Universidade Federal do Pará
Campus Universitário de Castanhal
Faculdade de Matemática
Curso de Licenciatura Plena em Matemática

As Leis de Kepler sob o Ponto de Vista da Teoria da Gravitação Universal de Newton

RAFAEL AUGUSTO DUARTE GUIMARÃES

CASTANHAL - PA

2018

RAFAEL AUGUSTO DUARTE GUIMARÃES

As Leis de Kepler sob o Ponto de Vista da Teoria da Gravitação Universal de Newton

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará (UFPA), Campus Castanhal, como parte dos requisitos para a obtenção de Licenciado Pleno em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida

CASTANHAL - PA

2018

RAFAEL AUGUSTO DUARTE GUIMARÃES

As Leis de Kepler sob o Ponto de Vista da Teoria da Gravitação Universal de Newton

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará (UFPA), Campus Castanhal, como parte dos requisitos para a obtenção de Licenciado Pleno em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida

Aprovado em _____ de _______________ de __________

Conceito: _______________

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida
Faculdade de Matemática / UFPA - Orientador

Prof. Dr. Frayzer Lima de Almeida
Faculdade de Matemática / UFPA - Membro

Prof. Dr. Valdelírio da Silva e Silva
Faculdade de Matemática / UFPA - Membro

Ao meu Deus, Rei da minha vida,

à família e à futura companheira.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus no nome do Filho Jesus mediante a pessoa do Espírito Santo, pela sua rica misericórdia e graça, que diariamente me alcança para o fim de ser seu filho.

Aos meus pais Antônio Delci e Rosa Angélica, pelo apoio incondicional prestado em toda a minha vida, por serem meu incentivo na busca de ser uma pessoa melhor e principalmente por constituírem meu exemplo de humildade e bondade para com todos, sem distinção.

Ao meu irmão de sangue Breno Felipe pela irmandade sincera e verdadeira.

Aos meus tios João e Lauriceia e aos seus filhos, pela hospitalidade e auxílio prestado durante toda a minha vida acadêmica, sem dúvida, foram e sempre serão a minha segunda família.

Ao meu tio Paulo Augusto, pela confiança, ajuda e bondade em todos os instantes da caminhada e da vida acadêmica.

A minha amiga, namorada e futura esposa Joyce Guimarães, pelo companheirismo, incentivo, atenção, carinho e amor que me ofereceu nos últimos anos desta caminhada.

Aos meus amigos particulares que tive o privilégio de conhecer na faculdade, Alexandre, Eyder e Levi Carvalho, pelas trocas de experiências, momentos de descontração e ensinamentos que me proporcionaram como homens de Deus.

A Universidade Federal do Pará em nome de todos os meus professores que foram coparticipantes da minha formação acadêmica, especialmente ao Prof. Dr. Valdelírio da Silva e Silva pelas contribuições.

Ao meu orientador Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida, pelas sugestões, colaborações e ajuda na caminhada acadêmica.

Ele estende o norte sobre o vazio

e faz pairar a terra sobre o nada

(Livro de Jó, Capítulo 26, Versículo 7).

Resumo

Neste trabalho, realizamos um breve passeio pela a história da Gravitação e seus desdobramentos científicos, bem como fizemos menção de grandes estudiosos nesta área. Uma vez feito isso, abordamos os estudos de Kepler, e em seguida fizemos as considerações e as contribuições de Newton aos estudos daquele, através da Lei da Gravitação Universal e das deduções matemáticas das leis de Kepler. Por fim, enfocamos nas ideias de Albert Einstein e na Teoria da Relatividade.

Palavras-chave: Geocentrismo. Heliocentrismo. Leis Empíricas de Kepler. Lei da Gravitação Universal de Newton. Espaço-tempo.

Abstract

In this work, we take a brief tour of the history of Gravitation and its scientific developments, as well as mention of great scholars in this area. Once this is done, we approach Kepler's studies, and then make Newton's considerations and contributions to his studies through the Law of Universal Gravitation and the mathematical deductions of Kepler's laws. Finally, we focus on the ideas of Albert Einstein and the Theory of Relativity.

Keywords: Geocentrism. Heliocentrism. Kepler's Empirical Laws. Newton's Law of Universal Gravitation. Spacetime.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O céu noturno, com sua miríade de estrelas e planetas brilhantes, sempre fascinou as pessoas. Elas vêm tentando entender o que acontece ou como acontecem os movimentos dos astros no céu. Isto se deve pela influência que os fenômenos celestes exerciam sobre a vida dos povos mais antigos. Assim, a necessidade de estabelecer a época do plantio e colheita e sua relação com a posição do Sol, da Lua, e das estrelas, levou os astrônomos da Antiguidade a coletar um grande número de dados sobre os movimentos dos astros.

As primeiras tentativas para explicar o movimento dos corpos celestes foram devidas aos gregos, século IV a.C. Tentando produzir modelos que viessem a sintetizar esses movimentos, chegaram a estabelecer a organização geocêntrica, na qual todos os planetas estariam incrustados em esferas que giravam ao redor da Terra. Com este modelo, eles conseguiram prever com uma aproximação razoável, os movimentos dos corpos no céu. Durante muitos anos, no entanto, foram adquiridas novas observações que acabaram tornando o Universo grego complicado, bem como obsoleto.

Das várias tentativas de simplificação do modelo grego, aquela que obteve maior êxito, foi a teoria geocêntrica de Ptolomeu, no século II d.C. Ele propôs que os planetas se moviam em círculos, cujos centros giravam em torno da Terra. A marca distintiva de Ptolomeu em relação ao modelo grego foi a inserção dos movimentos que ele denominou de deferente e epiciclo, cuja a abordagem aqui tratada mais adiante.

No século XVI, Nicolau Copérnico apresentou um modelo mais simples para substituir aquele que reinava por aproximadamente 13 séculos. Ele propusera que o Sol estaria em repouso e os planetas girariam em torno dele em órbitas circulares, inclusive a Terra. Este sistema conseguia descrever os movimentos dos corpos celestes tão satisfatoriamente quanto o de Ptolomeu, com a vantagem de ser bem mais simples.

Todo esse desenvolvimento histórico-científico da Gravitação convergiu para os trabalhos ousados de dois grandes estudiosos, Johannes Kepler e Isaac Newton.

O astrônomo Tycho Brahe começou a desenvolver, anos após a morte de Copérnico, um importante trabalho de obtenção de medidas mais precisas das posições dos corpos celestes. Após seu falecimento, Kepler herdou seus dados e com eles, elaborou as três leis que levam seu nome. O interessante nas leis de Kepler, é que elas foram obtidas únicas e exclusivamente mediante dados observacionais, isto é, de forma empírica, sem uma base matemática para comprovar suas conclusões.

Deve-se a Newton em *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* de 1687, as deduções matemáticas das leis de Kepler. Aliás, essa comprovação científica será o cerne da discussão neste trabalho, disso surgiu o tema: *As Leis de Kepler Sob o Ponto de Vista da Teoria da Gravitação Universal de Newton.*

As motivações do desenvolvido deste trabalho resumem-se no fato de que as conclusões empíricas de Kepler, pôde ser comprovadas, muitos anos depois, mediante argumentos matemáticos por Newton, tais quais sintetizaram e sublevaram o alcance das leis de Kepler. Sua importância jaz no fato de que as leis foram obtidas mediante dados observacionais, chamados hoje de mineração de dados, análise de dados e etc., uma tendência muito valorizada no meio científico. Diante disso, podemos traçar os objetivos.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

- Identificar histórica e cientificamente as descobertas de estudiosos que auxiliaram a fundamentar a Gravitação como a conhecemos hoje.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Verificar como o modelo heliocêntrico se sobrepôs ao geocêntrico.
- Mostrar as contribuições de Isaac Newton para fundamentar as Leis de Kepler.
- Deduzir matematicamente as leis empíricas de Kepler.

Capítulo 2

UMA BREVE HISTÓRIA DA GRAVITAÇÃO

É interessante o fascínio que o ser humano sente pelo céu. Por exemplo, quem nunca admirou um pôr do Sol ou ficou perplexo por uma tempestade? Embora esses fenômenos sejam corriqueiros, muitos ainda não o compreendem. No entanto, nunca se conheceu tanto o Cosmo quanto na atualidade. Para que chegássemos ao cume de conhecimento do Universo de hoje, penoso foi o labor e o esforço. Muitos e muitos homens pensaram a respeito, as vezes acertaram, muitas vezes erraram e alguns chegaram a sacrificar a própria vida defendendo suas ideias contra a intolerância, a ignorância e o autoritarismo.

Remontemos aos tempos pré-históricos. Quando o ser humano vivia em grupos nômades, a preocupação com a sobrevivência num ambiente natural e hostil era crucial. Pescar, caçar, fugir de animais perigosos e abrigar-se das variações climáticas faziam parte do cotidiano do homem pré-histórico. Quando os primeiros indivíduos olharam para o céu e depararam com aquela imensa bola de fogo que lhes dava calor e luz e, à noite, com a Lua e as estrelas que enfeitavam o céu, devem ter começado a elaborar hipóteses para explicar o que viam. Devido as hipóteses de então não serem inteiramente absolutas, os astros, os animais, as montanhas, as florestas, os desertos e a água eram tidos como divindades.

2.1 MUNDO ANTIGO

Cada povo, em cada época, em cada lugar da Terra, procurava dar as suas explicações para o que via acontecer ao seu redor. E no mundo antigo, assim como na pré-história, a Astronomia estava profundamente ligada com a religião. Eles buscavam encontrar soluções mitológicas para vários fenômenos celestes observados, entre os quais: os dias, as noites, os eclipses da Lua e do Sol, e as estações do ano. Era comum também eles associarem os fenômenos celestes aos terrestres e vice-versa.

As primeiras e principais civilizações antigas surgiram a partir de 5500 anos atrás, a saber: os sumerianos por volta de 3500 a.C., nas bacias dos rios Tigre e Eufrates (Mesopotâmia, região atual do Irã e Iraque); ao longo do rio Nilo (atual Egito) em torno de 3100 a.C.; nas margens do rio Indus (atual Índia) por volta de 2500 a.C.; e em torno do rio Amarelo (atual China) em cerca de 2000 a.C.

Uma das principais cidade-estado que surgiram na região da mesopotâmia foi a Babilônia, cujo poderio perdurou uns 300 anos. Foram eles os primeiros a registrar a presença dos cinco planetas visíveis a olho nu (Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno), por certo influenciado pela cultura dos sumerianos. Os deuses, os heróis e os animais desse povo eram associados aos astros observados. Na própria mitologia babilônica, a água líquida era a Mãe da natureza e sustentadora da Terra. O céu era representado por uma cúpula azul feita de rocha onde as estrelas estavam incrustadas. Para se conhecer a vontade dos deuses, segundo os babilônios, observava-se os astros nos céus, pois de alguma forma eles refletiam nos fatos terrestres. Os povos mesopotâmicos criaram, também, o mês de 30 dias, abrangendo o período entre duas luas novas.

Entre os egípcios, as observações astronômicas e suas explicações eram função específica dos sacerdotes. Muitas superstições e histórias fantásticas foram criadas para explicar os fenômenos que ocorriam no céu. Foram eles que criaram o primeiro calendário com 365 dias, conheciam muito bem os pontos cardeais e conseguiram prever as cheias do rio Nilo, o que era indispensável para que fizessem suas plantações na época propicia.

Para os chineses, um eclipse era causado por um dragão que havia engolido o Sol e, para que voltasse a brilhar, era necessário fazer muito barulho para assustar o dragão, que assim devolveria o Sol. Entretanto, apesar das explicações fantásticas e das crendices, o fato é que a observação dos astros se desenvolveu sobremaneira. E com base em fenômenos astronômicos, muitas atividades humanas, como a agricultura e a navegação, puderam desenvolver-se, a exemplo dos egípcios.

Os primeiros registros históricos de explicações que podem ser consideradas científicas, pois denotavam uma elaboração intelectual sobre o Universo, a vida e os fenômenos naturais, surgiram com os antigos filósofos gregos.

2.2 OS FILÓSOFOS DA GRÉCIA ANTIGA

Os filósofos gregos antigos, além de profundos observadores do céu, tinham, como característica marcante, procurar explicar racionalmente o que viam. Podem até ter errado, mas o que importa é o admirável poder de elaboração em suas teorias e hipóteses, pois de uma forma ou de outra, ajudou no desenvolvimento da ciência como um todo. Vejamos os principais filósofos gregos que foram importantes na história da Cosmologia.

O primeiro nome a salientar é o de **Tales de Mileto** (625 a.C.? -547 a.C.?)[1], de cuja obra, só nos chegaram fragmentos. Sabe-se que foi ele quem, pela primeira vez, explicou um eclipse lunar como devido a iluminação da Lua pelo Sol. Ele é o pensador conhecido primeiro a abandonar a agenda sobrenatural, mas ele é também conhecido por tentar explicar o mundo por uma hipótese unificadora. Para Tales e seus seguidores, água era o princípio único e fundamental e que permanecia imutável, embora participasse de todos os fenômenos do Universo.

Para **Anaximandro** (611 a.C.? -547 a.C.?), contemporâneo de Tales, o céu era uma esfera, e a Terra, um pequeno cilindro suspenso livremente pelo seu centro. Foi ele o primeiro a estabelecer a época dos equinócios. Seu seguidor **Anaxímenes** (585 a.C.? -528 a.C.?) considerava o ar o princípio do Universo. Imaginava a Terra plana e pairando no ar; o Sol, também plano, era como uma folha quente devido ao seu movimento em torno da Terra. Acreditava que as estrelas estavam tão distantes que era impossível sentir seu calor e perceber sua velocidade.

Pitágoras (570 a.C.? -495 a.C.?) fez muitas observações astronômicas, analisando o movimento do Sol, das estrelas e dos planetas, tendo sido o primeiro a considerar que a

[1] Os pontos de interrogação (**?**) significam que a data não é exata.

Terra não é plana, e sim esférica, estando ele, no centro do Universo também esférico.

Anaxágoras (500 a.C. -428 a.C.) considerava o Sol como uma massa ardente, que a Lua era iluminada pelo Sol e parecia com a Terra, com montanhas e vales. Explicava o eclipse lunar como uma projeção da sombra da Terra na Lua.

Para **Platão** (427 a.C. -347 a.C.), a Terra ocupava o centro das esferas planetárias, onde se movimentavam os planetas, e de uma esfera maior, exterior a estas, onde estariam incrustadas as estrelas fixas. Seu modelo de Universo foi aperfeiçoado por seu discípulo **Eudóxio de Cnidos** (406 a.C. -355 a.C.) e depois adotado por Aristóteles.

2.2.1 Modelo Aristotélico

Aristóteles de Estagira (384 a.C. -322 a.C.) elaborou seu modelo cosmológico introduzindo aperfeiçoamentos no modelo que o precedeu, isto é, no de Eudóxio. Para Aristóteles, a Terra estaria completamente imóvel, ocupando o centro do Universo. Esferas transparentes e concêntricas conteriam, cada uma, a Lua e os planetas conhecidos na época, obedecendo à seguinte ordem: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno, além do Sol, localizado entre Vênus e Marte. Tais esferas realizariam rotações uniformes, de modo que as trajetórias dos planetas transportados por elas seriam perfeitamente circulares.

Esse Universo fixo e imutável, seria delimitado por uma última esfera, chamada de firmamento (é interessante que o termo ainda seja usado para significar a abóboda celeste), onde localizava-se as estrelas fixas. O movimento da esfera das estrelas fixas seria transferido as demais esferas internas, originando todos os demais movimentos. Para além do firmamento, nada haveria: nenhum tipo de movimento, nem tempo, nem espaço. O que, portanto, o caracteriza como finito.

O aspecto filosófico mais importante do modelo aristotélico diz respeito a separação do cosmos em duas partes: a morada humana e a parte celeste. No céu, ou região supralunar, os corpos eram formados de éter, um elemento sutil mais perfeito que o mais perfeito dos cristais. Na Terra, ou região sublunar, os corpos eram formados por quatro elementos básicos: fogo, ar, água e terra.

> As leis que valiam para o mundo supralunar determinavam uma ordem perfeita: os corpos se moveriam em trajetórias circulares e uniformes, em um movimento eterno sem inicio nem fim. Mas isso não valia para o mundo terrestre, então os

> cometas e os meteoros deveriam fazer parte da esfera sublunar e eram considerados fenômenos da atmosfera. No mundo sublunar, cada elemento ocupava um lugar natural: o elemento terra era próximo ao centro de nosso planeta (centro do Universo); a água ficava acima da terra; o ar, acima da agua; e o fogo, acima do ar. Essa ordem, porém, era sempre perturbada, pois a região sublunar era o local da corrupção (PIETROCOLA *et al*, 2016, p.242).

Numa época em que predominavam os modelos geocêntricos, isto é, concepções que colocavam a Terra (geo) no centro do universo, **Aristarco de Samos** (320 a.C. -250 a.C.) inovou, criando um modelo heliocêntrico, segundo o qual o Sol (hélio) estava no centro do Universo e todos os planetas, inclusive a Terra, giravam ao seu redor. Sua teoria foi considerada sem fundamento, e chegou a ser acusada de insulto religioso. Através de medidas angulares, Aristarco conseguiu concluir que o Sol estava bem mais distante da Terra que a Lua. Além de comparar os diâmetros da Lua e da Terra.

Por certo, uma das principais conquistas do Universo dos gregos, foi que não havia mais a necessidade de divindades para explicar os fenômenos celestes, e que, portanto, dava-se início ao caminho científico, pois a tônica da elaboração intelectual foi preponderante.

2.3 MODELO DE PTOLOMEU

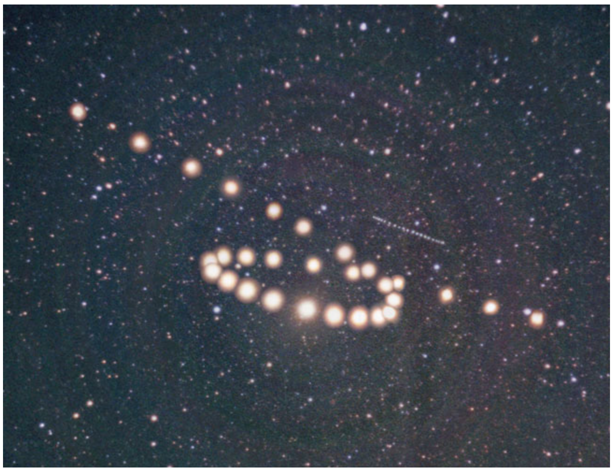
Hiparco de Nicéia (190 a.C.? -120 a.C.), considerado por muitos o maior astrônomo da Antiguidade, fez um grande número de observações dos astros no observatório que mandou construir na ilha de Rhodes.

> Dentre seus inúmeros feitos, descobriu a **precessão dos equinócios**, o lento movimento do eixo de rotação da Terra, que demora 26 mil anos para se completar. Organizou um catálogo de mais de mil estrelas, classificando-as por grandezas, chegando até sexta. Calculou a distância Lua-Terra como equivalendo a 59 raios terrestres (o correto é 60). Em seus cálculos da duração do ano, por meio das estações, cometeu um erro de apenas 6,5 minutos em relação às medidas modernas. Conseguiu organizar uma lista de ocorrência de futuros eclipses para um período de 600 anos (PENTEADO & TORRES, 2005, p.179).

É interessante que todos os feitos dele foi baseado num modelo geocêntrico de Universo.

O astrônomo, geógrafo e matemático grego **Cláudio Ptolomeu** (85- 165), já na Era Cristã, retomou e sistematizou o modelo geocêntrico de Hiparco, cujas pesquisas são em grande parte citadas no seu tratado *Almagesto*, que significa “O majestoso”, composto de 13 volumes. Os sistemas planetários mais antigos admitiam simplesmente que o planeta estava incrustado em sua esfera, que girava ao redor da Terra. Entretanto, tais sistemas não explicavam de modo completo o movimento dos planetas e suas irregularidades. Por exemplo, Marte. Este, observado ao longo do tempo, parecia descrever uma trajetória em forma de "laço" em relação as estrelas no céu, como mostra a figura 2.1. Coube a Ptolomeu explicar de modo mais eficiente o movimento retrógado que alguns planetas realizavam.

Figura 2.1: Movimento retrógrado de Marte.

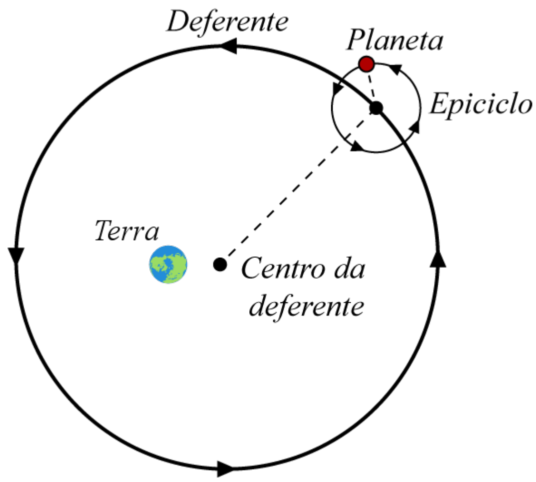


Fonte: (FUKUI *et al*, 2016, p.193).

De acordo com seu modelo geocêntrico, um planeta se moveria ao longo de círculo chamado **epiciclo**, cujo centro se movimentaria em um círculo maior, chamado **deferente**. "Segundo esse modelo, a Terra não estaria exatamente no centro do Universo, como nos modelos anteriores, genuinamente geocêntricos" (FUKUI *et al*, 2016, p.194). Veja-se a figura 2.2.

As grandes navegações realizaram-se com os conhecimentos dessa "astronomia geocêntrica", que, embora errada, permitia previsões que se confirmavam. Por isso, o modelo ptolomaico perdurou aceito, sem contestação, por quase 13 séculos, com a ajuda da Igreja Católica, pois, ao colocar a Terra no "centro do Universo", admitia que o homem era a obra mais importante da criação. No entanto, com o passar do tempo, as observações do céu se tornaram mais acuradas, e percebeu-se os erros que Ptolomeu cometeu, exigindo, assim, correções cada vez mais complexas.

Figura 2.2: Modelo de Ptolomeu.



Fonte: Autor.

2.4 MODELO DE COPÉRNICO

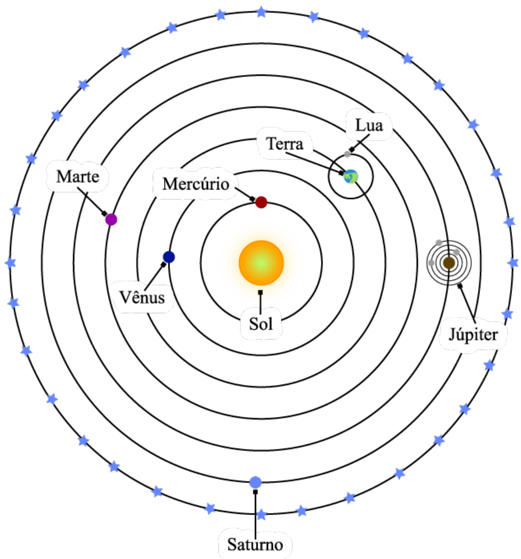
Em 1497, o monge polonês **Nicolau Copérnico** (1473- 1543), na Universidade de Bolonha, na Itália, estudava direito canônico. Após ter lido o *Almagesto*, de Ptolomeu, entrou em contato com os trabalhos do grego Aristarco de Samos, autor do mais antigo sistema heliocêntrico de Universo, ainda da Grécia antiga. Ali, iniciava-se uma transformação na visão de Universo:

> Não é de surpreender que uma teoria antiga como a aristotélica -ptolomaica cedo ou tarde tivesse de ser modificada, afinal, nem as mais recentes teorias estão livres dessa circunstância. As críticas ao modelo geocêntrico vistas até aqui foram importantes por levantarem problemas pontuais e mostrarem que esse sistema de mundo não poderia ser considerado uma verdade pronta e acabada. Contudo, essas críticas eram, de certa forma, até acanhadas quando comparadas ao que viria a acontecer na época do Renascimento (século XIV ao XVII) (PIETROCOLA *et al*, 2016, p.247).

Copérnico sempre simpático as ideias gregas de perfeição, viu no modelo de Aristarco uma possibilidade de voltar as trajetórias circulares perfeitas em torno de um corpo central. Além disso, percebeu ele, que poderia dar explicações mais satisfatórias aos dados observacionais que possuía, sem recorrer, no entanto, ao modelo de Ptolomeu.

Copérnico sugeriu então que a Terra e os demais planetas giravam ao redor do Sol em trajetórias circulares, contidos em esferas. Ele chamou essas esferas de **orbes**. Assim, apenas a Lua se moveria ao redor da Terra. Seu modelo também findava na esfera das estrelas fixas, à semelhança do de Aristóteles e Ptolomeu, (figura 2.3). Em seu livro *As* *revoluções dos orbes celestes* (publicado no ano de sua morte em 1543), ele afirma que "no centro de tudo se situa o Sol".

Figura 2.3: Modelo heliocêntrico de Copérnico, em que o Sol é o centro do Universo e os demais astros giram ao seu redor. Como nos modelos anteriores, o último círculo representa a esfera das estrelas fixas.



Fonte: Autor.

Para explicar algumas imprecisões nas trajetórias de certos planetas, Copérnico se viu obrigado a considerar pequenos epiciclos. De qualquer maneira, seu modelo explica de forma mais simples e mais precisa o movimento retrógado de certos planetas: os planetas se movem em diferentes velocidades e, quando observados da Terra, que também se move, em determinadas épocas aparentemente apresentam movimento retrógado, como a figura 2.4 mostra.

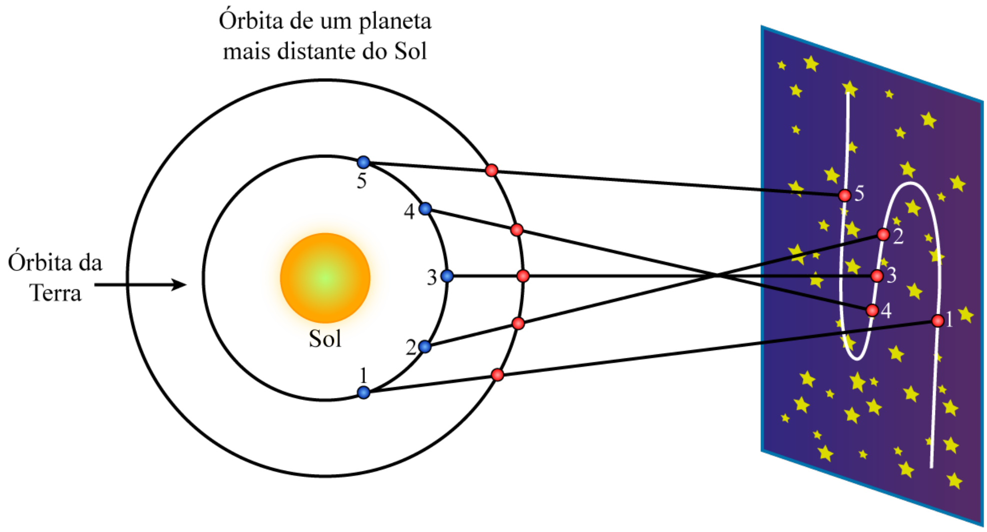
Esse modelo possibilitou também, uma explicação simples e coerente de outras observações celestes:

- Os orbes de Vênus e Mercúrio estariam entre a orbe da Terra e o Sol, de modo que os dois planetas, Vênus e Mercúrio, seriam sempre observados mais próximos ao Sol.

- Os orbes de Marte, Júpiter e Saturno estariam mais distantes do Sol do que o orbe da Terra, o que explicaria as visualizações desses planetas em oposição ao Sol.

No entanto, trocar a Terra pelo Sol como centro do sistema planetário significava para os senhores da Igreja tirar o homem do centro do Universo, e essa ideia era considerada herege, razão pela qual a sua obra foi incluída no Index, a relação de livros heréticos.

Figura 2.4: Movimento retrógrado de um planeta com órbita externa à da Terra. À esquerda: posições reais do planeta e da Terra nas respectivas órbitas. À direita: posições aparentes do planeta externo como visto da Terra.



Fonte: Autor.

A maioria dos contemporâneos de Copérnico não aprovou de imediato suas ideias heliocêntricas. Provavelmente eles aceitavam pequenas modificações, mas não concordavam em colocar a Terra em movimento, haja vista terem boas razões para considera-la parada:

- Como explicar o movimento de queda dos corpos se a Terra não é mais o centro do Universo?
- O que faz a Terra e os demais planetas permanecerem em órbita ao redor do Sol?
- Por que, ao lançarmos um objeto para cima, ele ainda cai em nossa mão, apesar de estarmos nos movendo em velocidade junto com a Terra?

Apesar de Copérnico não responder a esses questionamentos de maneira tão satisfatória, as suas concepções físicas e astronômicas foram valiosas e fundamentais para os cientistas que o sucederam, como Galileu Galilei, Tycho Brahe, Johannes Kepler e Isaac Newton.

2.5 GALILEU GALILEI E A DEFESA DO MODELO COPERNICANO

Galileu Galilei (1564-1642), nascido em Pisa, Itália, era adepto do experimentalismo e com frequência fazia uso desse recurso em seus estudos. Um dos principais feitos realizados por ele são as observações celestes que realizou com o uso da luneta, instrumento óptico inventado por Hans Lippershey (1570-1619) em 1608. Em 1609, Galileu teve o contato com a descrição desse invento e construiu sua própria luneta, mais aprimorada e sofisticada que a versão original. Através dos dados observacionais que obteve de seu instrumento, ele publicou *Mensageiro das estrelas* em 1610, no qual contrariava várias concepções aristotélicas acerca do Universo, fortalecendo, assim, o modelo copernicano. Merecem destaque algumas observações de Galileu:

- **Observação da Lua**: As sombras lunares vistas da Terra eram na verdade montanhas, vales e crateras característicos de um relevo bastante acidentado e irregular.
- **Manchas solares**: Ao observar o Sol, Galileu encontrou e descreveu manchas escuras em sua superfície. Essa constatação se contrapôs à concepção aristotélica do céu como um reino da perfeição e das formas perfeitas.
- **Fases de Vênus**: As observações de Vênus feitas por Galileu mostraram que, à semelhança da Lua, o planeta Vênus também apresenta fases. Uma explicação coerente envolvia a ideia da Terra em movimento, com Vênus em uma órbita interna. Isso fortalecia ainda mais a ideia de que a Terra estava em movimento.
- **Júpiter e seus satélites**: Galileu descobriu quatro luas que orbitavam Júpiter. Isso mostrava que não havia um único objeto privilegiado no qual tudo girava (Terra ou Sol).

Galileu constatou também que a Via Láctea, galáxia na qual o Sistema Solar se encontra, não era uma mancha luminosa no céu, mas uma região densa povoada por estrelas.

Em 1632, com a publicação do *Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo*, Galileu abordou e comparou os modelos ptolomaicos e copernicano, colocando-se em defesa do segundo. Esta publicação lhe valeu a condenação pela Igreja Católica à prisão domiciliar e também a inclusão de sua obra no Index. Reza a lenda que após sair do tribunal (depois de renunciar publicamente suas afirmações), ele disse: “Eppur si muove”, ou seja, “Contudo, ela se move”, referindo-se à Terra.

Finalmente, após um século mais ou menos, o modelo heliocêntrico copernicano se sobrepôs ao aristotélico-ptolomaico. No entanto, admitir o Sol como o centro do universo ainda não respondia as discrepâncias apresentadas pelos dados observacionais.

2.6 JOHANNES KEPLER

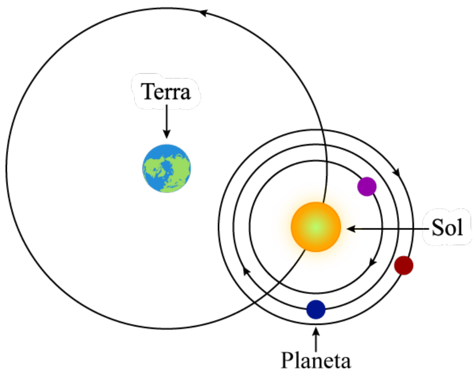
Em meio a discussão polêmica entre o sistema geocêntrico de Ptolomeu e o sistema heliocêntrico de Copérnico, nasceu o astrônomo dinamarquês **Tycho Brahe** (1546-1601). Tendo condições financeiras privilegiadas, pôde se dedicar à observação astronômica. Dois fatos marcantes no céu fizeram-no aumentar sua dedicação ao estudo dos astros: o surgimento de uma “nova” estrela que explode e aumenta de brilho (o que contradizia a ideia reinante de que o céu era imutável) e o aparecimento de um cometa, que ele conseguiu verificar estar bem além da Lua (na época, achava-se que os cometas eram manifestações que ocorriam próximo a Terra). Assim, com suas convicções abaladas, Brahe intensificou suas observações e seus registros.

Brahe, estudando os dois modelos, notou que o grande problema de ambos era estarem baseados em dados imprecisos. Conseguiu recursos de seu governo para construir um grande centro de pesquisas astronômicas em Uraniborg, na ilha de Ven. Foi neste lugar que com aparelhos modernos e de ótima precisão, obteve registros dos movimentos planetários nunca antes obtidos. No entanto, seu sistema ainda era basicamente geocêntrico, com o Sol girando ao redor da Terra, admitindo, pois, que os demais giravam ao redor do Sol, como mostra a figura 2.5.

A grande conquista de Brahe foi ter feito um registro sistemático e preciso das posições planetárias, principalmente de Marte. Suas anotações, após difíceis negociações com a família, foram herdadas pelo assistente dele, o astrônomo alemão **Johannes Kepler** (1571-1630).

Kepler já era conhecido por seus estudos das órbitas dos planetas, as quais procurou,

Figura 2.5: Sistema planetário de Tycho Brahe.



Fonte: Autor.

de início, relacionar com os principais sólidos geométricos, tentando verificar se estes poderiam ser inscritos nas esferas planetárias do modelo de Copérnico.

De posse dos dados de Brahe, Kepler pôde constatar que os planetas realizavam trajetórias elípticas (e não as perfeitas circunferências gregas). Para ele, a razão disso estava no Sol, fonte primeira de todo movimento do Universo.

> A qualidade dos dados deixados por Brahe, associada à própria habilidade matemática e à determinação de pesquisador, levou Kepler às três leis do movimento planetário- apresentadas as duas primeiras em *Astronomia nova* (1609) e a terceira de *Harmonia dos mundos* (1619) (FUKUI *et al*, 2016, p.198).

Leia:

> É interessante citar aqui que essa descoberta foi angustiante para Kepler, pois, imbuído de acentuado espírito religioso, acreditava que a criação divina era perfeita e, portanto, órbitas circulares e esféricas eram mais condizentes com ela. Entretanto, diante dos dogmas religiosos, prevaleceu o espírito científico e Johannes Kepler estabeleceu o sistema solar como é hoje conhecido, apenas acrescido dos planetas Urano, Netuno e Plutão, descobertos posteriormente (PENTEADO & TORRES, 2005, p.179).

2.7 ISAAC NEWTON

O que faltou à conclusão de Kepler quanto ao papel exercido pelo Sol sobre os planetas que o orbitam foi complementando por **Isaac Newton** (1643-1727). Devido a isso, diz-se que Newton deu prosseguimento aos estudos de Kepler.

Na análise dele, para que um planeta se movesse em órbita elíptica, seria necessária uma força agindo sobre ele. Com base nas ideias de outros cientistas que vieram antes dele, concluiu que o Sol era o responsável por essa força. Ainda mais, seria uma força atrativa e estaria relacionada com a massa dos corpos envolvidos, isto é, o Sol e o planeta. Ele chamou essa força atrativa de gravitacional, constituindo um par de forças de ação e reação, obrigando, portanto, o planeta a seguir uma trajetória elíptica. A criatividade de Newton o fez relacionar os fenômenos celestes aos terrestres equivalentes.

Em *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, publicada em 1687, Newton apresentou a Lei da Gravitação Universal, na qual afirmava que a força gravitacional entre dois corpos diminuía com o quadrado da distância entre ambos, e que tal força ocorre em todos os corpos dotados de massa e é proporcional à quantidade de matéria de cada um. Além de tudo isso, Newton sedimentou, deduziu e demonstrou as leis de Kepler matematicamente, haja vista inicialmente terem sidas obtidas de forma empírica.

Capítulo 3

AS LEIS DE KEPLER

Johannes Kepler nasceu na Alemanha em 1571. Ainda criança, ele foi enviado a uma cidade provincial de Maulbronn para vir a ser um clérigo num seminário protestante. Lá era uma espécie de acampamento militar treinando as mentes para serem utilizadas como arma teológica contra a fortaleza do Catolicismo Romano. Para Kepler, Deus era mais que uma fúria divina, era um objeto de súplicas. O Deus de Kepler era o poder criador do Cosmo. Em Maulbronn, ele pensou ter vislumbrado uma imagem da perfeição e glória cósmica na Geometria de Euclides. Mais tarde, escreveu: "A Geometria existiu antes da Criação. É coeterna com a mente de Deus... A Geometria forneceu a Deus um modelo para a Criação... A Geometria é o próprio Deus".

Em 1589, Kepler deixou Maulbronn para estudar para o clero na grande Universidade em Tübingen. A genialidade dele foi imediatamente reconhecida por seus professores, um dos quais o introduziu nos mistérios perigosos da hipótese copernicana. Um universo heliocêntrico, portanto, ecoou no senso religioso de Kepler, e este o adotou com fervor. O Sol era uma metáfora para Deus, em volta do qual tudo girava.

Naquela época conhecia-se apenas seis planetas: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno. Algumas perguntas inquietavam Kepler. Ele se questionava por que existem apenas seis planetas? Por que não dez ou cem?

Conheciam-se cinco sólidos regulares ou "sólidos-platônicos", cujos lados eram polígonos regulares, como o sabiam os antigos matemáticos gregos após Pitágoras. Kepler pensou que os dois números estavam conectados, que a razão pela qual havia somente seis planetas era porque existiam somente cinco sólidos regulares, e que estes sólidos inscritos ou aninhados um dentro do outro especificariam as distâncias dos planetas do Sol. Nestas formas perfeitas ele

> acreditou que tinha reconhecido as estruturas de sustentação invisíveis das esferas dos seis planetas. Chamou sua revelação de O Mistério Cósmico (SAGAN, 1980, p.57).

Essa relação entre os sólidos de Pitágoras e a disposição dos planetas admitia a explicação da Mão de Deus, o Geômetra. Embora Kepler tenha trabalhado duramente, os sólidos e as órbitas planetárias nunca se ajustaram como quisera. Chegando à conclusão de que suas observações estavam equivocadas.

Entretanto, existia um homem que possuía observações mais precisas a respeito dos movimentos dos astros aparentes. Era o famoso Matemático Imperial, Tycho Brahe. Este era dono de um espetacular observatório e de um grande poder de observação. Kepler, sua esposa e sua enteada foram para Praga juntar-se a Brahe.

Kepler, conjecturou o domínio de Tycho como uma fuga a todos os percalços que povoavam sua mente, pois, acreditava ele, que poderia visualizar o seu Mistério Cósmico desvendado. A princípio, no entanto, a convivência com Brahe não foi muita amiga. Ele era uma pessoa vistosa e rica, mas não usava muito bem sua riqueza. Ao redor dele havia um grande grupo de assistentes, formado em grande parte por parentes distantes e dependentes convictos, quer dizer, verdadeiros parasitas ambulantes. Ele era adepto a festas com orgias, agregando ainda insinuações, intrigas e frequentes gozações a respeito da educação provinciana que Kepler recebera, isto o deprimia e o entristecia. Porém, nada tirava a vontade dele em compreender o Cosmo através das informações obtidas por Brahe.

Com o passar do tempo as relações entre Brahe, o maior gênio observacional da época e Kepler o maior gênio teórico, foram melhorando, e uma boa amizade foi surgindo entre eles. Em certa ocasião, o Barão de Rosemberg ofereceu um jantar, e Tycho era um dos convidados. Tendo ingerido vinho em excesso e resistindo a necessidade fisiológica, negou-se por um momento ausentar-se da presença do Barão, acabando por contrair uma infecção urinária. Seu estado de saúde foi piorando. Em seu leito de morte, Tycho doou suas observações que a tanto tempo coletava a Kepler. Na última noite de vida, ele pediu inúmeras vezes a Johannes: "Não me deixem sentir que vivi em vão...". Após a morte de Tycho, Kepler, além de herdar suas preciosas anotações, herdou também o posto de Matemático Imperial. Através dos dados dele, Kepler percebeu que sua conjectura de que as órbitas dos planetas estavam circunscritas pelos cinco sólidos platônicos não era mais sustentada.

> Seu "Mistério Cósmico" foi desaprovado por inteiro pelas descobertas posteriores dos planetas Urano, Netuno e Plutão — não há sólidos platônicos adicionais que determinem suas distâncias ao Sol. Os sólidos Pitagóricos encaixados não faziam concessão à existência da lua terrestre, e a descoberta de Galileo das quatro grandes luas de Júpiter também o derrotaram (SAGAN, 1980, p.60).

As observações de Tycho sobre o movimento aparente de Marte e dos outros astros intrigavam Kepler, levando-o a estudá-los avidamente. Esses movimentos, sob o ponto de vista da Terra pareciam retrógrados, isto é, em certa época do ano, parecia afastar-se da Terra, em outra, no mesmo horizonte, parecia aproximar-se. Então: que movimento poderia explicar os dados coletados por Tycho? "Tycho tinha comentado sobre Marte com Kepler, por parecer muito anômalo o seu movimento aparente e muito difícil de conciliar com uma órbita formada de círculos" (SAGAN, 1980, p.60).

A fascinação de Kepler pela curva perfeita, o círculo, tinha sido uma desilusão. Ele ficou abalado ao ser compelido a repudiar a órbita circular e, portanto, questionar a sua fé no Geômetra Divino. A Terra era um planeta como havia dito Copérnico, e tão cheia de fome, guerras e pestes, não era o que se poderia chamar de "perfeição" como almejava a Igreja. Portanto, sua órbita também não necessariamente seria uma curva perfeita. Segundo Sagan (1980, p.61) "Tentou [Kepler] várias curvas-ovais, calculou, cometeu alguns erros aritméticos (que o levou, a princípio, a rejeitar a resposta certa) e meses mais tarde, em desespero, tentou a fórmula de uma elipse". Kepler, descobriu então, que a fórmula da elipse se ajustava perfeitamente as observações de Tycho.

Kepler percebeu que Marte girava em torno do céu com uma forma elíptica, e não circular. Neste tipo de órbita, o Sol não estaria no centro, e sim em um dos focos da elipse. Quando um determinado planeta está mais próximo do Sol, entendeu ele, que o planeta aumentava de velocidade, e quando mais distante, a velocidade diminuía. Esta característica explicava por qual razão o movimento dos astros era retrógrado e, também, por que os planetas eram descritos como caindo sempre em direção, mas nunca atingindo o Sol. A **Primeira Lei de Kepler** é simplesmente: **Um planeta se move em uma elipse com o Sol em um dos focos.**

Kepler identificou um aspecto diferente na órbita elíptica:

> [...] enquanto o planeta se move ao longo da sua órbita, ele percorre uma

> pequena área em forma de cunha dentro da elipse. Quando está próximo do Sol, em um dado período de tempo, ele traça um grande arco em sua órbita, mas a área representada pelo arco não é muito grande porque o planeta está então próximo do Sol. Quando o planeta se encontra longe dele, percorre um arco muito menor no mesmo período de tempo, mas este arco corresponde a uma área maior porque o Sol está agora mais adiante. Kepler descobriu que estas duas áreas eram precisamente as mesmas, independente de quão elíptica fosse a órbita: a área comprida e estreita, correspondendo ao planeta longe do Sol, e a área mais curta e larga, quando o planeta está próximo dele, são exatamente iguais (SAGAN,1980, p.62).

Disso surgiu a **Segunda Lei de Kepler** do movimento planetário: **Os planetas percorrem áreas iguais em tempos iguais**. Essa lei é, na verdade, uma consequência da conservação da quantidade do movimento angular.

Embora as duas primeiras Leis de Kepler pareçam remotas e abstratas, nós nos movemos conforme elas.

> [...]. Talvez tenhamos uma tendência para diminuir estas leis como meros acertos matemáticos, algo tirado da vida diária, mas são leis que os nossos planetas obedecem como nós próprios, grudados pela gravidade na superfície da Terra, empurrados no espaço interplanetário. Movemo-nos de acordo com as Leis da Natureza que Kepler descobriu [...] (SAGAN, 1980, p.62).

Anos depois, Kepler formulou sua terceira e última lei do movimento planetário, uma lei que relacionava o movimento de vários planetas uns com os outros, que exibia, portanto, a precisão do sistema solar. Esta Lei diz: **O quadrado do período de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior de sua órbita**. De forma algébrica, se r é o raio orbital médio e T é o período de revolução, ela afirma que:

$$T^2 = Kr^3$$

Onde a constante K tem o mesmo valor para todos os planetas. Esta lei é uma consequência do fato de que a força exercida pelo Sol sobre um planeta varia com o inverso do quadrado da distância do Sol ao planeta.

Sagan (1980) destaca que Kepler, não estava satisfeito em ter descoberto as leis do movimento planetário somente, ele passou a estudar e esforçar-se para descobrir uma causa adjacente ainda mais fundamental, alguma influência do Sol na cinemática dos mundos. Tendo em mente a sua Segunda Lei, ele pensava que de alguma forma os planetas que por mais distantes que estivessem, sentiria a influência do Sol. Kepler, de uma forma surpreendente, antecipou a Lei da Gravitação Universal, escreveu ele:

> Meu objetivo quanto a este assunto é mostrar que a máquina celeste deve ser comparada não a um organismo divino, mas sim a um mecanismo de relógio..., até agora quase todos os movimentos diversos são conduzidos por meio de uma única e bem simples força magnética, como no caso do mecanismo do relógio [onde] todos os movimentos [são causados] por um simples peso (SAGAN, 1980, p.63).

A força magnética que ele se referia, era a gravidade. Mas a sua inovação desta vez, foi que ele propôs que as leis físicas quantitativas que eram aplicadas na Terra, também seriam os alicerces das leis físicas quantitativas que governavam o céu.

Capítulo 4

A TEORIA DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL DE NEWTON

As perguntas que Johannes Kepler tinha e que não conseguiu solucionar, o intrigou durante toda a sua vida. A compreensão dos movimentos dos planetas e a sua busca incansável pela harmonia nos céus, através de leis, acabou culminando anos após sua morte no trabalho de Isaac Newton. Newton nasceu no dia de natal de 1642.

> [Newton] tão pequeno que sua mãe lhe revelou, anos mais tarde, que tinha sido colocado em uma caneca de quarto. Doente, sentindo-se abandonado pelos pais, briguento, insociável, casto até a sua morte, Isaac Newton foi talvez o maior gênio científico que já viveu (SAGAN, 1980, p.67).

Em 1663, no Mercado de Stourbridge, aos vinte anos de idade, Newton comprou um livro sobre astrologia. Ele o leu até chegar a uma ilustração a qual não entendeu, pois não sabia trigonometria. Comprou então um livro sobre isso, mas sentiu-se incapaz de compreender os argumentos geométricos. Mesmo assim, após dois anos ele inventou o cálculo diferencial.

Em 1666, aos vinte e três anos de idade, Newton era estudante da Universidade de Cambridge, quando uma doença contagiosa o forçou a passar um ano de ociosidade na vila onde havia nascido. Durante este período, ele ocupou-se inventando o cálculo diferencial e integral, fazendo descobertas fundamentais sobre a natureza da luz (aliás, ele era fascinado pela luz e principalmente pelo Sol) e lançando os fundamentos da teoria da Gravitação Universal. Este ano foi tão importante à história cientifica, que outro semelhante a esse só em 1905, com o chamado “ano milagroso” de Albert Einstein.

Parecia para Newton, que a Lua se movia em linha reta, tangencial à sua órbita, a menos que houvesse alguma outra força que desviasse o seu caminho para próximo a um círculo, empurrando-a na direção da Terra. A esta força Newton a chamou de Gravidade, que agia a distância, acreditava ele. E, exatamente, em 1666, Newton prestou uma contribuição imensurável à física, “ao demonstrar que não existe diferença entre a força que mantém a Lua em órbita e a força responsável pela queda de uma maça” (HALLIDAY & RESNICK, 2009, p.28). Leia:

> As coisas caíam no solo desde o início. Que a Lua girava em torno da Terra, sempre acreditaram por toda a história da humanidade. Newton foi a primeira pessoa a imaginar que estes dois fenômenos eram decorrentes da mesma força. Este é o significado da palavra “universal”, como foi aplicado à gravitação newtoniana. A mesma lei de gravidade se aplica a qualquer local do universo (SAGAN, 1980, p.69).

Atualmente, essa ideia nos é tão familiar, que temos dificuldades em compreender a antiga crença de que os movimentos dos corpos terrestres e celestes eram diferentes e obedeciam a um conjunto diferente de leis.

Newton chegou à conclusão de que não só a Terra atrai as maças[1] e a Lua, mas também cada corpo do universo atrai todos os demais. A universalidade da gravidade não nos é muito óbvia, devido a força de atração que a Terra exerce sobre os corpos próximos é muito maior que a força de atração que estes corpos exercem uns sobre os outros. Por exemplo, a Terra atrai uma maça com uma força de ordem de $0,8N$. Segundo Halliday & Resnick (2009, p.28), “nós também atraímos uma maça próxima (e somos atraídos por ela), mas essa força de atração é menor que o peso de uma partícula de poeira”.

Newton propôs uma lei para essa força, a chamada **Lei da Gravitação de Newton**: Toda partícula do universo atrai todas as outras partículas com uma **força gravitacional** cujo módulo é dado por:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{4.1}$$

Onde m_1 e m_2 são as massas das partículas, r é a distância entre elas e G é uma constante,

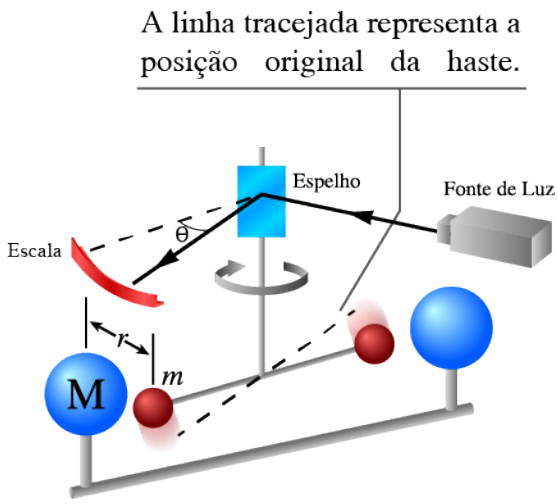
[1]Por que uma maça? Pois remonta a lenda de que Newton estava descansando em baixo de uma macieira, quando uma maça caiu sobre sua cabeça, e supostamente ele teve a ideia de que todos os corpos no universo eram atraídos um pelo outro.

conhecida como **constante gravitacional**, cujo valor é:

$$\mathbf{G = 6,67 \times 10^{-11} N.m^2/Kg^2}$$

Henry Cavendish (1731-1810) mediu a constante gravitacional universal em um experimento importante em 1798, um século depois da Lei de Newton. O aparato que Cavendish usou para calcular essa grandeza, é composto por duas pequenas esferas, cada uma de massa m, fixado nas extremidades de uma haste leve e horizontal, suspensa por uma fibra fina ou fio de metal fino, como ilustrado na figura 4.1.

Figura 4.1: Aparato de Cavendish para a medida de G.



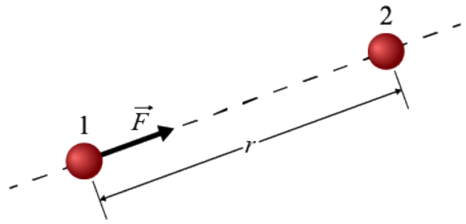
Fonte: Autor.

Quando duas grandes esferas, cada uma de massa M, são colocadas perto das menores, a força de atração entre elas faz com que a haste gire e torça o fio suspenso para uma nova orientação de equilíbrio. O ângulo de rotação é medido pelo desvio de um feixe de luz refletido por um espelho anexado a suspensão vertical. Por intermédio desse ângulo de rotação é possível a determinação da constante gravitacional. Quando Cavendish determinou G com uma precisão de um por cento, medindo a força entre pequenas esferas de massas e separações conhecidas, ele chamou o seu experimento de "pesagem da Terra" (não que o fizesse isso de fato). Mas o conhecimento do valor de G implica que as massas de qualquer planeta com um satélite podem ser determinadas com certa facilidade.

Na figura 4.2, $\vec{F}$ é a força gravitacional exercida sobre a partícula 1 (de massa m_1) pela partícula 2 (de massa m_2). A força aponta para a partícula 2, dizemos que é uma força atrativa. Podemos dizer que $\vec{F}$ aponta no sentido positivo de um eixo r traçado ao longo da reta que liga a partícula 1 à 2 (figura 4.3). Podemos também representar a força $\vec{F}$ usando um vetor unitário r̂ (um vetor adimensional de módulo 1) que aponta da partícula 1 para a 2 (figura 4.4). Nesse caso, de acordo com a fórmula da Lei da Gravitação de Newton, a força que age sobre a partícula 1 é dada por:

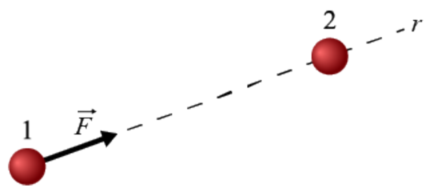
$$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r} \tag{4.2}$$

Figura 4.2: A força gravitacional $\vec{F}$ que a partícula 2 exerce sobre a partícula 1 é uma força atrativa, porque aponta para a partícula 2.



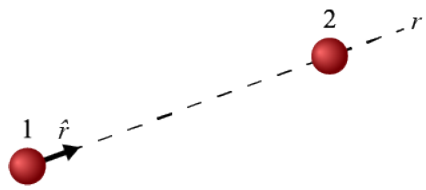
Fonte: Autor (Adaptada de Halliday & Resnick (2009)).

Figura 4.3: A força $\vec{F}$ está sobre um eixo radial r que passa pelas duas partículas.



Fonte: Autor (Adaptada de Halliday & Resnick (2009)).

Figura 4.4: A força $\vec{F}$ tem o mesmo sentido que o vetor unitário $\hat{r}$ do eixo r.



Fonte: Autor (Adaptada de Halliday & Resnick (2009)).

A força gravitacional que a partícula 1 exerce sobre a 2 tem o mesmo módulo que a força que 2 exerce sobre a 1 e o sentido oposto. As duas forças formam um par de forças da terceira lei (Lei da Ação e Reação de Newton), e podemos falar da força gravitacional entre as duas partículas como tendo um módulo dado pela Lei da Gravitação.

A intensidade da força gravitacional, ou seja, a intensidade da força com a qual duas partículas conhecidas de massas conhecidas e separadas por uma distância conhecida se atraem, depende diretamente do valor da constante gravitacional G. Por exemplo:

> Se G, por algum milagre, fosse multiplicada por 10, seríamos esmagados contra o chão pela atração da Terra. Agora, se G fosse dividida por 10, a atração da Terra se tornaria tão fraca que poderíamos saltar sobre um edifício (HALLIDAY & RESNICK, 2009, p.29).

Embora a Lei da Gravitação se aplique estritamente a partículas, podemos aplicá-la a objetos reais, desde que eles sejam pequenos em comparação a sua distância. A Terra e a Lua, por exemplo, são tratadas como partículas, haja vista que sua distância é consideravelmente grande. Imaginemos, então, o caso de uma maça e o planeta Terra. Do ponto de vista da maça, a Terra extensa e plana, que vai até o horizonte, certamente não se parece com uma partícula.

Newton resolveu o problema da atração entre a maça e a Terra, provando um importante teorema, conhecido como teorema das cascas: **Uma casca esférica uniforme de matéria atrai uma partícula que se encontra fora da casca como se toda a massa da casca estivesse concentrada no seu centro**. A Terra, portanto, pode ser imaginada como um conjunto de cascas, uma dentro da outra, cada uma atraindo uma partícula localizada fora da superfície da Terra como se a massa da casca estivesse no seu centro. Assim, do ponto de vista da maça a Terra se comporta como uma partícula, que está localizada no centro da Terra e possui uma massa igual à massa da Terra. Diante do que foi exposto até aqui acerca da Lei da Gravitação de Newton, segundo Brown (2013, p.649) (tradução livre)[2] podemos ressaltar alguns pontos relevantes:

i) A força da gravidade é uma força de dois corpos, isto é, ela não é alterada pela presença de outros objetos mesmo que estejam situados entre os corpos;

ii) A força da gravidade é uma força que ocorre a distância e não exige que os dois objetos "toquem" para agir;

iii) A força da gravidade age junto (na direção de) uma linha que une centros de massas esfericamente simétricas;

iv) A força da gravidade é atraente;

[2]**i)** The force of gravity is a **two body force** and does not change if three or more bodies are present; **ii)** The force of gravity is **action at a distance** and does not require the two objects to "touch" in order to act; **iii)** The force of gravity acts along (in the direction of) a line **joining centers of spherically symmetric masses**, in this case along $\vec{r}$; **iv)** The force of gravity is **attractive**; **v)** The force of gravity is **proportional to each mass**; **vi)** The force of gravity is **inversely proportional to the distance between the centers of the masses**.

v) A força da gravidade é proporcional a cada massa das partículas;

vi) A força da gravidade é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os centros das massas.

Sabemos que a força diminui inversamente ao quadrado da distância. Se dois objetos, por exemplo, forem afastados para duas vezes mais longe, a gravidade que os atrairá terá somente um quarto de força. Se forem afastados dez vezes mais, a gravidade será o quadrado de 10, $10^2 = 100$ vezes mais fraca. Claramente, a força deve ser, em algum sentido, inversa, isto é, declinando com a distância. Imaginemos que a força fosse direta, ou seja, aumentasse com a distância, então a maior força atuaria sobre os objetos mais distantes, "e eu [**Sagan**] suponho que toda a matéria no universo se acharia se unindo em uma única massa cósmica" (SAGAN,1980, p.69).

Devido a força da gravidade ser inversamente proporcional ao quadrado da distância, que hoje é possível provar a causa de um planeta mover-se mais lentamente quando longe do Sol e com maior rapidez quando mais próximo.

Em suma, Newton, analisando as Leis de Kepler, notou que as velocidades dos planetas mudam ao longo da órbita tanto em módulo quanto em direção. Como a variação da velocidade é devida a forças, ele concluiu que os planetas e o Sol interagem a distância, com forças chamadas gravitacionais.

4.1 A GRAVITAÇÃO NAS PROXIMIDADES DA SUPERFÍCIE DA TERRA

Suponhamos que a Terra seja uma esfera uniforme de massa M. O módulo da força gravitacional F que a Terra exerce sobre a partícula de massa m, localizada fora da Terra a uma distancia r do centro da Terra, é dado pela Lei da Gravitação Universal de Newton:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

Se a partícula é liberada, cai em direção ao centro da Terra, em consequência da força gravitacional $\vec{F}$, com uma aceleração que chamaremos de **aceleração da gravidade** $\vec{a_g}$.

Conforme a Segunda Lei do Movimento de Newton, módulos de $\vec{F}$ e $\vec{a_g}$ estão relacionados através da equação:

$$F = ma_g$$

Substituindo F da Lei da Gravitação de Newton nesta última equação e explicitando $\vec{a_g}$, obtemos:

$$G\frac{Mm}{r^2} = ma_g \rightarrow G\frac{M}{r^2} = a_g$$
$$a_g = G\frac{M}{r^2}$$

A tabela 4.1 mostra os valores de a_g calculados para várias altitudes acima da superfície da Terra. Portanto, conclui-se que g diminui com o aumento da altitude. Vemos, também, que quando $r \rightarrow \infty$, o valor de g tende a 0.

Tabela 4.1: A aceleração de queda livre g em várias altitudes acima da superfície da Terra

Altitude $h(Km)$	$g(m/s^2)$
1000	$7,33$
2000	$5,68$
3000	$4,53$
4000	$3,70$
5000	$3,08$
6000	$2,60$
7000	$2,23$
8000	$1,93$
9000	$1,69$
10000	$1,49$
50000	$0,13$
∞	0

Fonte: Autor (Adaptada de Jewett & Serway (2012)).

É comum na Física Mecânica supor que a Terra seja um referencial inercial, desprezando seu movimento de rotação. A vantagem dessa simplificação é que nos permite supor que a aceleração de queda livre g de uma partícula é igual a aceleração gravitacional da partícula a_g. É comum, além disso, supor que g possui o valor de $9,8m/s^2$ em qualquer lugar sobre a superfície da Terra. Na prática, porém, o valor de g medido em um certo local é diferente do valor de a_g. Essa disparidade é motivada por três razões conforme relata Halliday & Resnick (2009):

i) A massa da Terra não está uniformemente distribuída. A massa específica da Terra varia com distância do centro, e a massa específica da crosta varia de ponto a ponto da superfície da Terra. Assim, g não é igual em todos os pontos da superfície terrestre. Vejamos essa demonstração de Young & Freedman (2008). Para provar que a Terra não pode ser uniforme, vamos inicialmente calcular sua densidade média; ou seja, a massa por unidade de volume da Terra. Supondo que ela seja esférica, seu volume V_T é:

$$V_T = \frac{4}{3}\pi R_T^3 = \frac{4}{3}\pi(6,38 \times 10^6 m)^3 = 1,09 \times 10^{21} m^3$$

Onde: R_T é o raio médio da Terra. A densidade média ρ é igual a massa total dividida pelo volume:

$$\rho = \frac{m_T}{V_T} = \frac{5,97 \times 10^{24} Kg}{1,09 \times 10^{21} m^3}$$
$$= 5500 Kg/m^3 = 5,5 g/cm^3$$

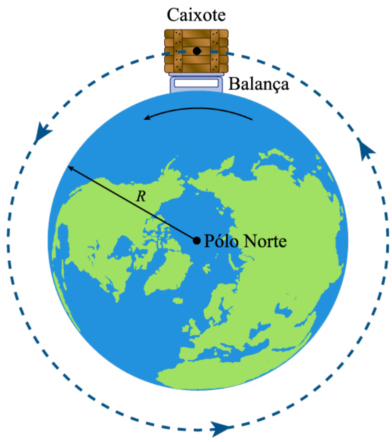
Onde: m_T é a massa da Terra. Caso a Terra fosse uniforme, as rochas nas vizinhanças da superfície terrestre deveriam possuir essa densidade. Segundo Young & Freedman (2008), a densidade das rochas de superfície é bem menor: entre $2000 kg/m^3 = 2 g/cm^3$ para as rochas sedimentares e cerca de $3300 kg/m^3 = 3,3 g/cm^3$ para o basalto, aproximadamente. Deste modo, a Terra não pode ser uniforme. De acordo com modelos geofísicos do interior da Terra, a densidade máxima no centro da Terra é aproximadamente igual a $13000 kg/m^3 = 13 g/cm^3$.

ii) A Terra não é uma esfera. A Terra tem uma forma aproximada de um elipsoide; é saliente no equador e achatada nos polos. Segundo Halliday & Resnick (2009) a diferença entre o raio dos polos e o raio do equador é de $21 km$. Assim, um ponto nos polos está mais próximo do centro da Terra do que um ponto no equador. Esta é uma das razões pelas quais a aceleração de queda livre g ao nível do mar aumenta conforme nos aproximamos a um dos polos.

iii) A Terra está girando. Um objeto localizado em qualquer lugar da superfície da Terra, exceto nos polos, descreve uma circunferência em torno do eixo de rotação e, portanto, possui uma aceleração centrípeta dirigida para o centro da circunferência.

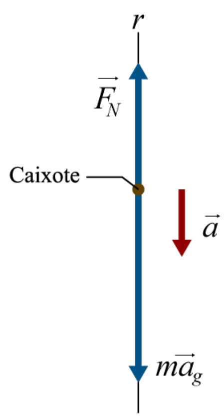
Esta aceleração centrípeta requer uma força centrípeta que também está dirigida para esse centro. Para vermos como a rotação da Terra influencia na diferença entre g e a_g, vamos analisar uma simples situação na qual um caixote de massa m está sobre uma balança no equador. A figura 4.5 mostra esta situação observada de um ponto do espaço acima do polo norte.

Figura 4.5: Um caixote sobre uma balança no equador da Terra, conforme visto por um observador posicionado sobre o eixo de rotação da Terra, em algum ponto acima do polo norte.



Fonte: Autor (Adaptada de Halliday & Resnick (2009)).

Figura 4.6: Diagrama de corpo livre do caixote, com o eixo radial r ligando o caixote ao centro da Terra . A força gravitacional que age sobre o caixote está representada pelo vetor equivalente $m\vec{a}_g$. A força normal exercida pela balança sobre o caixote é $\vec{F}_N$. Devido à rotação da Terra, o caixote possui uma aceleração centrípeta $\vec{a}$ dirigida para o centro da Terra.



Fonte: Autor (Adaptada de Halliday & Resnick (2009)).

A figura 4.6 mostra um diagrama de corpo livre do caixote, com as duas forças que nele agem, ambas orientadas ao longo da reta que liga o centro da Terra ao caixote. A força normal $\vec{F}_N$ exercida pela balança sobre o caixote é dirigida para fora, no sentido positivo do eixo r. A força gravitacional, representada pela força equivalente $m\vec{a_g}$, é dirigida para dentro. Como o caixote se move em uma circunferência em torno do centro da Terra por causa da sua rotação, ele possui uma aceleração centrípeta $\vec{a}$ dirigida para o centro da Terra. De acordo com a fórmula da aceleração centrípeta ($a_r = \omega^2 r$), a aceleração é igual a $\omega^2 R$, onde ω é a velocidade angular da Terra e R é o raio da circunferência (aproximadamente o raio da Terra). Assim, podemos escrever a Segunda Lei de Newton para as forças ao longo do eixo r ($F_{res,r} = ma_r$) na forma:

$$F_N - ma_g = m(-\omega^2 R)$$

O módulo F_N da força normal é igual ao peso mg indicado pela balança. Substituindo F_N por mg e somando de ambos os lados da igualdade ma_g, a equação anterior se torna

$$mg = ma_g - m(\omega^2 R)$$

Ou seja

$$(\textit{peso medido})=(\textit{módulo da força gravitacional})-(\textit{massa vezes aceleração centrípeta})$$

Assim, a rotação da Terra faz com que o peso medido seja menor que a força gravitacional que age sobre o caixote. Se cancelarmos m na última equação, obtemos:

$$g = a_g - \omega^2 R$$

Ou seja

$$(\textit{aceleração de queda livre})=(\textit{aceleração gravitacional})-(\textit{aceleração centrípeta})$$

Assim, a rotação da Terra faz com que aceleração de queda livre seja menor que a aceleração gravitacional.

Vamos estimar a diferença entre g e a_g. Sabemos que $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ (velocidade angular média) e o raio médio da Terra, $R = 6,37 \times 10^6 m$. Para uma rotação da Terra, $\theta = 2\pi rad$ e o período Δt é aproximadamente $24h$ ou $86400seg$. Fazendo as manipulações encontramos a diferença entre g e a_g:

$$
\begin{aligned}
g - a_g &= -\omega^2 R \\
g - a_g &= -\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)^2 \cdot R \\
g - a_g &= -\left(\frac{2\pi}{86400}\right)^2 \cdot 6,37 \times 10^6 \\
g - a_g &= -0,0337 m/s^2
\end{aligned}
$$

Note que esta diferença é muito pequena em comparação com $9,8 m/s^2$. Portanto, desprezar a diferença entre as acelerações g e a_g constitui, na maioria dos casos, uma aproximação razoável. Da mesma forma, desprezar a diferença entre o peso e o módulo da força gravitacional constitui, na maioria das vezes, uma aproximação razoável.

4.2 DEDUÇÃO DAS LEIS DE KEPLER

A palavra *planeta* deriva de um termo grego que significa “errante” e, na verdade, os planetas mudam de posição no céu em relação a diferentes instantes de tempo. Um dos maiores êxitos intelectuais dos séculos XVI e XVII foi a verificação de três fatos: a Terra também é um planeta; todos os planetas orbitam em torno do Sol; e os movimentos aparentes dos planetas vistos da Terra podem ser usados para uma determinação precisa de suas órbitas.

Nicolau Copérnico publicou em 1543, na Polônia, a primeira e a segunda conclusões acima mencionadas. A determinação das órbitas dos planetas foi realizada entre 1601 e 1619 por Johannes Kepler, usando os dados que seu mentor Brahe deixou na ocasião da sua morte. Após de mais ou menos 18 anos de muitas tentativas, Kepler formulou as três leis empíricas que levam o seu nome, e que se ajustavam poderosamente aos dados que possuía na época.

Segundo Young & Freedman (2008), Kepler não sabia por que os planetas se moviam conforme a sua lei, nem tão pouco como se relacionavam entre si. Mais tarde, em 1687, em seu livro *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, Newton mostrou como deduzir as três leis a partir de duas de sua autoria, a Segunda Lei do Movimento e a Lei Universal da Gravitação. Vamos provar separadamente cada uma das leis.

4.2.1 Primeira Lei de Kepler

"*Todos os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos*".

Para esta lei, tomaremos como base demonstrativa Stewart (2007).

Newton verificou que, quando uma força proporcional a $1/r^2$ atua sobre um corpo, as únicas órbitas fechadas possíveis são a elipse e a circunferência; ele mostrou também que órbitas abertas devem ser parábolas ou hipérboles. Esses resultados são obtidos mediante a seguinte demonstração. Provemos, portanto, a Primeira Lei de Kepler.

Demonstração. Como a força gravitacional do Sol sobre um planeta é muito maior que as forças exercidas por outros astros, podemos ignorar todos os outros corpos do Universo, exceto o Sol e um planeta girando em torno dele. Usaremos um sistema de coordenadas com origem no Sol e seja $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ o vetor de posição do planeta. (Poderíamos sem perda generalidade considerar vetor posição da Lua ou de um satélite girando em torno da Terra, ou um cometa movendo-se ao redor de uma estrela). O vetor velocidade é $\mathbf{v} = \mathbf{r}^{'}$ e o vetor aceleração é $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$.
Segunda Lei do Movimento: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.
Lei da Gravitação Universal: $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$ ou $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{u}$.
Onde $\mathbf{F}$ é a força da gravidade sobre o planeta, m e M são as massas do planeta e do Sol, G é a constante gravitacional, $r = |\mathbf{r}|$, e $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ é o vetor $\mathbf{r}$.

Mostremos a princípio que o planeta se move em um plano. Igualando a expressão para $\mathbf{F}$ nas duas leis de Newton, chegamos a:

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}$$

E portanto, $\mathbf{a}$ é paralelo a $\mathbf{r}$. Segue-se que $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Usando as regras de diferenciação, sabemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{r}^{'} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}^{'} \\
&= \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} \\
&= \mathbf{0} + \mathbf{0} \\
&= \mathbf{0} \\
\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$, onde $\mathbf{h}$ é um vetor constante. Podemos presumir que $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$, pois se fosse $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$ seriam paralelos, o que é um absurdo, porque $\mathbf{v} = \mathbf{r}^{'}$. Com isso, o vetor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ é perpendicular a $\mathbf{h}$ para todos os valores de t, portanto o planeta está sempre em um plano que passa pela origem e é perpendicular a $\mathbf{h}$. Dessa forma, a órbita do planeta é uma curva plana.

Para provar a Primeira Lei de Kepler, vamos reescrever o vetor $\mathbf{h}$ como segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}^{'} &= r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u})^{'} \\
\mathbf{h} &= r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u}^{'} + r^{'}\mathbf{u})
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, então:

$$\begin{aligned}
\mathbf{h} &= (r\mathbf{u} \times r\mathbf{u}^{'}) + (r\mathbf{u} \times r^{'}\mathbf{u}) \\
\mathbf{h} &= r \cdot r(\mathbf{u} \times \mathbf{u}^{'}) + r \cdot r^{'}(\mathbf{u} \times \mathbf{u})
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, então:

$$\mathbf{h} = r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$$

Façamos o produto vetorial entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{h}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{h} &= -\frac{GM}{r^2}\mathbf{u} \times (r^2\mathbf{u} \times \mathbf{u}^{'}) \\
\mathbf{a} \times \mathbf{h} &= -GM\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}')
\end{aligned}$$

Como $[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}]$, então:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{h} &= -GM\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}') \\
\mathbf{a} \times \mathbf{h} &= (-GM\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')\mathbf{u} - (-GM\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}' \\
\mathbf{a} \times \mathbf{h} &= -GM(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')\mathbf{u} + GM(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}' \\
\mathbf{a} \times \mathbf{h} &= -GM[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}']
\end{aligned}$$

Mas $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = 1$ e como $|\mathbf{u}(t)| = \mathbf{1}$. Para continuar a demonstração, faremos a prova do seguinte fato: se $|\mathbf{u}(t)| = l$ (l é uma constante), então $\mathbf{u}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{u}(t)$ para todo t.

De fato, como $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t) = |\mathbf{u}(t)|^2 = l^2$ e l^2 é uma constante, e tomando as regras de diferenciação para funções vetoriais, sabe-se que:

$$0 = \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) = 2\mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{u}(t)$$

Então, $\mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, o que implica em $\mathbf{u}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{u}(t)$ para todo t, como queríamos mostrar.

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{h} &= -GM[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}'] \\
\mathbf{a} \times \mathbf{h} &= -GM[-(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}'] \\
\mathbf{a} \times \mathbf{h} &= GM\mathbf{u}'
\end{aligned}$$

Pois $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 1$. Então $(\mathbf{v} \times \mathbf{h})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{h} + \mathbf{v} \times \mathbf{h}' = \mathbf{v}' \times \mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\mathbf{u}' \Rightarrow (\mathbf{v} \times \mathbf{h})' = GM\mathbf{u}'$. Note que $\mathbf{v} \times \mathbf{h}' = \mathbf{0}$, pois $\mathbf{h}$ é um vetor constante.

Integrando ambos os lados desta última equação, obtemos:

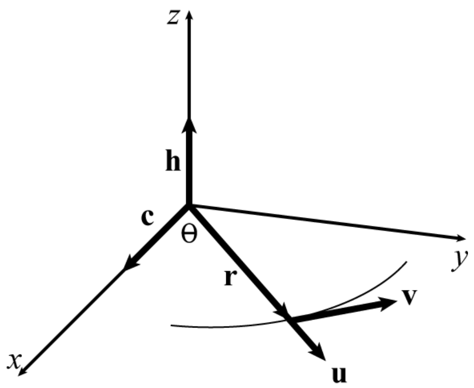
$$\begin{aligned}
\int (\mathbf{v} \times \mathbf{h})' &= \int GM\mathbf{u}' \\
\mathbf{v} \times \mathbf{h} &= GM\mathbf{u} + \mathbf{c} \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante.

Neste ponto é conveniente escolher os eixos coordenados de forma que o vetor base padrão $\mathbf{k}$ aponte na direção do vetor $\mathbf{h}$. O planeta se move assim no plano xy. Como $\mathbf{v} \times \mathbf{h} = \mathbf{0}$

e **u** são perpendiculares a **h**, a equação (4.3) mostra que **c** pertence ao plano xy. Isso significa que podemos escolher os eixos x e y de forma que **i** (o vetor unitário da base cartesiana) esteja na direção de **c**, como mostrado na figura 4.7. Se θ é ângulo entre **c** e

Figura 4.7: Eixos x e y com **i** na direção de **c**.



Fonte: Autor (Adaptada de Stewart (2007)).

r, então (r, θ) são as coordenadas polares do planeta. Da equação (4.3), temos:

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \mathbf{r} \cdot (GM\mathbf{u} + \mathbf{c})$$
$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = GM\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c}$$
$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = GM\mathbf{u} \cdot r \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c}$$
$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = GMr \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + |\mathbf{r}||\mathbf{c}| \cos\theta$$
$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = GMr + rc\cos\theta$$

Onde $c = |\mathbf{c}|$. Então,

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = r(GM + c\cos\theta)$$
$$r = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{(GM + c\cos\theta)} = \frac{1}{GM}\frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{(1 + \frac{c}{GM}\cos\theta)} = \frac{1}{GM}\frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{1 + e\cos\theta}$$

Onde $e = c/GM$. Como $[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}]$, então,

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = |\mathbf{h}|^2 = h^2$$

Onde $h = |\mathbf{h}|$. Desse modo,

$$r = \frac{1}{GM}\frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{1 + e\cos\theta} = \frac{1}{GM}\frac{h^2}{1 + e\cos\theta} = \frac{h^2}{GM}\frac{1}{1 + e\cos\theta} = \frac{h^2/GM}{1 + e\cos\theta}$$

Mas $e = c/GM \Rightarrow GM = c/e$,

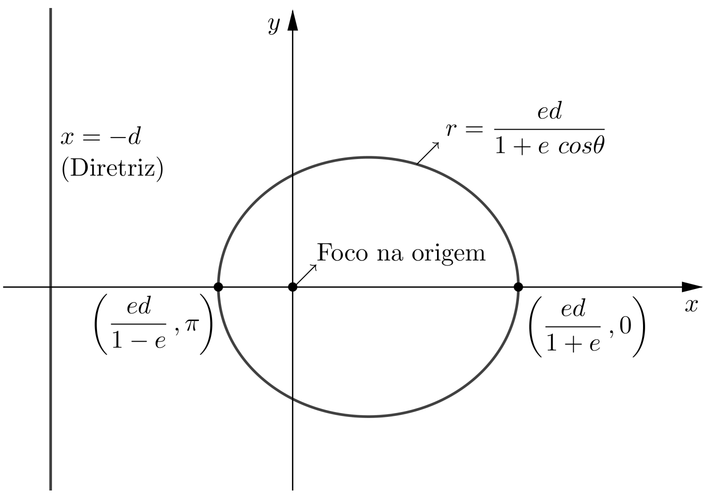
$$r = \frac{\frac{h^2}{\frac{c}{e}}}{1 + e\cos\theta}$$

Escrevendo $d = h^2/c$, obtemos a equação

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} \tag{4.4}$$

A equação (4.4) é uma cônica na forma polar com foco na origem e excentricidade e, como mostra a figura 4.8. "Sabemos que a órbita de um planeta é uma curva fechada e, portanto, precisa ser uma elipse" (STEWART, 2007, p.877), como queríamos demonstrar. Somente para $e < 1$ o movimento é finito, e a órbita é uma elipse. "Se $e \geq 1$, o movimento é infinito, isto é, não se repete. Se $e = 1$ o corpo se move em uma parábola, e se $e > 1$ em uma hipérbole, o que não é o caso dos planetas, mas as vezes dos cometas e asteroides" (FILHO & SARAIVA, 2014, p.103). As trajetórias parabólicas ou hiperbólicas são aplicáveis a corpos que passam próximo ao Sol (ou qualquer outro corpo que esteja no foco da seção cônica) e nunca mais retornam.

Figura 4.8: Elipse conforme a equação 4.4.



Fonte: Autor.

Em suma, a lei das órbitas elípticas é uma consequência do tipo de força que atua entre os planetas e o Sol, ou a Lua e os satélites com a Terra. Newton mostrou, portanto, que as únicas órbitas possíveis para um corpo interagindo gravitacionalmente com outro são as seções cônicas: círculo, elipse, parábola ou hipérbole.

Sejam a e b as medidas do semieixos maior e menor da elipse, respectivamente. Assim, um círculo pode ser pensado como uma elipse com $e = 0$ e $a = b$. Uma parábola pode ser pensada como uma elipse com $e = 1$ e $a = \infty$. Uma hipérbole pode ser pensada como uma elipse com $e > 1$ e $a < 0$.

Se o corpo tiver movimento periódico, como os planetas, sua trajetória será circular ou elíptica; se o movimento não for periódico, como é o caso de alguns cometas e asteroides, a trajetória será parabólica ou hiperbólica. $\square$

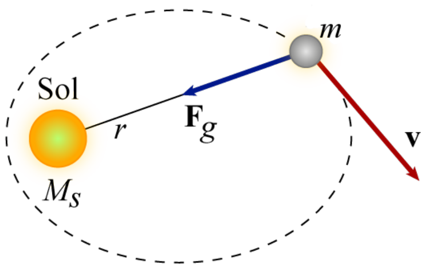
4.2.2 Segunda Lei de Kepler

"*A reta que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais no plano da órbita do planeta em intervalos de tempo iguais, ou seja, a taxa de variação da área A com o tempo é constante*".

Para esta lei, tomaremos como base demonstrativa Halliday & Resnick (2005).

Demonstração. A Segunda Lei de Kepler pode ser mostrada como sendo uma consequência da conservação do momento angular. Considere um planeta de massa m movendo-se ao redor do Sol em uma orbita elíptica. A ação da força gravitacional no planeta é sempre ao longo do vetor raio, direcionado para o Sol, como mostra a figura 4.9. Quando uma força

Figura 4.9: A ação da força gravitacional em um planeta é direcionado para o Sol ao longo do vetor raio.



Fonte: Autor (Adaptada de Halliday & Resnick (2005)).

é dirigida para um ponto fixo e é uma função de r apenas, é chamada de **força central**. A ação do torque no planeta é claramente zero; isso porque $\mathbf{F}$ é paralelo a $\mathbf{r}$, assim:

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times F\hat{\mathbf{r}} = 0$$

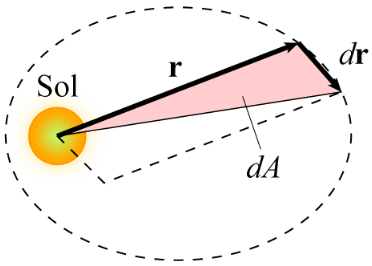
Esse torque é igual a derivada do momento angular $\mathbf{L}$ em relação ao tempo t: $\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$. Portanto, a força gravitacional exercida pelo Sol no planeta resulta em nenhum torque, logo o momento angular $\mathbf{L}$ do planeta é constante:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = constante$$

Por $\mathbf{L}$ permanecer constante, o movimento do planeta em qualquer instante é restrito ao plano formado por $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$.

Podemos relatar este resultado aplicando algumas considerações geométricas. O vetor raio $\mathbf{r}$ na figura 4.10 varre uma área dA em um tempo dt.

Figura 4.10: A área varrida pelo vetor raio em um tempo dt é igual a metade da área do paralelogramo formado pelos vetores r e dr.



Fonte: Autor (Adaptada de Halliday & Resnick (2005)).

Esta área é igual a metade $|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|$ do paralelogramo formado pelos vetores $\mathbf{r}$ e $d\mathbf{r}$. Pois o deslocamento do planeta em um tempo dt é $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, dizemos, portanto, que:

$$dA = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}dt| = \frac{L}{2m}dt$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = constante$$

Onde L e m são constantes. Assim, concluímos que: **o raio vetor do Sol para qualquer planeta varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais**.

Esta conclusão é o resultado da força gravitacional sendo uma força central, o que implica que o momento angular do planeta é constante. Portanto, a lei se aplica a qualquer situação que envolva uma força central, quer seja o inverso do quadrado ou não. $\square$

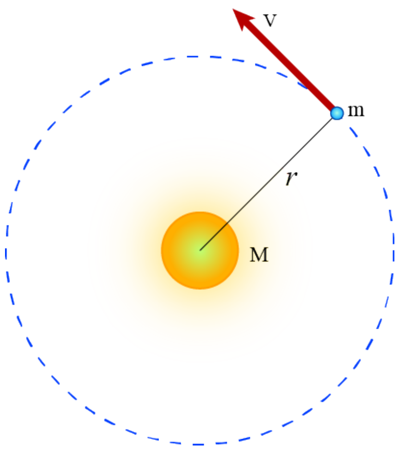
4.2.3 Terceira Lei de Kepler

"*O quadrado do período de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior de sua órbita*".

Para esta lei, tomaremos como base demonstrativa Halliday & Resnick (2005).

Demonstração. A Terceira Lei de Kepler pode ser predita a partir da lei do inverso do quadrado para órbitas circulares. Considere um planeta de massa m movendo-se ao redor do Sol de massa M em uma órbita circular, como mostra a figura 4.11. Veja que podemos considerar órbitas circulares, pois as órbitas reais dos planetas são aproximadamente circulares, suas excentricidades variam de $0,007$ para Vênus a $0,206$ para Mercúrio (a excentricidade da Terra é $0,017$, isto é, próxima de uma circunferência). Por esse fato, o semieixo maior de uma órbita planetária pode ser considerado como sendo o raio de uma circunferência.

Figura 4.11: Um planeta de massa m move-se ao redor do Sol em uma órbita circular.



Fonte: Autor (Adaptada de Halliday & Resnick (2005)).

Considerando que a força gravitacional fornece a aceleração centrípeta do planeta que se move em um círculo, o modelamos como uma partícula sob uma força resultante e, ainda, como uma partícula em movimento circular uniforme; quer dizer, a força gravitacional exercida pelo Sol no planeta é uma força radialmente direcionada ao Sol, o que mantém o planeta em movimento circular, assim, podemos aplicar a Segunda Lei de

Newton ($F_r = ma$):

$$\frac{GMm}{r^2} = ma$$

Notemos que $a = \frac{v^2}{r}$, pois a força gravitacional produz uma aceleração centrípeta no planeta. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{GM}{r^2} &= \frac{v^2}{r} \\ v^2 &= \frac{GM}{r} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como o planeta se move uma distância $2\pi r$ no tempo T, sua rapidez está relacionada com o período por:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Substituindo v por $2\pi r/T$ na equação (4.5), obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 &= \frac{GM}{r} \\ \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} &= \frac{GM}{r} \end{aligned}$$

Ou

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3 = K_S r^3 \tag{4.6}$$

Esta equação é a chamada Terceira Lei de Kepler. Onde $K_S = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) = 2,97 \times 10^{-19} s^2/m^3$ é uma constante.

Como as órbitas reais elípticas dos planetas são próximas as circulares, a equação (4.6) é válida para ambas. Observe que a constante de proporcionalidade K_S é independente da massa do planeta. Esta equação, portanto, é válida para qualquer planeta. Se considerássemos a órbita de um satélite como a Lua sobre a Terra, a constante teria um valor diferente, com a massa do Sol sendo substituída pela da Terra (M_T), isto é, $K_T = \frac{4\pi^2}{GM_T}$.

A tabela 4.2 é um conjunto de dados úteis para os planetas e outros corpos no sistema solar. A coluna da extrema direita mostra que a relação T^2/r^3 é constante para todos os corpos que orbitam o Sol. As pequenas variações nos valores desta coluna são o resultado das incertezas nos dados medidos para os períodos e semieixos maiores dos corpos.

Tabela 4.2: Dados planetários úteis

Corpo	**Massa**(Kg)	**Raio Médio**(m)	**Período de Revolução**(s)	**Distância Média do Sol**(m)	$\frac{T^2}{r^3}(s^2/m^3)$
Mercúrio	$3,30 \times 10^{23}$	$2,44 \times 10^{6}$	$7,60 \times 10^{6}$	$5,79 \times 10^{10}$	$2,98 \times 10^{-19}$
Vênus	$4,87 \times 10^{24}$	$6,05 \times 10^{6}$	$1,94 \times 10^{7}$	$1,08 \times 10^{11}$	$2,99 \times 10^{-19}$
Terra	$5,97 \times 10^{24}$	$6,37 \times 10^{6}$	$3,156 \times 10^{7}$	$1,496 \times 10^{11}$	$2,97 \times 10^{-19}$
Marte	$6,42 \times 10^{23}$	$3,39 \times 10^{6}$	$5,94 \times 10^{7}$	$2,28 \times 10^{11}$	$2,98 \times 10^{-19}$
Júpiter	$1,90 \times 10^{27}$	$6,99 \times 10^{7}$	$3,74 \times 10^{8}$	$7,78 \times 10^{11}$	$2,97 \times 10^{-19}$
Saturno	$5,68 \times 10^{26}$	$5,82 \times 10^{7}$	$9,29 \times 10^{8}$	$1,43 \times 10^{12}$	$2,95 \times 10^{-19}$
Urano	$8,68 \times 10^{25}$	$2,54 \times 10^{7}$	$2,65 \times 10^{9}$	$2,87 \times 10^{12}$	$2,97 \times 10^{-19}$
Netuno	$1,02 \times 10^{26}$	$2,46 \times 10^{7}$	$5,18 \times 10^{9}$	$4,50 \times 10^{12}$	$2,94 \times 10^{-19}$
Plutão	$1,25 \times 10^{22}$	$1,20 \times 10^{6}$	$7,82 \times 10^{9}$	$5,91 \times 10^{12}$	$2,96 \times 10^{-19}$
Lua	$7,35 \times 10^{22}$	$1,74 \times 10^{6}$	—	—	—
Sol	$1,989 \times 10^{30}$	$6,96 \times 10^{8}$	—	—	—

Fonte: Autor (Adaptada de Jewett & Serway (2012)).

$\square$

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Este trabalho apresentou uma linha histórica da gravitação na qual tentou-se reunir os principais momentos dela. Partindo do tempo pré-histórico onde o homem procurava entender como os fenômenos celestes funcionavam, como eles influenciavam e como se relacionavam a vida terrestre, e passando pelos grandes filósofos gregos e por estudiosos consagrados na história da humanidade, como Ptolomeu, Copérnico, Kepler e Newton, tentamos realizar um verdadeiro compêndio das suas principais contribuições ao estudo do Cosmo.

Notemos, no entanto, que a conquista científica a qual nos referimos no objetivo geral é a evolução e o sucesso que a ciência teve em todos em esses séculos. Pois, uma vez verificado a sobreposição do modelo heliocêntrico sobre o geocêntrico no decorrer do tempo, mostramos como o grande físico Newton deduziu matematicamente as leis empíricas de Kepler, após 68 anos mais ou menos, a partir de duas de sua autoria, a Segunda Lei do Movimento e a Lei da Gravitação Universal. Efetuamos, também, uma breve aplicação da Lei da Gravitação de Newton, tomando a gravidade nas proximidades da superfície da Terra, e verificando quão grande é a sua abrangência.

É interessante e notório como atualmente a vida dos seres humanos está direta ou indiretamente ligada aos satélites artificiais. Veja, por exemplo, o ato de ligar uma televisão, receber notícias sobre as condições do tempo, acessar a internet e etc. O lançamento dos satélites em órbita ao redor da Terra é conquista recente, mas o fundamento teórico de seu movimento já havia sido estudado por Newton. É através da Lei da Gravitação Universal de Newton, que é possível determinar a velocidade e o período de um satélite. Embora essa e outras conquistas sejam notáveis à humanidade, existe uma ressalva quanto a essa lei.

No século XVII, Newton descobriu que a mesma força que faz uma maçã cair na Terra é a mesma que possibilita um planeta orbitar em torno do Sol, ele a chamou de gravidade. Por muitos anos, essa teoria foi aceita sem contestação, haja vista serem bastante precisas em relação aos fenômenos práticos. Todavia, após 200 anos, o físico teórico alemão **Albert Einstein** (1879-1955) descobriu que o Universo não funcionava bem assim.

Para Newton, a origem da gravidade é uma força fundamental da natureza que age atraindo massas. Caso um corpo mude de posição em relação a outro, a força gravitacional entre eles passa a ter outro valor, instantaneamente. Admitir essa ideia significa dizer que tal fato ocorre com uma velocidade infinita. Essa conclusão é incoerente com um dos postulados da teoria da relatividade, no qual afirma que existe um limite para a velocidade de interação entre corpos (definido pelo valor da velocidade da luz, cerca de $300000km/s$ no vácuo).

Para entender a concepção de gravitação proposta por Einstein, apresentada na teoria conhecida como Relatividade Geral, faz-se necessário compreender uma nova maneira de "olhar" o espaço. Segundo Einstein, as grandezas espaço e tempo deixam de ser consideradas independentes, e a gravitação é entendida como uma propriedade geométrica do espaço-tempo.

Para ilustrar essa ideia, consideremos um lençol bem esticado pelas suas pontas. Se colocarmos uma bola no meio do lençol, veremos que ela a deformará, causando uma depressão ou vale. Se utilizarmos uma outra bola (consideravelmente menor a bola anterior), e fizermos que ela role em direção a bola maior, veremos que a bola menor descreve um movimento retilíneo, porém, assim que ela se aproxima da depressão passa a descrever uma trajetória curva. Essa analogia representa o movimento de um planeta em torno de uma estrela, por exemplo.

Pode-se fazer uma leitura dessa cena de duas maneiras. Segundo Newton, diríamos que a bola menor descreve trajetória curva por ser atraída pela bola maior. Pela ideia de Einstein, diríamos que a bolinha descreve trajetória curva porque a superfície sobre a qual ela se desloca é curva.

Se imaginarmos hipoteticamente que o Sol desaparecesse, Newton afirmaria que instantaneamente o planeta seria lançado no espaço. Para Einstein não. Isto só aconteceria depois que a onda da curvatura do espaço-tempo nos atingisse.

A teoria da Relatividade Geral implicou outros desdobramentos e estudos, mas, segundo ela, as trajetórias dos corpos passariam a acompanhar a deformação do espaço-tempo produzida pelas massas que nele existem.

REFERÊNCIAS

BROWN, Robert G.; **Introductory Physics I**: Elementary Mechanics; Duke University Physics Department; Durham, 2013.

FILHO, Kepler de Souza O.; SARAIVA, Maria de Fátima O.; **Astronomia e Astrofísica**; Departamento de Astronomia, Instituto de Física; Universidade Federal do Rio Grande do Sul; Porto Alegre, 2014.

FUKUI, Ana; MOLINA, Madson de Melo; VENÊ; **Ser Protagonista - Física**, vol.1; 3 ed; Manual do Professor; São Paulo; SM, 2016.

HALLIDAY; RESNICK; WALKER, Jearl; **Fundamentals of Physics**, Parts 1/2/3/4/5; 7th Edition; 2005.

HALLIDAY; RESNICK; WALKER, Jearl; **Fundamentos de Física**: Gravitação, Ondas e Termodinâmica, vol.2; 8 ed; Rio de Janeiro; LTC, 2009.

JEWETT Jr., John W.; SERWAY, Raymond A.; **Física para Cientistas e Engenheiros**: Mecânica, vol.1; 8 ed; Cengage Learning, 2012.

PENTEADO, Paulo Cesar M.; TORRES, Carlos Magno A.; **Física**: Ciência e Tecnologia. São Paulo: Moderna, 2005.

PIETROCOLA, Maurício; POGIBIN, Alexander; ANDRADE, Renata de; ROMERO, Talita Raquel; **Física em Contextos**, vol.1; Manual do Professor; São Paulo; Editora do Brasil, 2016.

SAGAN, Carl. **Cosmos**. Editora Francisco Alves. 1980.

STEWART, James; **Cálculo**, vol.2; 5 ed; São Paulo; Thomson Learning, 2007.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A.; **Física II**: Termodinâmica e Ondas; 12 ed; São Paulo: Addison Wesley, 2008.