



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARA
CAMPUS UNIVERSITARIO DE SALINÓPOLIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

BRENNO NATALINO SILVA ROCHA

**ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL DE ONDAS ACOPLADAS COM
AMORTECIMENTOS DO TIPO ATRITO E DELAY**

SALINÓPOLIS - PA
2022

BRENNO NATALINO SILVA ROCHA

**ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL DE ONDAS ACOPLADAS COM
AMORTECIMENTOS DO TIPO ATRITO E DELAY**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado a Faculdade de Matemática do Campus Universitário de Salinópolis da Universidade Federal do Pará, como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos

BRENNO NATALINO SILVA ROCHA

**ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL DE ONDAS ACOPLADAS COM
AMORTECIMENTOS DO TIPO ATRITO E DELAY**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado a Faculdade de Matemática do Campus Universitário de Salinópolis da Universidade Federal do Pará, como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos

Data da aprovação: 02/02/2022

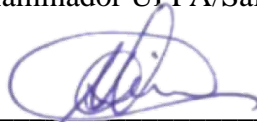
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos
Orientador - PDM/UFPA/Salinópolis



Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro
Examinador UFPA/Salinópolis



Prof. Dr. Marcos Lima Cardoso
Examinador UFPA/Salinópolis

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

R672e ROCHA, BRENNO NATALINO SILVA ROCHA.
ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL DE ONDAS
ACOPLADAS COM AMORTECIMENTOS DO TIPO ATRITO E
DELAY / BRENNO NATALINO SILVA ROCHA ROCHA. —
2022.
iii, 9 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos
Ramos

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
Federal do Pará, Campus Universitário de Salinópolis, Curso de
Licenciatura em Matemática, Salinópolis, 2022.

1. Equação da onda acoplada, termos de delay, decaimento
exponencial, método da energia. I. Título.

CDD 515.353

Estabilização exponencial de ondas acopladas com amortecimentos do tipo atrito e delay

Brenno Natalino Silva Rocha

*Faculdade de Matemática, Universidade Federal do Pará.
Rua Raimundo Santana Cruz, s/n, 68721-000, Salinópolis-Pa, Brasil.*

Abstract

Neste trabalho consideramos um sistema de ondas unidimensionais acopladas com amortecimentos do tipo atrito e delay. Provamos a existência e unicidade de solução usando os resultados da teoria de semigrupo e provamos a estabilização exponencial do sistema usando o método da energia, desde que a relação $\mu_2 \leq \mu_1$ seja satisfeita. Caso contrário ($\mu_2 > \mu_1$), o sistema nem ao menos é dissipativo.

Keywords: Equação da onda acoplada, termos de delay, decaimento exponencial, método da energia

1. Introdução

Os estudos de vibração de sistemas contínuos unidimensionais são muito importantes, tanto do ponto de vista teórico quanto das aplicações. Muitas estruturas na engenharia moderna costumam usar elementos contínuos unidimensionais resistentes à tensão, mas não à flexão (por exemplo, cordas, cabos, correntes etc.) [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Uma corda, sendo o modelo mais simples de um sistema contínuo unidimensional,

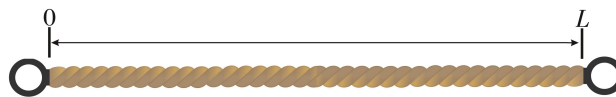


Figura 1: Corda tracionada

tem sido objeto de grande interesse científico nos últimos anos. Esse fato é confirmado pelo grande número de referências coletadas. A teoria fundamental para o estudo das vibrações de cordas é discutida em vários livros, como por exemplo: Bishop e Johnson [1], Den Hartog [2], Fryba [3], Kaliski [4], Nowacki [5, 6] entre outros.

Em [7], Oniszczyk estudou o problema teórico da vibração de um sistema formado por cordas duplas elasticamente conectadas, dado por

$$m_1 w_{tt} - S_1 w_{xx} + k(w - v) = f_1, \quad (1)$$

$$m_2 v_{tt} - S_2 v_{xx} + k(v - w) = f_2. \quad (2)$$

O sistema de corda duplas é o modelo mais simples de um sistema contínuo complexo, composto por dois sólidos elásticos unidimensionais presos por uma camada elástica de Winkler. Vejamos a figura abaixo

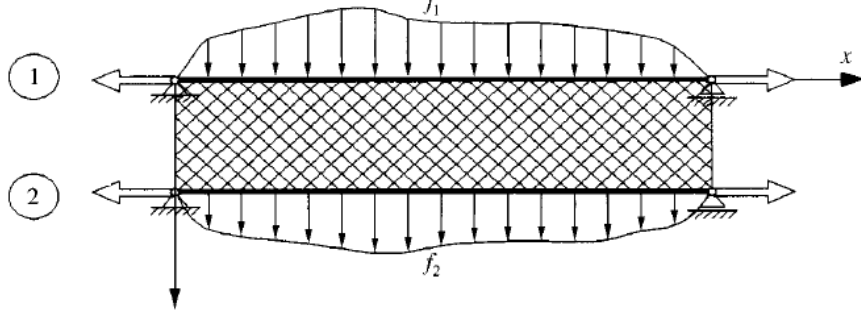


Figura 2: O modelo físico de um sistema cordas dupla, elasticamente conectado. Retirado de Oniszczuk [7]

15 Neste trabalho os autores fizeram um estudo detalhado das frequências naturais do modelo e mostraram a solução exata do sistema usando o método da separação de variáveis.

Em [8], Najafi et al. consideraram o sistema unidimensional de ondas acopladas dado por

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \alpha(u - v) = 0, \quad (3)$$

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} + \alpha(v - u) = 0, \quad (4)$$

20 com condições de contorno dadas por

$$u(0, t) = c^2 u_x(1, t) + \beta_1 u_t(1, t) = 0, \quad (5)$$

$$v(0, t) = c^2 v_x(1, t) + \beta_2 v_t(1, t) = 0, \quad (6)$$

e condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x). \quad (7)$$

Usando o Teorema de Rouché os autores provaram que a energia total do sistema decai exponencialmente para zero com $t \rightarrow \infty$, ou seja, existem constantes $M > 0$ e $\omega > 0$ tais que

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (8)$$

25 Considerando o sistema de ondas acopladas com damping interno, totalmente dissipativo

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha(u - v) + \mu_1 u_t = 0 \quad \text{em} \quad (0, l) \times (0, T), \quad (9)$$

$$v_{tt} - v_{xx} + \alpha(v - u) + \mu_2 v_t = 0 \quad \text{em} \quad (0, l) \times (0, T), \quad (10)$$

onde $\mu_i > 0$ ($i = 1, 2$) são os coeficientes de amortecimento, com condições de contorno dadas por

$$u(0, t) = u(l, t) = v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (11)$$

é fácil provar que a energia total do sistema (9)–(11) dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |v_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |v_x|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^l |u - v|^2 dx, \quad (12)$$

decai exponencialmente para zero com $t \rightarrow \infty$ (use por exemplo o método da energia). No entanto, a pergunta que motivou este trabalho é a seguinte:

1. *A inserção de um damping do tipo delay $u_t(x, t - \tau)$, melhora a taxa de decaimento do sistema (9)–(11)?*

Adiantamos que a resposta para esta pergunta é não, pois a interação entre os amortecimentos do tipo atrito e delay podem causar instabilidade no sistema se certas condições não forem adotadas. Para melhor esclarecer esta e outras questões consideramos o sistema unidimensional de ondas acopladas dado por

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha(u - v) + \mu_1 u_t + \mu_2 u_t(x, t - \tau) = 0 \quad \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \quad (13)$$

$$v_{tt} - v_{xx} + \alpha(v - u) + \mu_3 v_t = 0 \quad \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \quad (14)$$

onde $\mu_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$) são os coeficientes de amortecimento e $\tau > 0$ é o coeficiente de delay. As condições iniciais são dadas por

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad \forall x \in (0, l), \quad (15)$$

e as condições de contorno por

$$u(0, t) = u(l, t) = v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (16)$$

2. Existência e unicidade de solução

Motivado por técnicas matemáticas devido a Said-Houari e Laskri [9] (veja também Nicaise e Pignotti [10, 11] e Feng e Yang [12]), introduzimos uma nova variável dependente para lidar com o termo de delay. Mais precisamente, consideramos

$$z(x, \rho, t) = u_t(x, t - \tau\rho), \quad x \in (0, l), \quad \rho \in (0, 1), \quad t > 0. \quad (17)$$

Com isto, o sistema (13)–(16) pode ser reescrito como

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha(u - v) + \mu_1 u_t + \mu_2 z(x, 1, t) = 0 \quad \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \quad (18)$$

$$v_{tt} - v_{xx} + \alpha(v - u) + \mu_3 v_t = 0 \quad \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \quad (19)$$

$$\tau z_t + z_\rho = 0 \quad \text{em } (0, l) \times (0, 1) \times (0, \infty), \quad (20)$$

com condições iniciais e de contorno dadas por

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad x \in (0, l), \quad (21)$$

$$z(x, \rho, 0) = f_0(x, -\rho\tau), \quad (x, \rho) \in (0, l) \times (0, 1), \quad (22)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (23)$$

$$z(x, 0, t) = u_t(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty). \quad (24)$$

A energia total do sistema (18)–(24) é dada por

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |v_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l |v_x|^2 dx \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \int_0^l |u - v|^2 dx + \frac{\tau\mu_1}{2} \int_0^l \int_0^1 |z|^2 d\rho dx. \end{aligned} \quad (25)$$

O teorema seguinte trata da lei de dissipação do sistema.

Teorema 2.1. *Seja (u, v, z) a solução do sistema (18)–(24). Para $\mu_2 < \mu_1$ a energia $E(t)$ do sistema (18)–(24) satisfaz a lei de dissipação de energia dada por*

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -C_1 \int_0^l (|u_t|^2 + |z(x, 1, t)|^2) dx - \mu_3 \int_0^l |v_t|^2 dx, \quad \forall t \geq 0, \quad (26)$$

50 onde $C_1 := \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2) > 0$.

Prova: Multiplicando a equação (18) por u_t , integrando por partes em $[0, L]$ e usando a condição de contorno obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx + \alpha \int_0^l (u - v) u_t dx \\ + \mu_1 \int_0^l |u_t|^2 dx + \mu_2 \int_0^l z(x, 1, t) u_t dx = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Analogamente, multiplicando a equação (19) por v_t temos

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^l |v_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^l |v_x|^2 dx + \alpha \int_0^l (v - u) v_t dx + \mu_3 \int_0^l |v_t|^2 dx = 0. \quad (28)$$

Agora multiplicando a equação (20) por $\mu_1 z$ e integrando por partes em $[0, L] \times [0, 1]$ obtemos

$$\frac{\tau\mu_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l \int_0^1 |z|^2 d\rho dx - \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |z(x, 1, t)|^2 dx = 0. \quad (29)$$

55 Adicionando as equações (27)–(29) ficamos com

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\frac{\mu_1}{2} \int_0^l |v_t|^2 dx - \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |z(x, 1, t)|^2 dx - \mu_2 \int_0^l z(x, 1, t) v_t dx.$$

Usando a desigualdade de Young obtemos

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -\frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2) \int_0^l |u_t|^2 dx - \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2) \int_0^l |z(x, 1, t)|^2 dx - \mu_3 \int_0^l |v_t|^2 dx.$$

Portanto, para $\mu_2 < \mu_1$ existe uma constante positiva $C_1 := \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2) > 0$. Isso conclui a prova do teorema.

■

60 Com o objetivo de provar a boa colocação do sistema (18)–(24), introduzimos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} := H_0^1(0, l) \times L^2(0, l) \times H_0^1(0, l) \times L^2(0, l) \times L^2((0, l) \times (0, 1)), \quad (30)$$

onde $L^2(0, l) := \left\{ f : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}; \int_0^l |f|^2 dx < \infty \right\}$ e $H_0^1(0, l) := \left\{ f \in L^2(0, l); \int_0^l |f_x|^2 dx < \infty; f(0) = f(l) = 0 \right\}$, munido com o produto interno

$$\begin{aligned} \langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} &:= \int_0^l u_1 \tilde{u}_1 dx + \int_0^l v_1 \tilde{v}_1 dx + \int_0^l u_{0,x} \tilde{u}_{0,x} dx + \int_0^l v_{0,x} \tilde{v}_{0,x} dx \\ &+ \alpha \int_0^l (u_0 - v_0)(\tilde{u}_0 - \tilde{v}_0) dx + \tau \xi_1 \int_0^l \int_0^1 z_0(x, \rho) \tilde{z}_0(x, \rho) d\rho dx, \end{aligned} \quad (31)$$

para todo $U = (u_0, u_1, v_0, v_1, z_0)^T$ e $\tilde{U} = (\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \tilde{z}_0)^T$ em \mathcal{H} e a norma dada por

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 := \langle U, U \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (32)$$

65 Para provar a existência e unicidade de solução, usamos a teoria de semigrupo de operadores lineares [13]. Note que o sistema (18)–(24) pode ser reescrito como

$$\Phi_t(t) = \mathcal{A}\Phi(t), \quad t > 0, \quad (33)$$

$$\Phi(0) = \Phi_0, \quad (34)$$

onde $\Phi(t) = (u(\cdot, t), u_t(\cdot, t), v(\cdot, t), v_t(\cdot, t), z(\cdot, 1, t))^T$ é a solução do sistema, $\Phi_0 = (u_0(\cdot), u_1(\cdot), v_0(\cdot), v_1(\cdot), f_0(\cdot, -\cdot\tau))^T$ é a condição inicial e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador linear definido por

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I(\cdot) & 0 & 0 & 0 \\ (\cdot)_{xx} - \alpha I(\cdot) & -(\mu_1 + \mu_2)I(\cdot) & \alpha I(\cdot) & 0 & -\mu_2 \rho^{-1} \int_0^1 (\cdot)_{\rho} d\rho \\ 0 & 0 & 0 & I(\cdot) & 0 \\ \alpha I(\cdot) & 0 & (\cdot)_{xx} - \alpha I(\cdot) & -\mu_3 I(\cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau^{-1}(\cdot)_{\rho} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

70 onde denotamos por $I(\cdot)$ o operador identidade. O domínio de \mathcal{A} é dado por

$$D(\mathcal{A}) := \left\{ U = (u_0, u_1, v_0, v_1, z_0) \in \left(H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l) \times H_0^1(0, l) \right)^2 \times L^2(0, l; H^1(0, 1)) \right\}.$$

É fácil ver que \mathcal{A} é dissipativo desde que $\mu_2 < \mu_1$, pois para cada $U = (u_0, u_1, v_0, v_1, z_0)^T \in D(\mathcal{A})$ temos

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq -C_1 \int_0^l (|u_1|^2 + |z_0(x, 1)|^2) dx - \mu_3 \int_0^l |v_1|^2 dx \leq 0, \quad (36)$$

onde $C_1 := (\mu_1 - \mu_2)/2 > 0$. Como \mathcal{A} é um operador dissipativo, é padrão mostrar que 0 pertence ao conjunto resolvente de \mathcal{A} , i.e., $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Então, a partir do Teorema de Lumer-Phillips ([13], Teorema 4.3), é garantido que o operador \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de C_0 -semigrupo de contrações $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ em \mathcal{H} . Com isso, podemos afirmar o seguinte resultado.

Teorema 2.2 (Boa colocação). *Sejam $D(\mathcal{A})$ e \mathcal{H} conforme definidos anteriormente. Então para qualquer $U_0 \in \mathcal{H}$, o problema (33)–(34) possui uma única solução fraca $U(t) = e^{\mathcal{A}t}U_0 \in C([0, \infty); \mathcal{H})$. Além disso, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então $U(t) \in C^1([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty); D(\mathcal{A}))$ é a solução clássica do problema (33)–(34).*

3. Decaimento exponencial: O método da energia

Nesta seção provamos que a energia total do sistema (18)–(24) decai exponencialmente para zero com $t \rightarrow \infty$. Para isso, usamos a regularidade estabelecida no Teorema 2.2. O teorema seguinte trata desse resultado.

Teorema 3.1. *Suponha que $\mu_2 < \mu_1$. Então a energia $E(t)$ do sistema (18)–(24) decai exponencialmente para zero como o tempo t tende ao infinito. Ou seja, existem constantes $M > 0$ e $\omega > 0$ independentemente dos dados iniciais tais que*

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (37)$$

A prova deste teorema requer a construção de dois lemas técnicos que são mostrados à seguir.

Lema 3.2. *Seja (u, v, z) a solução do sistema (18)–(24). Então o funcional*

$$\mathcal{F}(t) := \int_0^l u_t u \, dx + \int_0^l v_t v \, dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |u|^2 \, dx, \quad (38)$$

satisfaz a estimativa,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) \leq \int_0^l |u_t|^2 \, dx + \int_0^l |v_t|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_0^l |u_x|^2 \, dx - \int_0^l |v_x|^2 \, dx \quad (39)$$

$$- \alpha \int_0^l |u - v|^2 \, dx + \frac{\mu_2^2 c_p}{2} \int_0^l |z(x, 1, t)|^2 \, dx, \quad (40)$$

onde $c_p > 0$ é a constante de Poincaré.

Prova: Multiplicando a equação (18) por u e integrando por partes em $[0, L]$, temos

$$\int_0^l u_{tt} u \, dx + \int_0^l |u_x|^2 \, dx + \alpha \int_0^l (u - v)u \, dx + \frac{\mu_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l |u|^2 \, dx + \mu_2 \int_0^l z(x, 1, t)u \, dx = 0.$$

95 Por outro lado, da identidade $u_{tt}u = \frac{\partial}{\partial t}(u_t u) - |u_t|^2$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_0^l u_t u \, dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |u|^2 \, dx \right) - \int_0^l |u_t|^2 \, dx + \int_0^l |u_x|^2 \, dx \\ + \alpha \int_0^l (u - v)u \, dx + \mu_2 \int_0^l z(x, 1, t)u \, dx = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

De modo análogo obtemos para a equação (19)

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^l v_t v \, dx \right) - \int_0^l |v_t|^2 \, dx + \int_0^l |v_x|^2 \, dx + \alpha \int_0^l (v - u)v \, dx = 0. \quad (42)$$

Somando as equações (41) e (42) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_0^l u_t u \, dx + \int_0^l v_t v \, dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |u|^2 \, dx \right) - \int_0^l |u_t|^2 \, dx - \int_0^l |v_t|^2 \, dx + \int_0^l |u_x|^2 \, dx \\ + \int_0^l |v_x|^2 \, dx + \alpha \int_0^l |u - v|^2 \, dx + \mu_2 \int_0^l z(x, 1, t)u \, dx = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Finalmente, usamos as desigualdades de Young e Poincaré para obtermos o resultado

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_0^l u_t u \, dx + \int_0^l v_t v \, dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^l |u|^2 \, dx \right) \leq \int_0^l |u_t|^2 \, dx + \int_0^l |v_t|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_0^l |u_x|^2 \, dx \\ - \int_0^l |v_x|^2 \, dx - \alpha \int_0^l |u - v|^2 \, dx + \frac{\mu_2^2 c_p}{2} \int_0^l |z(x, 1, t)|^2 \, dx, \end{aligned} \quad (44)$$

onde $c_p > 0$ é a constante de Poincaré.

100 ■

Lema 3.3. *Seja (u, v, z) a solução do sistema (18)–(24). Então o funcional*

$$\mathcal{G}(t) := \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\rho} |z|^2 \, d\rho \, dx, \quad (45)$$

satisfaz a identidade,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) = -2\mathcal{G}(t) - \frac{e^{-2\tau}}{\tau} \int_0^l |z(x, 1, t)|^2 \, dx + \frac{1}{\tau} \int_0^l |v_t|^2 \, dx. \quad (46)$$

Prova: A prova é imediata. De fato, derivando o funcional $\mathcal{G}(t)$ em relação a t , obtemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) = 2 \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z z_t \, d\rho \, dx. \quad (47)$$

Usando a equação (20), temos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) = -\frac{1}{\tau} \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} |z|^2 \, d\rho \, dx. \quad (48)$$

105 A conclusão segue usando a integração por partes no intervalo $[0, 1]$.

■

3.1. Prova do Teorema (3.1)

Agora estamos em condições de provar o Teorema 3.1. Para isso, definimos o funcional de Lyapunov

$$\mathcal{L}(t) := N_0 E(t) + \mathcal{F}(t) + \frac{\tau \mu_1}{2} \mathcal{G}(t), \quad (49)$$

110 onde $N_0 > 0$ é uma constante definida posteriormente. Além disso, é fácil ver que $\mathcal{L}(\cdot)$ e $E(\cdot)$ são equivalentes, *i.e.*, existem constantes $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$ tais que

$$k_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq k_2 E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (50)$$

Segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq - \left[N_0 (\mu_1 - \mu_2) - 2 \right] \frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx - (2N_0 \mu_3 - 2 - \mu_1) \frac{1}{2} \int_0^l |v_t|^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx - \int_0^l |v_x|^2 dx - \alpha \int_0^l |u - v|^2 dx - \tau \mu_1 e^{-2\tau} \int_0^l \int_0^1 |z|^2 d\rho dx \\ &\quad - \left[N_0 (\mu_1 - \mu_2) + \mu_1 e^{-2\tau} - \mu_2^2 c_p \right] \frac{1}{2} \int_0^l |z(x, 1, t)|^2 dx. \end{aligned} \quad (51)$$

Escolhendo $N_0 > 0$ suficientemente grande, *i.e.*,

$$N_0 > \max \left\{ 2/(\mu_1 - \mu_2), (2 + \mu_1)/2\mu_3, \mu_2^2 c_p / (\mu_1 - \mu_2) \right\}, \quad (52)$$

temos que

$$\begin{aligned} \xi_1 &:= N_0 (\mu_1 - \mu_2) - 2 > 0, & \xi_2 &:= 2N_0 \mu_3 - 2 - \mu_1 > 0, \\ \xi_3 &:= N_0 (\mu_1 - \mu_2) + \mu_1 e^{-2\tau} - \mu_2^2 c_p > 0. \end{aligned}$$

115 Tomando $\xi_0 := \min\{1, 2e^{-2\tau}, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ obtemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\xi_0 E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (53)$$

que é equivalente (ver 50) à escrever

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\frac{\xi_0}{k_2} \mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (54)$$

Portanto provamos que

$$E(t) \leq M E(0) e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (55)$$

com $M \geq 1$ e $\omega := \xi_0/k_2$. Isso conclui a prova do teorema.

4. Considerações finais

120 Neste trabalho de conclusão de curso, estudamos um sistema de equações de ondas aco-
pladas com termos dissipativos do tipo atrito e delay. Fornecemos uma breve ideia da
demonstração da existência e unicidade de solução do sistema usando a teoria de semigrupo,
estabelecemos a relação $\mu_2 < \mu_1$ para garantirmos a dissipação de energia e consequente-
mente, provamos o decaimento exponencial da energia do sistema. O objetivo principal desse
125 trabalho, é fornecer um material didático com um texto simples para o aluno de graduação
que pretende estudar o método da energia.

Referências

- [1] R. E. D. Bishop, D. C. Johnson, The mechanics of vibration, Cambridge, Cambridge University Press, 1960.
- 130 [2] J. P. Denhartog, Mechanical vibrations, New York: McGraw-Hill., 1956.
- [3] L. Fryba, Vibration of solids and structures under moving loads, Prague: Academia, 1972.
- [4] S. Kaliski, Vibrations and waves in solids, 1966.
- [5] W. Nowacki, Dynamics of elastic systems, London: Chapman & Hall Limited, 1963.
- [6] W. Nowacki, Dynamics of structures, Warsaw: Arkady (in Polish), 1972.
- 135 [7] Z. Oniszcuk, Transverse vibrations of elastically connected double-string complex system, part i: Free vibrations, Journal of Sound and Vibration 232 (2) (2000) 355–366.
- [8] M. Najafi, G. Sarhangi, H. Wang, Stabilizability of coupled wave equations in parallel under various boundary conditions, IEEE Transactions on Automatic Control 42 (9) (1997) 1308–1312.
- [9] B. Said-Houari, Y. Laskri, A stability result of a timoshenko system with a delay term in the internal feedback, Applied Mathematics and Computation 217 (6) (2010) 2857–2869.
- 140 [10] S. Nicaise, C. Pignotti, Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks, SIAM Journal on Control and Optimization 45 (5) (2006) 1561–1585.
- [11] S. Nicaise, C. Pignotti, Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay, Differential and Integral Equations (2008) 935–958.
- 145 [12] B. Feng, X.-G. Yang, Long-time dynamics for a nonlinear timoshenko system with delay, Applicable Analysis 96 (4) (2016) 606–625.
- [13] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer New York, 1983.