c_4e^{-v\sqrt{\lambda}t} = (c_3 + c_4)\cos(vn\pi t) + i(c_3 - c_4)\operatorname{sen}(vn\pi t),$$

substituído na solução (88)

$$u_n(x, t) = (c'_1\operatorname{sen}(n\pi x))(c'_3\cos(vn\pi t) + c'_4\operatorname{sen}(vn\pi t)), \quad (89)$$

sendo as constantes $c'_3 = (c_3 + c_4)$ e $c'_4 = i(c_3 - c_4)$, e derivando a equação em relação ao tempo

$$\frac{du_n(x, t)}{dt} = (c'_1\operatorname{sen}(n\pi x))(-c'_3\operatorname{sen}(vn\pi t)v n\pi + c'_4\cos(vn\pi t)v n\pi).$$

Aplicando a condição $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$

$$u_n(x, t) = c'_1 \text{sen}(n\pi x) \left(-\underbrace{c'_3}_{0} \text{sen}(vn\pi 0) vn\pi + c'_4 \underbrace{\cos(vn\pi 0)}_1 vn\pi \right) = 0,$$

então a constante $c'_4 = 0$ para que a igualdade seja verdadeira, a expressão (89) torna-se

$$u_n(x, t) = c'_n \text{sen}(n\pi x) \cos(vn\pi t), \quad (90)$$

a constante $c_n = c'_1 c'_3$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \text{sen}(n\pi x) \cos(vn\pi t), \quad (91)$$

para determinar a constante c'_n aplica-se a condição $u(x, 0) = x(1 - x)$ e então utilizando a série de Fourier, analogamente à equação (58),

$$c'_n = 2 \int_0^1 x(1 - x) \text{sen}(n\pi x) dx, \quad (92)$$

usa-se a regra de integração por partes

$$\int_0^1 u dv = uv|_0^1 - \int_0^1 v du, \quad (93)$$

tomando

$$u = x - x^2,$$

$$du = (1 - 2x) dx,$$

$$dv = \text{sen}(n\pi x),$$

$$v = \int_0^1 \text{sen}(n\pi x) = -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1,$$

então

$$\frac{c'_n}{2} = \int_0^1 x(1-x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx = x - x^2 \left(-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} (1-2x) dx,$$

usando o limite de integração o primeiro termo é zero, devido $x - x^2 = 0$. Porém há necessidade de usar a integração por partes no segundo termo da equação, tomando os termos como

$$u = 1 - 2x,$$

$$du = -2dx,$$

$$dv = \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} dx,$$

$$v = \int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} = \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{(n\pi)^2} \Big|_0^1,$$

aplicando na equação (93)

$$\frac{c'_n}{2} = \int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} (1-2x) dx = (1-2x) \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{(n\pi)^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{(n\pi)^2} (2dx),$$

o primeiro termo zera, devido ao seno de zero ou qualquer múltiplo inteiro de n vezes π serem zero. Integrando o segundo termo, e retirando as constantes da integração, chega-se

$$c'_n = \frac{4}{(n\pi)^2} \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \frac{4}{(n\pi)^2} \left(-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \right) \Big|_0^1,$$

usando os limites de integração

$$c'_n = \frac{4}{(n\pi)^3} \left(-\underbrace{\cos n\pi}_{-1} + \underbrace{\cos 0}_1 \right),$$

para que a solução não seja trivial n tem que ser somente os ímpares, assim a constante é

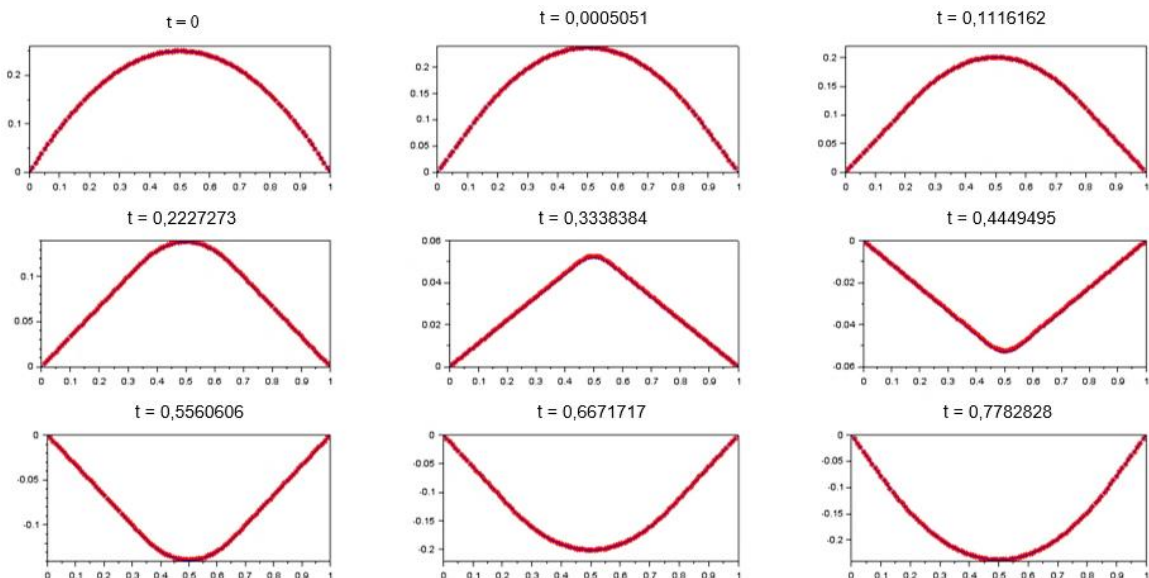
$$c'_n = \frac{8}{(n\pi)^3}, \quad (94)$$

então resolvendo pelo método de separação de variáveis, a solução geral do problema é

$$u(x, t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpares}}}^{\infty} \frac{8}{(n\pi)^3} \text{sen}(n\pi x) \cos(n\pi vt). \quad (95)$$

A seguir será mostrado o Gráfico 1 da comparação entre as soluções analíticas (95) e numéricas (69) obtidas pelos métodos de separação de variável e diferenças finitas, respectivamente. Para a comparação dos métodos foram atribuídos os valores de $h = 100$, $t = 1$, $v = 1$, $n = 1$ e para assegurar a estabilidade numérica considerou-se $\alpha = 0,01$

Gráfico 1: Representação gráfica dos resultados analíticos e numéricos da onda parabólica, sendo as linhas em azul e as em vermelho pontilhada as funções de onda numérica e analítica, respectivamente.



Fonte: Autoria própria, 2018

Analisando o Gráfico 1, percebe-se um ajuste satisfatório nos dois métodos. Constatamos um movimento simétrico em relação ao ponto $x = \frac{l}{2}$ que o pulso de onda se trata de uma onda parabólica com concavidade voltada para abaixo devido o pulso inicial ser uma equação do segundo grau e coeficiente ser menor que zero, e podemos notar que amplitude máxima é de 0,25 m, pode-se chegar nesse valor pela fórmula $A_y = -\frac{\Delta}{4a}$ proveniente da equação de segundo grau ou pelo coeficiente (94). No decorrer do tempo a amplitude de vibração começa a diminuir. Como estamos considerando um caso ideal, ou seja, sem perdas de energia a amplitude mínima chegará até $-0,25$ m.

Ao analisar a equação (95) vemos que onda gerada é periódica no tempo, realizando assim um movimento vibratório com frequência $f = 0,5 \text{ Hz}$. A função cosseno serve como

um fator variante na amplitude da onda, assim, devido o cosseno variar de -1 a +1 com o tempo, então a amplitude deve variar e $-A_{m\acute{a}x}$ a $+A_{m\acute{a}x}$, onde $A_{m\acute{a}x} = 0,25 \text{ cm}$. Ao analisar o gráfico percebe-se que o pulso não está se propagando, o mesmo está somente vibrando, variando assim sua amplitude.

4.2 Problema de superposição ondulatória

Considere o seguinte problema de superposição de ondas (SPIEGEL, 1976)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; 0 \leq x \leq 2; t \geq 0, \quad (96)$$

com as seguintes condições de contorno

$$u(0, t) = 0,$$

$$u(2, t) = 0,$$

e com as condições iniciais, considerando os coeficientes em centímetros (cm) e x em metros (m)

$$u(x, 0) = 6\text{sen}\pi x - 3\text{sen}4\pi x,$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Utilizando o método de separação de variáveis, sendo $u(x, t) = u_1(x) \cdot u_2(t)$, onde $u_1(x)$ depende somente de x , e $u_2(t)$, dependendo de t . substituindo na equação diferencial e usando os passos do capítulo 3, tem-se

$$u_n(x, t) = \left(c'_1 \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \right) \left(c'_3 \cos \left(\frac{vn\pi t}{2} \right) + c'_4 \text{sen} \left(\frac{vn\pi t}{2} \right) \right). \quad (97)$$

Para determinar as constantes, é mais fácil aplicar primeiramente as condições as condições cujo resultado é zero, tal como $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$, sendo assim, derivando em relação a t , e substituindo a velocidade por 4, temos

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \left(c'_1 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \right) (-2n\pi c'_3 \operatorname{sen}(2n\pi t) + 2n\pi c'_4 \operatorname{cos}(2n\pi t)),$$

aplicando agora a condição $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = (c'_1 \operatorname{sen} n(\pi x)) (4n\pi c'_4) = 0, \quad (98)$$

de modo que para obter uma solução nula de (98), então $c'_4 = 0$. Assim, (97) se reescreve

$$u_n(x, t) = c'_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2} \right) \operatorname{cos}(2n\pi t), \quad (99)$$

Sendo $c'_n = c'_1 \cdot c'_3$. Para satisfazer a última condição $u(x, 0) = 6 \operatorname{sen} \pi x - 3 \operatorname{sen} 4\pi$, como a combinação linear é de duas ou mais soluções também é solução, logo, aplicar o princípio de superposição para obter a solução

$$u_n(x, t) = c'_{n_1} \operatorname{sen} \left(\frac{n_1 \pi x}{2} \right) \operatorname{cos}(2n_1 \pi t) + c'_{n_2} \operatorname{sen} \left(\frac{n_2 \pi x}{2} \right) \operatorname{cos}(2n_2 \pi t), \quad (100)$$

aplicando então $t = 0$, chegasse a

$$u_n(x, t) = c'_{n_1} \operatorname{sen} \left(\frac{n_1 \pi x}{2} \right) + c'_{n_2} \operatorname{sen} \left(\frac{n_2 \pi x}{2} \right) = 6 \operatorname{sen}(\pi x) - 3 \operatorname{sen}(4\pi x)$$

essa igualde é verdadeira somente se $c'_{n_1} = 6$, $n_1 = 2$, $c'_{n_2} = -3$ e $n_2 = 8$. Assim, a solução procurada é

$$u(x, t) = 6 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{cos}(4\pi t) - 3 \operatorname{sen}(4\pi x) \operatorname{cos}(16\pi t) \quad (101)$$

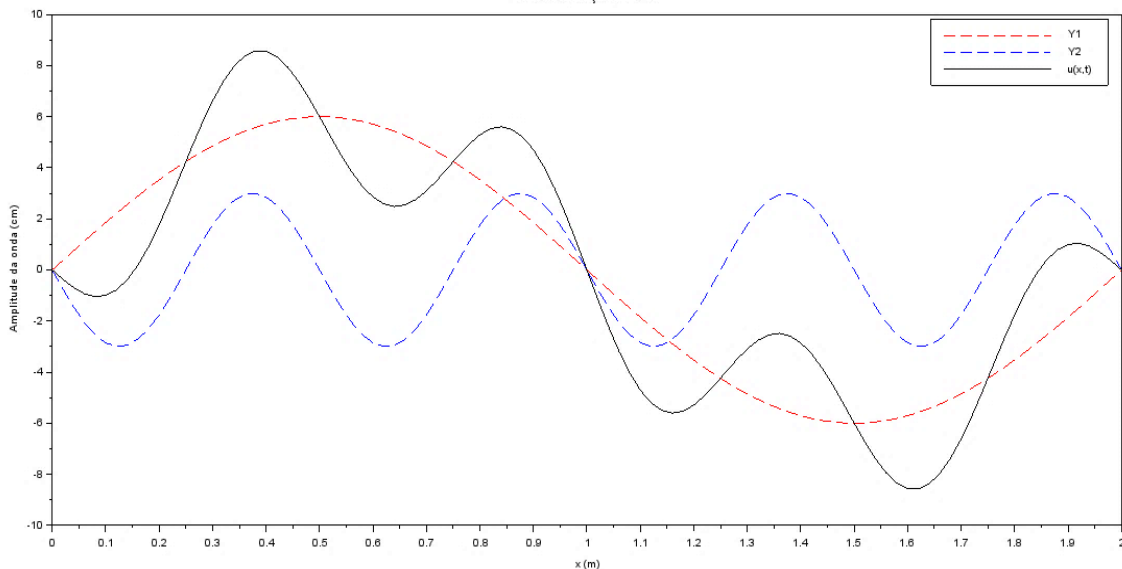
$$Y_1(x, t) = 6 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{cos}(4\pi t) \quad (102)$$

$$Y_2(x, t) = -3 \operatorname{sen}(4\pi x) \operatorname{cos}(16\pi t) \quad (103)$$

Este problema de valores de contorno pode ser interpretado fisicamente como uma superposição de ondas, no qual vários efeitos podem ocorrer simultaneamente, sendo o efeito resultante a soma das duas ou mais ondas (HALLIDAY, RESNICK e WALKER, 2009).

Este problema trata-se de uma interferência ondulatória devido a equação apresentar duas funções de onda que se propagam simultaneamente no mesmo meio. Analisando separadamente os termos da equação (101) para o tempo igual zero, vemos a forma das equações (102) e (103), representada no Gráfico 2. Nota-se que o coeficiente da equação (102) representa a amplitude, na qual é igual a 6 cm, e o argumento da função seno representa a frequência da onda. Na equação (103) a amplitude é -3 cm e a frequência é 4 vezes maior que a equação (102), conseqüentemente o comprimento de onda é 4 vezes menor, pode-se calcular a frequência do modo fundamental de vibração em uma corda com extremidades fixas é da pela equação $f = nv/2l$.

Gráfico 2: Representação analítica das equações (100), (101) e (102) para $t = 0$.



Fonte: Autoria própria, 2018

Ao somar as amplitudes em determinado ponto sua resultante pode ampliar ou diminuir dependendo se a interferência for construtiva ou destrutiva, respectivamente. Nota-se que a onda passa por várias ondas construtivas, como nos pontos $x_3 = 0,375$ e $x_7 = 0,875$, nesses pontos as duas ondas estão com as amplitudes positivas, para esses casos as ondas se somam. Também é possível ver as ondas destrutivas nos pontos $x_1 = 0,125$ e $x_5 = 0,625$, logo as ondas se subtraem, ocasionando assim a forma da onda resultante. A Tabela 2 mostra as amplitudes das ondas nos pontos da corda (foi considerado 2 casas decimais e apenas metade da corda $x = l/2$),

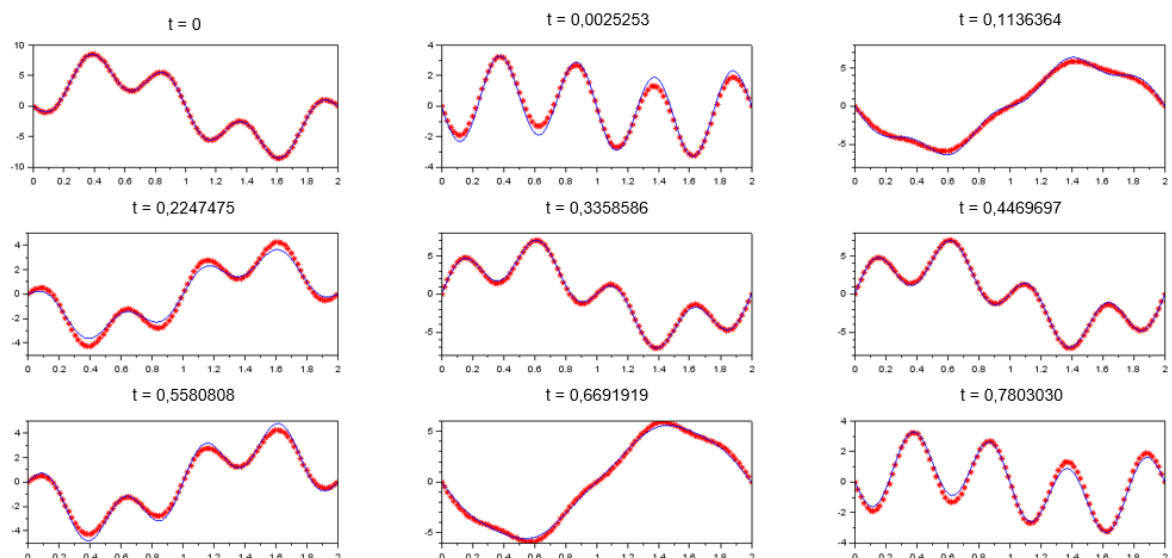
Tabela 2: Amplitudes das ondas $Y_1(x, t)$, $Y_2(x, t)$ e $u(x, t)$ nos pontos da corda.

| Pontos (m) | 0,125 | 0,25 | 0,375 | 0,5 | 0,625 | 0,75 | 0,875 | 1 |
|--|-------|------|-------|-----|-------|------|-------|---|
| Amplitude (cm) da onda $Y_1(x, t)$ | 2,30 | 4,24 | 5,54 | 6 | 5,54 | 4,24 | 2,30 | 0 |
| Amplitude (cm) da onda $Y_2(x, t)$ | -3 | 0 | 3 | 0 | -3 | 0 | 3 | 0 |
| Amplitude (cm) da onda resultante | -0,70 | 4,24 | 8,54 | 6 | 2,54 | 4,24 | 5,30 | 0 |

Fonte: Autoria Própria, 2018

Como já foi mencionado no problema 1 o cosseno em função do tempo ocasiona uma variação na amplitude da onda. Nota-se que na equação (103) a da frequência a amplitude varia 4 vezes mais rápida que a equação (102). Então para $t > 0$ o Gráfico 3 representa esse comportamento de interferências. Os resultados esboçados no Gráfico 3 mostra uma sequência da onda resultante para $t > 0$. Os resultados obtidos foram feitas através da equação analítica (101) e numérica (69), e para efeitos de comparação os gráficos estão sobrepostos para melhor visualização dos resultados alcançados. Para a comparação dos métodos foram atribuídos os valores de $h = 80$, $t = 1$, $v = 4$ e para critério de estabilidade utilizou $\alpha = 0,05$

Gráfico 3: Representação gráfica dos resultados analíticos e numéricos, sendo as linhas em vermelho pontilhado e em azul as em as funções analítica e numérica, respectivamente.



Fonte: Autoria própria, 2018

Ao analisar os resultados da equação analítica (101) com a numérica (69) notamos um ajuste satisfatório na comparação dos dois métodos. Nota-se que em alguns pontos do gráfico apresenta um erro de convergência, principalmente nas cristas e vales, possivelmente por que o problema envolve uma solução mais complicada. Vemos que em um ponto específico a forma altera rapidamente de construtivas para destrutivas, ocasionado este padrão observado no Gráfico 3.

A onda resultante de duas ondas menores representa uma característica de ondas reais, as quais dificilmente são apenas senoidais. Por exemplo, a onda em uma corda de um instrumento só é representada por um harmônico se for tencionada inicialmente no formato desse harmônico específico, o que é impraticável. Na maioria dos casos reais, a onda resultante é a combinação de vários harmônicos distintos, como no exemplo dado para duas ondas.

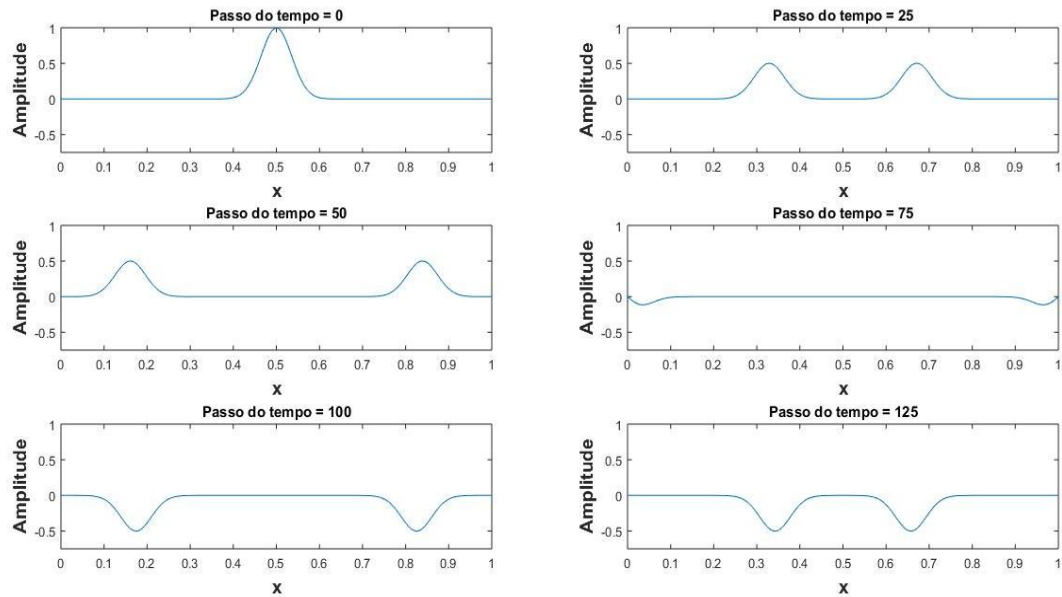
4.3 Problema de estabilidade do método de diferenças finitas

Será utilizado o método das diferenças finitas para verificar a estabilidade do método numérico. Para ilustrar o problema, considera-se uma corda com comprimento l com as extremidades fixas, inicialmente em repouso e com uma perturbação inicial na região central da corda $x = l/2$. Sendo a solução exata uma onda progressiva na forma de $u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + vt) + f(x - vt))$ (PINTO, 2013). O pulso inicial tem a função

$$f(x) = e^{-2x^2} \quad (104)$$

Analisando o Gráfico 4 verifica-se que com no instante $t = 0$ a amplitude do pulso inicial é 1 e após o instante 0 o pulso se divide em dois pulsos menores, sendo metade do primeiro e com velocidades opostas e com velocidade de propagação de 1 m/s. E ao tocar nas extremidades o pulso é refletido e sua fase inverte.

Gráfico 4: Representação gráfica dos resultados numéricos obedecendo a condição de estabilidade.

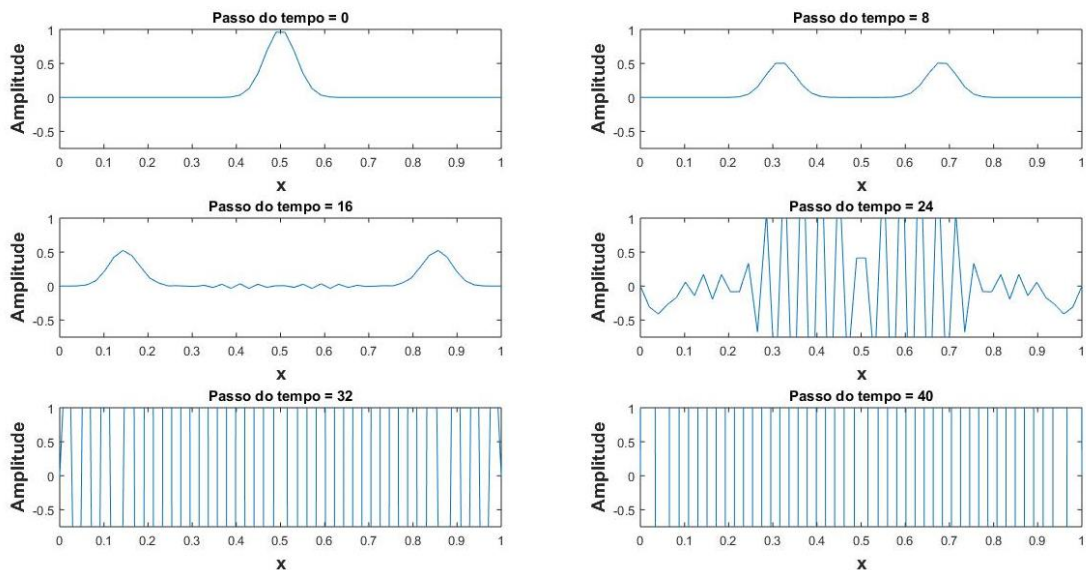


Fonte: Autoria própria, 2018

Para esse caso foi atribuído um valor para o parâmetro $\alpha = 1$ obedecendo assim a condição de estabilidade (84), tornando assim a condição estável para o problema.

O Gráfico 5 é um caso do método numérico sem a estabilidade, no qual o indexador atribuído foi $\alpha = 1,05$, ou seja, o valor de controle excedeu o parâmetro estabelecido de 0 a 1. Fazendo que a partir do passo de tempo 8 o gráfico começa apresentar instabilidade.

Gráfico 5: Representação gráfica dos resultados numéricos não obedecendo a condição de estabilidade.



Fonte: Autoria própria, 2018

Devido à instabilidade do método o gráfico não faz sentido físico, ou seja, uma corda não apresentará esse tipo de vibração em casos reais. Para que os resultados numéricos sejam confiáveis é importante escolher corretamente o parâmetro de estabilidade para que a equação numérica se aproxime ao máximo da solução analítica e não extrapole, causando assim um erro excessivo nas leituras computacionais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Contudo, levando em consideração a proposta da pesquisa, este trabalho buscou estudar a equação da onda unidimensional no aspecto físico conceitual e teórico, pois os estudos sobre onda são de suma importância para campo da física. Dessa forma, a demonstrar sua solução analítica pelo método de separação de variáveis, obedecendo as condições de contorno e iniciais para um problema em uma corda. Porém, nem toda equação diferencial parcial ter solução exata, por conseguinte, foi feito a demonstração da equação da onda numericamente pelo método de diferenças finitas centradas de segunda ordem, as quais poderão sanar eventuais problemas de ondas unidimensionais.

Visto que nos problemas apresentados no trabalho, houve uma convergência aceitável do método numérico em relação ao analítico, ocorrendo pequenas divergências nos picos da onda, possivelmente, por que o problema trata-se de uma equação mais complexas ou por que a onda numérica está mais rápida que a onda analítica, isso pode ter ocorrido devido a determinação imprecisa do valor de α , ocorrendo assim uma diferença na velocidade do método numérico e analítico.

Como mostrado no decorrer do trabalho, as soluções analíticas podem ser complexas para encontrar suas soluções, necessitando de vários passos para determinar a equação geral do problema. Por outro lado, a solução numérica encontrada pelo método das diferenças finitas é mais simples de se determinar e a mesma pode substituir, satisfatoriamente, qualquer solução analítica, uma vez determinada as condições de contorno e iniciais e é fundamental seguir os critérios de estabilidade. Sendo assim o método numérico apresenta um resultado confiável em relação ao a solução exata feita analiticamente.

Como perspectivas indica-se para um estudo mais avançado a expansão dos conceitos deste trabalho para as dimensões bi e tridimensionais da propagação da onda, analisando graficamente os efeitos ondulatórios nas variáveis espaciais e temporal de forma que os resultados possam ser aprovados, mostrando a eficiências do método de diferenças finitas para casos com mais dimensões.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9^a. ed. Rio de Janeiro: LTC, v. único, 2010.

FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 4^a. ed. Rio de Janeiro: IMPAR, 2009.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Método numérico para engenheiros e cientistas: uma introdução usando o MATLAB**. 1^a. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5^a. ed. Rio de Janeiro: Gen LTC, v. I, 2001.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física: gravitação, ondas e termodinâmica**. 8^a. ed. Campinas: LTC, v. II, 2009.

NOVAIS, A.; CUNHA, M. C. C. Métodos numéricos para equações diferenciais parciais. **Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**, São Carlos, v. IV, 2012. ISSN 2236-5915.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica 2: fluidos, oscilações e ondas, calor**. 3^a. ed. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, v. II, 2002.

PINTO, C. A. M. **Soluções da equação da onda unidimensional**. 2013. (Dissertação) - Universidade de Alveiro. Alveiro, p. 93. 2013.

PISKUNOV, N. **Cálculo diferencial e integral**. 11^a. ed. porto: [s.n.], v. II, 1997.

RUGGIERO, M. A.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2^a. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

SAIKI, M. E. **Equação da onda unidimensional: um estudo analítico e numérico**. 2006. Monografia (Graduação em Matemática) - Universidade Católica de Brasília - UCB. Brasília. 2006.

SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W. J. **Princípios de física: oscilações, ondas e termodinâmica**. 5^a. ed. São Paulo: Thomsom, v. II, 2004.

SPIEGEL, M. R. **Análise de Fourier**. 1^a. ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, v. I, 1976.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física para cientistas e engenheiros: mecânica, oscilações e ondas, termodinâmica**. 6^a. ed. Rio de Janeiro: LTC, v. I, 2009.

TORRES, C. M. A. et al. **Física ciência e tecnologia**. 3^a. ed. São paulo: Moderna, v. II, 2013.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física II**. 10^a. ed. São Paulo: PERSON Addison Wesley, 2003.